

Wie fängt man Mäuse ?

Ulrike Brandt

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Informatik
brandt@informatik.tu-darmstadt.de
Tel.:+49(0)6151-16-6183

Oktober 2003

Zusammenfassung

In his paper [4] K. Döpp posed the following problem: „Basic problem“: Does there exist a finite automaton that finds a way out of every finite plane open labyrinth from any initial position and finally moves arbitrarily far away ? 1974 L. Budach [1] proved that such an automaton does not exist. A complete version of the complicated proof appeared 1978 in [2]. In this form the proof is not presentable in a standard lecture about finite automata. We give a simplified version of the proof which can be presented completely in such a lecture.

Keywords: finite automaton, mouse, finite plane open labyrinth, maze

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|------------------------------------|-----------|
| 1 | Problemstellung | 2 |
| 2 | Abwicklungen | 16 |
| 3 | <i>A</i>-flexible Labyrinth | 29 |
| 4 | Fallenkonstruktion I | 44 |
| 5 | Quasiplanarität | 56 |
| 6 | Fallenkonstruktion II | 67 |
| 7 | Literaturverzeichnis | 80 |

1 Problemstellung

Beim Bau von Robotern stellt sich die Frage, ob universelle **Abtastroboter** existieren, die sich in jedem endlichen Szenarium zurechtfinden. Genauer sind dabei Szenarien gemeint, die durch Labyrinth modelliert werden können, – also z.B. konstante Klötzchenwelten, Zimmer, Fabrikhallen, Städte, die Erdoberfläche usw. ...

Abtastroboter sind demnach Automaten, die sich in Labyrinth bewegen können. Dazu müssen sie in der Lage sein, Labyrinthkonturen zu ertasten und die freien Richtungen zu erkennen, in die sie voranrücken können. Was einem solchen Automaten dagegen fehlt, ist die Fähigkeit, seine Umgebung zu verändern. Er kann also z.B. keine Löcher in Labyrinthwände bohren, keinen Ariadnefaden spannen, keine Ampeln umschalten, nicht mit Kreide malen, keine Brotkrümel streuen wie Hänsel und Gretel usw. ... Er ist allein auf sein Gedächtnis angewiesen, in dem er sich endlich viel Information merken kann.

Beispiele für Abtastroboter sind die Lunochods, das sind die beiden sowjetischen Mondfahrzeuge, die sich Anfang der 70er Jahre auf der Mondoberfläche festgefahren hatten, d.h. die dort von einem bestimmten Zeitpunkt an immer nur noch den gleichen Weg abgefahren sind.

Aufgrund ihres endlichen Gedächtnisses und der Fähigkeit Labyrinthkonturen erkennen, aber nicht die Umgebung verändern zu können ist klar, daß Abtastautomaten durch endliche Automaten modelliert werden können.

Der Oberbegriff für Automaten, die sich in Labyrinth bewegen können ist der Name „Mäuse“. Diese Bezeichnung geht auf Shannon [9] zurück, der 1951 als erster eine echte Maschine konstruiert hat, die dazu in der Lage war.

Ein Beispiel für eine Maus ist die sogenannte Trachtenbrotmaus [7], die in einem Labyrinth Ampeln umschalten kann und daher immer den Speck findet. Die Trachtenbrotmaus ist aber kein Abtastautomat, da sie ihre Umgebung ja verändern kann.

Wichtige Resultate der Labyrinth-Theorie, insbesondere Probleme des Absuchens spezieller Graphen durch verschiedene Typen von Automaten, werden in [5] behandelt.

Die am Anfang gestellte Frage, ob universelle Abtastautomaten existieren, die sich in jedem endlichen Szenarium zurechtfinden, wurde 1971 von Döpp [4] als Grundaufgabe bezeichnet und folgendermaßen präzisiert:

„Gibt es einen endlichen Automaten, der aus jedem endlichen planaren offenen Labyrinth herausfindet und sich dann beliebig weit davon entfernt?“

3 Jahre später lieferte Budach [1] die Antwort nein, die von Döpp bereits vermutet worden war.

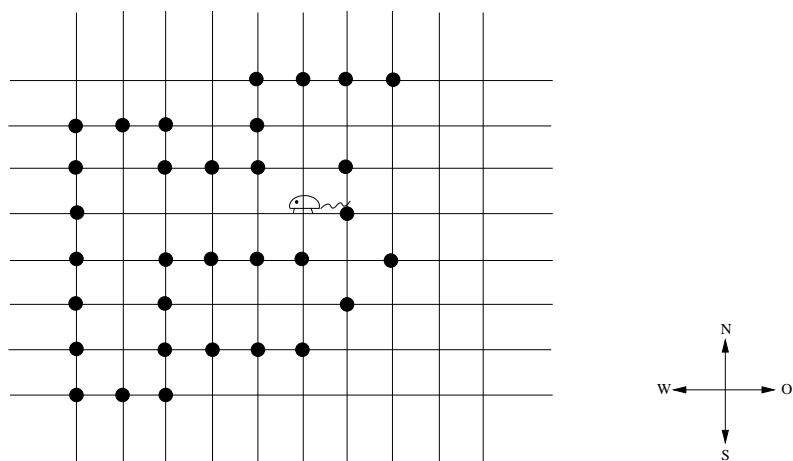
Budach folgend wollen wir von nun an den Begriff „Maus“ nicht mehr als Oberbegriff für Automaten verwenden, die sich in Labyrinth bewegen können, sondern synonym zu Abtastautomat, so daß wir als Überschrift für dieses Kapitel der Vorlesung die Frage nehmen können: Wie fängt man Mäuse?

Bevor wir mit der Beantwortung dieser Frage beginnen können, ist es aber

erforderlich, das Problem erst noch genauer zu formulieren. Dazu gehört u.a., daß wir definieren müssen, was unter einer Maus und einem endlichen planaren offenen Labyrinth zu verstehen ist.

Döpp vereinbart dazu folgendes:

Wir stellen uns vor, daß die Ebene durch ein Raster aus quadratischen Feldern unterteilt ist. Parallel zu den Seiten werden die 4 Grundrichtungen N, S, O, W unterschieden.



Von den Feldern des Rasters dürfen endlich viele, mit einem Zeichen markiert werden. Die restlichen bleiben frei. Die markierten Felder bilden das Labyrinth.

Eine Maus ist dann ein endlicher Automat, der sich auf den freien Feldern bewegt. In Abhängigkeit vom momentanen Zustand und den momentanen freien Richtungen in denen er weiterrücken kann, entscheidet er sich für eine dieser Richtungen, bewegt sich zum entsprechenden Nachbarfeld und ändert den Zustand.

Damit können wir eine Maus formal wie folgt definieren:

Eine Maus ist ein initialer endlicher Automat

$$A = (I(A), 0(A), S(A), \delta(A), \lambda(A), an(A)).$$

Dabei stehen $I(A)$ und $0(A)$ für Ein- und Ausgabealphabet, $S(A)$ für die Zustandsmenge, δ_A für die Zustandsüberföhrungsfunktion, λ_A für die Ausgabe-funktion und $an(A)$ schließlich für den ausgezeichneten Anfangszustand.

Eingabe für die Maus auf einem bestimmten Feld des Rasters ist die Menge der freien Richtungen, in die sie sich bewegen kann, so daß $I(A)$ gerade die Potenzmenge $P(D)$ der Menge der Grundrichtungen $D = \{n, s, o, w\}$ ist.

Nun können wir aber gleich den uninteressanten Fall ausschließen, daß sich A auf einem Feld befindet, dessen 4 Nachbarfelder alle markiert sind. Deshalb nehmen wir die leere Menge aus $P(D)$ heraus, bezeichnen die so erhaltene Menge mit $P'(D)$ und setzen $I(A) = P'(D)$.

Das Ausgabealphabet $0(A)$ ist dann die Menge D aus den Grundrichtungen, denn die Maus wählt ja aus der Menge der möglichen freien Richtungen eine aus

und bewegt sich dahin fort. Dementsprechend sind die Zustandsüberführungs- und die Ausgabefunktion Abbildungen.

$$\begin{aligned}\delta_A & : S(A) \times P'(D) \rightarrow S(A) \\ \lambda_A & : S(A) \times P'(D) \rightarrow D\end{aligned}$$

Dabei müssen wir an λ_A aber noch eine zusätzliche Bedingung stellen, um sicherzustellen, daß sich die Maus stets nur auf freien Feldern bewegt und keine Richtung einschlägt in der das zugehörige Nachbarfeld markiert ist. Und zwar muß gelten:

$$\forall s \in S(A), X \in P(D) : \lambda_A(s, X) \in X$$

Zu Beginn befindet sich eine Maus stets in ihrem ausgezeichneten Anfangszustand. Manchmal wollen wir jedoch, daß sie in einem anderen Zustand startet. Wir legen daher für $s \in S(A)$ fest, daß die Maus A_s die Maus A jedoch mit Anfangszustand s sein soll, d.h.

$$A_s = (I(A), O(A), S(A), \delta_a, \lambda_a, s)$$

Die Döpfsche Grundaufgabe dann ist die Frage, ob es eine Maus gibt, die aus jedem endlichen, planaren, offenen Labyrinth herausfindet und sich dann beliebig weit davon entfernt. Natürlich muß das Labyrinth offen sein, denn wenn wir die Maus in einem geschlossenen Teil des Labyrinths starten, kann sie trivialerweise nicht hinaus und die ganze Frage ist uninteressant.

Döpp unterscheidet daher zulässige und nicht zulässige Startpositionen. Und zwar heißt ein Feld des Rasters zulässig, wenn es als Anfang eines Weges aus unendlich vielen verschiedenen Feldern aufgefaßt werden kann.

Damit kann die Grundaufgabe wie folgt präziser formuliert werden: Gibt es eine Maus, die jedes endliche Labyrinth bewältigt, d.h. die angesetzt im Anfangszustand in einem beliebigen zulässigen Feld, einen Weg aus unendlich vielen Feldern abschreitet?

Denn, wenn sie im Laufe der Zeit beliebig viele verschiedene Felder besucht, so ist das aufgrund der Endlichkeit des Labyrinths gleichbedeutend damit, daß sie einen Ausgang findet und sich dann beliebig weit vom Labyrinth entfernt.

Daß das Labyrinth planar sein soll, muß nicht ausdrücklich gesagt werden, da die Döpfsche Labyrinthdefinition ohnehin nur planare Labyrinth zuläßt.

Damit wissen wir, was ein Labyrinth ist, was eine Maus ist und was es heißt, daß eine Maus ein Labyrinth bewältigt. Döpp ist es in seiner Arbeit nicht gelungen, seine Vermutung zu beweisen, daß die Grundaufgabe unlösbar ist, d.h. daß keine Maus existiert die jedes endliche Labyrinth bewältigt.

Diese Vermutung liegt deshalb nahe, weil eine Maus aufgrund der Endlichkeit ihres Gedächtnisses nicht beliebig weit zählen kann, also immer nur ein modulo-Zähler ist. Wenn sie also in einem Labyrinth in einen sehr langen geraden Gang

hineinläuft, wird sie irgendwann nicht mehr wissen, wieviele Felder sie zurückgelegt hat. Das Gleiche gilt für Spiralen mit entsprechend vielen Windungen. Auch hier wird die Maus irgendwann den Überblick darüber verlieren, wie oft sie sich beim Abschreiten eines solchen Weges bereits um sich selbst gedreht hat, d.h. an welcher Stelle in der Spirale sie sich genau befindet.

Tatsächlich werden wir diese Eigenschaften später maßgeblich verwenden um zu jeder Maus ein hinreichend kompliziertes Labyrinth zu konstruieren, in dem sie nach endlich vielen Schritten von einem bestimmten Startpunkt aus in eine Endlosschleife gerät und dann dasselbe Wegstück für immer wiederholt.

Entscheidend für den Beweis war allerdings Budachs Idee von einer allgemeineren Labyrinthdefinition auszugehen als Döpp, die auch nicht planare Labyrinth zuläßt und zu jeder Maus zunächst ein nicht planares Labyrinth zu konstruieren, das sie nicht bewältigt, was sehr viel einfacher ist. Dieses Labyrinth kann dann so geschickt in die Ebene eingebettet werden, daß die Maus davon sozusagen kaum etwas merkt und daher das planarisierte Labyrinth ebenfalls nicht bewältigt.

Budach definiert Labyrinth als Graphen mit markierten Kanten, deren Knoten nicht die im Döppschen Sinn markierten Felder sind, sondern im Gegenteil gerade die freien. Von dieser Definition werden wir hier ausgehen. Dazu führen wir zunächst folgendes ein:

Sei $D = \{n, s, o, w\}$ die Menge der **Richtungen**.

Für $r \in D$ sei \bar{r} die **entgegengesetzte Richtung**, d.h.

$$\begin{aligned} \bar{n} &= s \\ \bar{o} &= w \\ \text{und } \bar{r} &= r \text{ für alle } r \in D \end{aligned}$$

(d.h., daß $\bar{s} = n$ und $\bar{w} = 0$ ist).

Damit können wir festlegen:

Definition 1.1 Ein **Labyrinth** ist ein Paar $\mathcal{L} = (V, E)$, wobei V die Menge der **Punkte** und $E \subseteq V \times D \times V$ die Menge der **Kanten** ist.

Dabei gilt

- (i) $(P, r, Q) \in E \Rightarrow (Q, \bar{r}, P) \in E$
 (Q, \bar{r}, P) nennen wir die zu (P, r, Q) **inverse Kante** und r heißt Markierung von (P, r, Q) .
- (ii) $\forall P \in V : \#(\text{val}(P)) \geq 1$
dabei ist $\text{val}(P) = \{r \in D / \exists Q \in V : (P, r, Q) \in E\}$ die **Wertigkeit** von P
- (iii) $\forall P \in V, r \in D : (P, r, Q), (P, r, Q') \in E \Rightarrow Q = Q'$

In (ii) schließen wir den unsinnigen Fall aus, daß von einem Punkt überhaupt kein Fortkommen möglich ist, d.h. daß von dort gar keine Kanten ausgehen und in (iii) verbieten wir, daß von einem Punkt zwei verschiedene Kanten in dieselbe Richtung führen.

Statt (P, r, Q) werden wir auch $P \xrightarrow{r} Q$ schreiben.

Später werden wir an einigen Stellen den Begriff „Unterlabyrinth“ gebrauchen.

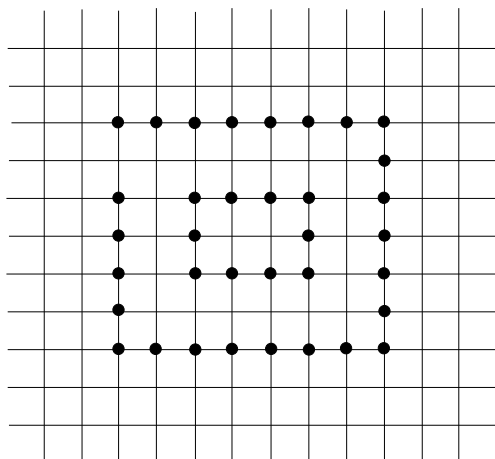
Ein Labyrinth $\mathcal{L}' = (V', E')$ ist **Unterlabyrinth** von $\mathcal{L} : \Leftrightarrow V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

Zuerst wollen wir nun die Döpfsche Labyrinth-Definition auf die Budachsche umschreiben, um dann die Grundaufgabe in den neuen Definitionen zu formulieren.

Betrachten wir dazu zuerst ein Beispiel für ein Labyrinth im Döpfschen Sinn und dem zugehörigen Budachschen Labyrinth.

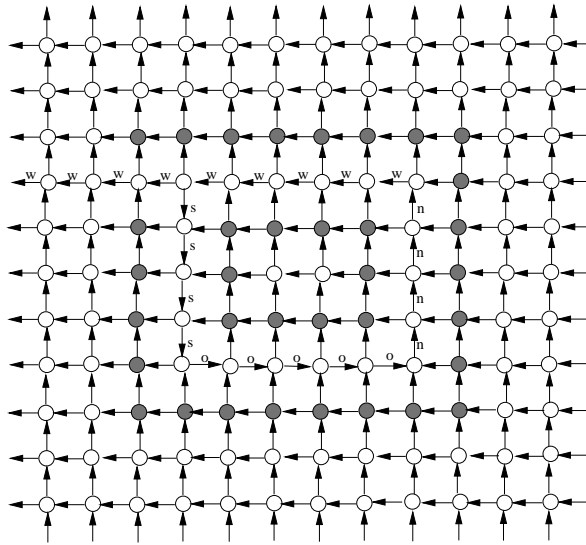
Dabei muß man sich bei den Kanten im äußeren Bereich des Budachschen Labyrinths, die Kantenmarkierungen w bzw. n hinzudenken.

Döpfsches Labyrinth



zugehöriges Budachsche Labyrinth

$\mathcal{L} = (V, E)$



Man sieht:

Die Punktmenge V erhält genau die zulässigen Punkte des Döpsschen Labyrinths. Die freien Punkte in der Mitte, von denen aus nur endlich viele Punkte erreichbar sind entfallen.

V ist unendlich, da im Döpsschen Labyrinth nur endlich viele Punkte markiert sein dürfen.

Die Kantenmenge E erhält man dann, indem man Rasterlinien die 2 benachbarte zulässige Punkte im oberen Labyrinth miteinander verbinden als Kanten im unteren Labyrinth auffaßt.

Dabei ist von den beiden Kanten die 2 benachbarte Punkte miteinander verbinden der Einfachheit halber nur eine gezeichnet und die zugehörige inverse Kante, die nach Definition ebenfalls existieren muß, weggelassen werden. Eine solche Kantenauswahl bezeichnen wir als Orientierung.

Definition 1.2 Eine **Orientierung** eines Labyrinths $\mathcal{L} = (V, E)$ ist eine Menge $E_+ \subseteq E$ mit $E_+ \cap \hat{E}_+ = \emptyset$ und $E_+ \cup \hat{E}_+ = E$. Dabei ist $\hat{E}_+ = \{(Q, \bar{r}, P) / (P, r, Q) \in E_+\}$.

Das bedeutet, daß wir von je zwei zueinander inversen Kanten genau eine in die Orientierung E_+ aufnehmen.

In Bildern gehen wir immer von einer festen Orientierung von \mathcal{L} aus. Die fehlenden inversen Kanten muß man sich hinzudenken.

Wir wollen nun den soeben am Beispiel besprochenen Übergang von einem Labyrinth im Döpsschen Sinn zum zugehörigen Budachschen Labyrinth allgemein formulieren.

Um die Zulässigkeit von Punkten zu definieren, brauchen wir den Begriff des Weges in einem Labyrinth. Wir legen fest:

Definition 1.3 Ein Weg in einem Labyrinth $\mathcal{L} = (V, E)$ ist eine Folge $\omega = (P_0, r_1, P_1)(P_1, r_2, P_2) \dots (P_{k-1}, r_k, P_k)$ mit $(P_{i-1}, r_i, P_i) \in E (1 \leq i \leq k)$.

Andere Schreibweisen:

- $\omega : P_0 \xrightarrow{r_1} P_1 \xrightarrow{r_2} \dots \xrightarrow{r_k} P_k$
oder kurz
- $\omega : P_0 \xrightarrow{r_1, r_2, \dots, r_k} P_k$

$\text{supp}(\omega) = \{P_0, P_1, \dots, P_k\}$ heißt **Träger** von ω und $r_1 r_2 \dots r_k \in D^*$ heißt **Markierung** um ω .

Entsprechend sind unendliche Wege definiert:

Ein unendlicher Weg in $\mathcal{L} = (V, E)$ ist eine unendliche Folge $\omega = (P_0, r_1, P_1)(P_1, r_2, P_2) \dots$ mit $(P_{i-1}, r_i, P_i) \in E$ ($i \geq 1$).

Alternative Schreibweisen:

- $\omega : P_0 \xrightarrow{r_1} P_1 \xrightarrow{r_2} \dots$
- $\omega : P_0 \xrightarrow{r_1, r_2, \dots} \infty$

$\text{supp}(\omega) = \{P_0, P_1, \dots\}$ heißt wieder **Träger** von ω und $r_1 r_2 \dots r_k \in D^\infty$ ist die **Markierung** von ω , wobei wir mit D^∞ die Menge der unendlichen Worte über dem Alphabet D der Richtungen bezeichnen.

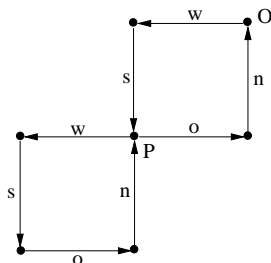
Bei einem unendlichen Weg kann der Träger endlich oder unendlich sein, die Markierung ist in diesem Fall aber immer ein unendliches Wort über dem Alphabet D der Richtungen.

Wir führen nun drei spezielle Wegtypen ein, nämlich den Rundweg, den Kreis und den Gang. Sowohl Rundweg wie Kreis beginnen und enden im gleichen Punkt. Im Unterschied zum Rundweg muß der Kreis aber zusätzlich weitgehend doppeltpunktfrei sein, daß heißt außer dem Anfangspunkt der zum Schluß wieder erreicht wird, darf kein Punkt mehr als einmal angelaufen werden: $\omega = (P_0, r_1, P_1) \dots (P_{k-1}, r_k, P_k)$ heißt

Rundweg : $\Leftrightarrow P_0 = P_k$

Kreis : \Leftrightarrow (i) $P_0 = P_k$
(ii) $P_i \neq P_j$ ($0 \leq i < j \leq k - 1$)
(iii) $k = 2 \Rightarrow r_2 \neq \bar{r}_1$

Im Labyrinth \mathcal{L}



bei dem wieder von einer festen Orientierung ausgegangen wird, ist also der Weg von P nach P mit Markierung $nosw$ ein Kreis, aber die Wege mit Markierung $(nows)^2$ oder $noswson$ sind nur Rundwege.

Ein Rundweg muß keinesfalls ein Kreis als Teilweg enthalten. Z.B. ist auch der bei P beginnende Weg mit Markierung $wsno$ ein Rundweg, da er bei P beginnt und endet.

Ein Gang ist schließlich ein Weg in einem Labyrinth, der wie der Kreis bis auf Anfang und Ende doppeltpunktfrei ist, dabei können Anfang- und Endpunkt übereinstimmen, sie müssen es aber nicht. Das besondere am Gang ist, daß er unterwegs nur über Punkte führt, von denen genau zwei Kanten ausgehen. Anfang- und Endpunkt dürfen dagegen auch eine andere Verzweigungsstruktur aufweisen.

Im Beispiel ist demnach der Kreis $\omega : P \xrightarrow{nosw} P$ ein Gang. Ein Kreis muß aber keineswegs gleichzeitig Gang sein, da im Beispiel von Punkt Q weitere Kanten ausgehen könnten, was auf die Kreiseigenschaft von ω keinen Einfluß hätte, aber die Gangeigenschaft zerstören würde.

Halten wir fest: ω heißt **Gang**: \Leftrightarrow

- (i) ω ist Kreis oder $P_i \neq P_j \quad (0 \leq i < j \leq k)$
- (ii) $\#(val(P_i)) = 2 \quad (1 \leq i \leq k - 1)$

Zurück zu unserer Aufgabe zu einer endlichen Menge M von Paaren ganzer Zahlen, die ein Döppisches Labyrinth definiert, das zugehörige Labyrinth nach Budach anzugeben.

Zunächst einmal können wir die komplette Ebene der ganzen Zahlen als Labyrinth auffassen, indem wir ein Raster darüberlegen und Gitterlinien, die zwei benachbarte Punkte miteinander verbinden als Labyrinthkanten ansehen. Dieses Labyrinth bezeichnen wir mit \mathcal{L}_\emptyset :

Sei $\mathcal{L}_\emptyset = (V_\emptyset, E_\emptyset)$ das Labyrinth mit $V_\emptyset = \mathbf{Z}^2$ und

$$E_\emptyset = \left\{ (P, r, Q) / P, Q \in \mathbf{Z}^2 \text{ und } r = \begin{cases} o, & \text{falls } Q = P + (1, 0) \\ w, & \text{falls } Q = P + (-1, 0) \\ s, & \text{falls } Q = P + (0, 1) \\ n, & \text{falls } Q = P + (0, -1) \end{cases} \right\}.$$

Damit können wir den Begriff der Zulässigkeit eines Punktes im Sinne von Döpp so definieren, daß er Anfangspunkt eines Weges in \mathcal{L}_\emptyset mit unendlichem Träger ist, auf dem kein Punkt aus M vorkommt, d.h.:

$P \in \mathbf{Z}^2$ heißt **zulässig** (im Sinn von Döpp) : \Leftrightarrow es gibt einen Weg $\omega : P = P_0 \xrightarrow{r_1} P_1 \xrightarrow{r_2} \dots$ in \mathcal{L}_\emptyset mit $\#(supp(\omega)) = \infty$ und $supp(\omega) \cap M = \emptyset$

$\mathcal{L}_M = (\{P \in V_\emptyset / P \text{ zulässig}\}, \{(P, r, Q) \in E_\emptyset / P, Q \text{ zulässig}\})$ ist dann das Budachsche Labyrinth, das zu dem durch M definierten Döppischen Labyrinth korrespondiert.

Jedes Labyrinth, das auf diese Weise aus einer endlichen Teilmenge von \mathbf{Z}^2 entsteht, soll von nun an **Netzlabyrinth** heißen.

Um die Grundaufgabe neu formulieren zu können, brauchen wir jetzt nur noch den Begriff zu übertragen, daß eine Maus ein Labyrinth bewältigt, d.h., daß ihr Weg von jedem zulässigen Punkt aus an ∞ vielen verschiedenen Punkten vorbeiführt. Dazu müssen wir sagen, wie sich der Weg einer Maus A bestimmt, wenn wir sie in Zustand s in Punkt P in einem Labyrinth $\mathcal{L} = (V, E)$ starten.

Für $(P, r, Q) \in E$ sei $Pr = Q$.

Dann ist $P\lambda_A(s, val(P))$ der nächste Punkt den A im Zustand s von P aus ansteuert und $\delta A(s, val(P))$ ist der Folgezustand.

Ist dann die Abbildung $\text{next}: S(A) \times V \rightarrow S(A) \times V$ definiert durch

$$\text{next}(P, s) = (\delta A(s, val(P)), P\lambda_A(s, val(P))),$$

so sind wir in der Lage, das **Verhalten** von A im Labyrinth \mathcal{L} von (s, P) aus zu definieren, und zwar als Folge $\{\text{next}^t(s, P)\}_{t \geq 0} = (s, P), \text{next}(s, P), \text{next}^2(s, P), \dots$

Aus dem Verhalten von A ergibt sich dann der von A in \mathcal{L} von (s, P) aus zurückgelegte Weg.

$$\omega : P_0 \xrightarrow{r_1} P_1 \xrightarrow{r_2} P_2 \rightarrow \dots,$$

wenn wir setzen

$$\begin{aligned} (s_t, P_t) &= \text{next}^t(s, P) \text{ und} \\ r_{t+1} &= \lambda_A(s_t, val(P_t)) \text{ für } t \geq 0. \end{aligned}$$

Gilt dann $\#(\text{supp}(\omega)) = \infty$, so sagen wir: A bewältigt \mathcal{L} von (s, P) aus und können definieren

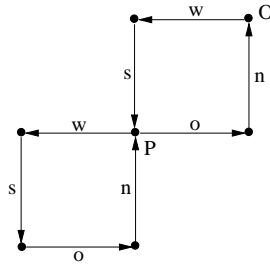
A **bewältigt** \mathcal{L} : $\Leftrightarrow \forall P \in V$: A bewältigt \mathcal{L} von $(an(A), P)$ aus.

Damit sind wir endlich soweit, die Döpfsche Grundaufgabe auf der Basis der Budachschen Labyrinthdefinition neu formulieren zu können. Sie lautet ganz einfach: Gibt es eine Maus, die jedes Netzlabyrinth bewältigt?

Bevor wir nun darangehen zu zeigen, daß die Döpfsche Grundaufgabe unlösbar ist, d.h., daß keine solche universelle Maus existiert, wollen wir an dieser Stelle noch zwei wichtige Begriffe definieren und zwar den Begriff des reduzierten Weges und den Prälabrynthbegriff.

Wenn wir den Weg einer Maus in einem Labyrinth verfolgen, interessieren wir uns häufig nicht für Strecken, die darin bestehen einen Weg, ein Stück weit entlang zu laufen, kehrt zu machen und alles wieder zurückzulaufen.

Wenn also A im Labyrinth \mathcal{L}



den Weg um O nach O mit Markierung $wsnoonsnws$ zurücklegt, ist für uns die Hauptsache, daß sie einmal durch den rechten Kreis läuft. Daß sie dabei vorher noch den rechten Kreis antestet und zwischendurch gar einen Schritt vor und gleich wieder zurück macht ist nebensächlich. Da man dieses Hin-und-gleich-wieder-zurück-Laufen eines Weges so interpretieren kann, als ob die Maus ihn ausprobieren oder testen würde, sollen solche Wege von nun an Testläufe zu heißen. Im Beispiel wären also die Wege von O nach O mit Markierung $wsno$ und von P nach P mit Markierung ns Testläufe. Wege, in denen keine Testläufe vorkommen, werden wir reduziert nennen.

So ist der Weg $\omega' : O \xrightarrow{onws} O$ der aus $\omega : 0 \xrightarrow{wsnoonsnws} 0$ entsteht, indem wir die Testläufe $O \xrightarrow{wsno} O$ und $P \xrightarrow{ns} P$ herausnehmen, testlauffrei und damit reduziert.

Um den Begriff des reduzierten Weges formal festzulegen, müssen wir zuerst sagen, was der zu einem Weg gehörige inverse Weg ist. Hier ist es am einfachsten über die Markierungen zu gehen:

Für $z = z'r$ ($z' \in D^*$, $r \in D$), ist $\bar{z} = \bar{r}\bar{z}'$ die zugehörige **inverse Markierung** und $\square = \square$.

Für $z = r_1 \dots r_k$ erhält man dann $\bar{z} = \bar{r}_k \dots \bar{r}_1$ und es folgt, daß $\bar{\bar{z}}$ wieder z ist.

Sei $\omega : P \xrightarrow{z} Q$ Weg. Dann ist

- a) $\bar{\omega} : Q \xrightarrow{\bar{z}} P$ der zugehörige **inverse Weg**
- b) ω **Testlauf** : $\Leftrightarrow \exists z' \in D^+ : z = z'\bar{z}'$
- c) ω **reduziert** : $\Leftrightarrow \forall z_1, z_2, z' \in D^* : z = z_1 z' \bar{z}' z_2 \Rightarrow z' = \square$.

Markierungen reduzierter Weg nennen wir ebenfalls reduziert und setzen $R = \{z \in D^*/z \text{ reduziert}\}$.

R ist gegen Inversenbildung abgeschlossen, d.h. es gilt: $z \in R \Rightarrow \bar{z} \in R$.

Wenn wir an dieser Stelle einmal an die speziellen Wege Rundweg, Kreis und Gang zurückdenken, stellen wir fest, daß Kreise und Gänge prinzipiell reduziert sind, andernfalls wäre die Doppelpunktfreiheit verletzt, daß aber Rundwege auch Testläufe enthalten können.

Wie man leicht sieht, gibt es zu jedem Weg $\omega : P \xrightarrow{z} Q$ einen eindeutig bestimmten reduzierten Weg $\omega' : P \xrightarrow{z'} Q$, den man erhält, indem man aus ω solange Testläufe herausnimmt bis keine mehr vorkommen. Die Markierung z' dieses Weges wollen wir mit $red(z)$ bezeichnen.

Wenn wir dann auf der Menge R aller reduzierten Markierungen die Operation \circ einführen mit

$z_1 \circ z_2 = red(z_1 z_2)$ ($z_1, z_2 \in R$), so bildet R bzgl. \circ eine Gruppe, denn \circ ist assoziativ, \square ist das neutrale Element und \bar{z} ist das zu $z \in R$ gehörige inverse Element.

Wie üblich werden wir daher auch z^{-1} anstelle von \bar{z} schreiben.

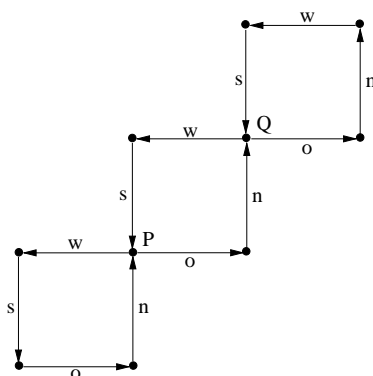
Wenn wir Labyrinth beschreiben, ist es oft lästig alle Punkte und Kanten angeben zu müssen. Das ist aber auch nicht notwendig, da jeder Gang in einem Labyrinth nur über seinen Anfangs- und Endpunkt mit dem restlichen Labyrinth verbunden und bis auf Benennung der inneren Punkte eindeutig bestimmt ist, wenn man außer Anfangs- und Endpunkt nur seine Markierung kennt.

Wir können ein Labyrinth daher einfacher beschreiben, indem wir statt Kanten Gänge angeben, in die es sich zerlegen läßt und statt aller Punkte nur deren Anfangs- und Endpunkte.

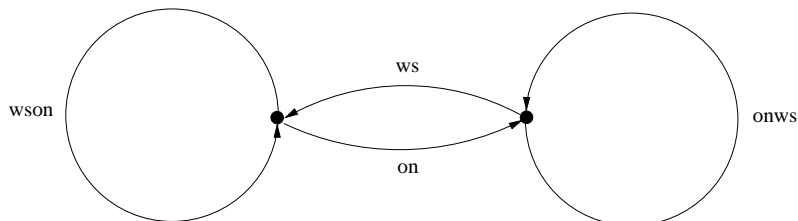
Das führt uns zum Prälabirynth-Begriff. So wird das Labyrinth \mathcal{L}' im Beispiel durch folgendes Prälabirynth \mathcal{L} definiert. Man muß \mathcal{L} nur um fehlende Zwischenpunkte ergänzen.

Beispiel:

Labyrinth \mathcal{L}'



Prälabirynth \mathcal{L}



Allgemein definieren wir:

Definition 1.4 Ein **Prälabyrinth** ist ein Paar $\mathcal{L} = (V, E)$, wobei V die Menge der Punkte und $E \subseteq V \times (R \setminus \{\square\}) \times V$ die Menge der Kanten ist.

Dabei gilt:

- (i) $(P, z, Q) \in E \Rightarrow (Q, \bar{z}, P) \in E$
 (inverse Kante, andere Schreibweise $Q \xrightarrow{\bar{z}} P$)
 (In Bildern gehen wir aber wieder von einer festen Orientierung aus.)
- (ii) $\#(\text{val}(P)) > 1$ für alle $P \in V$
- (iii) $(P, z, Q), (P, z', Q') \in E$ und $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$ und $Q = Q'$

Dabei sind

$$f : D^+ \rightarrow D$$

$$l : D^+ \rightarrow D$$

definiert durch

$$f(z) = r \Leftrightarrow z = \tilde{z}r \text{ für ein } \tilde{z} \in D^*$$

$$l(z) = r \Leftrightarrow z = r\tilde{z} \text{ für ein } \tilde{z} \in D^*$$

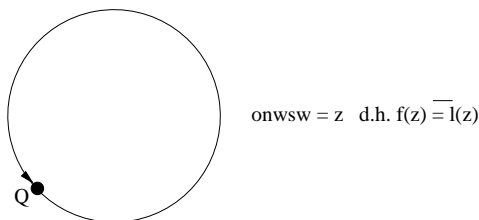
Bedingung (iii) verhindert, daß beim Einfügen von Zwischenpunkten von Punkt P zwei verschiedene Kanten in Richtung $f(z)$ ausgehen, was in Labyrinthen verboten ist.

Am Beispiel sieht man, daß in Prälabyrinthkanten Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen können. In solchen Fällen darf aber die erste Richtung in der zugehörigen Markierung niemals invers zur letzten sein, da andernfalls Bedingung (iii) verletzt wäre. Aus (iii) folgt also:

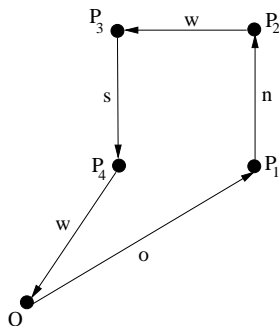
$$(P, z, Q) \in E \text{ und } P = Q \Rightarrow f(z) \neq l(\bar{z}).$$

Die Kante (P, z, P) würde nämlich andernfalls zusammen mit der zugehörigen inversen Kante (P, \bar{z}, P) die nach (i) ebenfalls zu E gehören muß, die Bedingung (iii) verletzen.

Ergänzen wir dazu im vorangehenden Beispiel einmal den rechten Kreis um die Richtung w und betrachten



Dann entsteht durch Einfügen von Zwischenpunkten folgendes Gebilde



und man sieht, daß dann von Q aus Kanten in Richtung o sowohl auch P_1 als auch nach P_4 führen würden, denn mit der Kante $P_4 \xrightarrow{w} Q$ gehört ja auch die inverse Kante $Q \xrightarrow{o} P_4$ zum Labyrinth.

Jedes Prälabirynth $\mathcal{L} = (V, E)$ definiert dann wie folgt ein Labyrinth $\mathcal{L}^* = (V^*, E^*)$:

nehme für jede Kante $\epsilon = (P, z, Q) \in E$ mit $z = r_1 \dots r_k$ und $r_i \in D (1 \leq i \leq k)$

die Punkte $P = P_0^\epsilon, P_1^\epsilon, \dots, P_{k-1}^\epsilon, P_k^\epsilon = Q$ in V^*

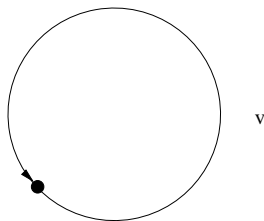
und

die Kanten $(P_0^\epsilon, r_1, P_1^\epsilon), (P_1^\epsilon, r_2, P_2^\epsilon), \dots, (P_{k-1}^\epsilon, r_k, P_k^\epsilon)$ in E^* auf.

In Zeichnungen werden wir von nun an oft Prälabirynthe anstelle von Labirynthen angeben. Wenn wir ein Prälabirynth \mathcal{L} zeichnen meinen wir aber stets das dadurch definierte Labyrinth \mathcal{L}^* , es sei denn es würde ausdrücklich etwas anderes gesagt.

Damit können wir zum Schluß dieses Grundlagenkapitels noch 2 besondere Labirynthe einführen, nämlich das Kreis- und das Doppelkreislabirynth:

Sei $v \in R$ mit $f(v) \neq l(\bar{v})$. Dann heißt das Labirynth



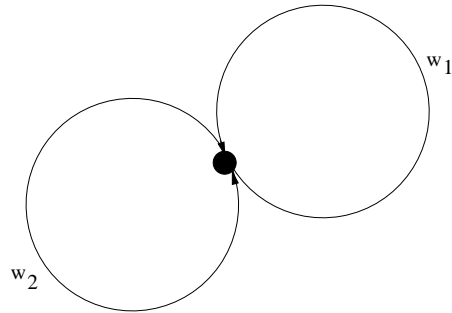
Kreislabirynth und wird mit \mathcal{C}_v bezeichnet.

Seien $w_1, w_2 \in R$ mit

- $f(w_1) = o$
- $l(w_1) = s$
- $f(w_2) = w$

- $l(w_2) = n$

Dann heißt das Labyrinth



Doppelkreislabyrinth

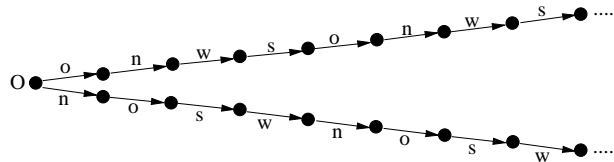
(In beiden Fällen zeichnen wir Prälabirinthe, meinen aber die dadurch definierten Labyrinthhe!)

Im Fall des Doppelkreislabyrinths haben wir die erste und letzte Richtung in den beiden Kreisen in bestimmter Weise festgelegt, weil es ohnehin nur in dieser Weise in Erscheinung treten wird.

2 Abwicklungen

Die Budachsche Labyrinthdefinition ist allgemeiner als die von Döpp, d.h. daß es Labyrinth gibt, die keine Netzlabyrinth sind. Ein Beispiel für ein solches Labyrinth sieht folgendermaßen aus:

\mathcal{L}



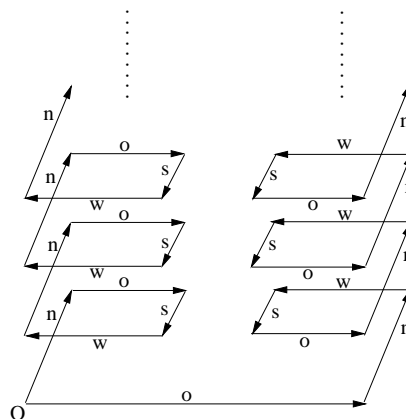
\mathcal{L} erfüllt die 3 Bedingungen, daß

1. von jedem Punkt höchstens eine Kante in jede Richtung führt,
2. zu jeder Kante auch die zugehörige inverse Kante existiert (die nur nicht eingezeichnet ist)
3. und schließlich, daß von

jedem Punkt mindestens eine Kante ausgeht,

ist also \mathcal{L} in unserem Sinn ein Labyrinth. Wenn man versucht alle Kanten gleichlang und ihrer Richtung entsprechend zu zeichnen, stellt man fest, daß dabei unterschiedliche Punkte aufeinanderfallen, d.h. daß \mathcal{L} kein planares Labyrinth ist, sondern eins mit unendlich vielen Stockwerken sozusagen:

\mathcal{L}



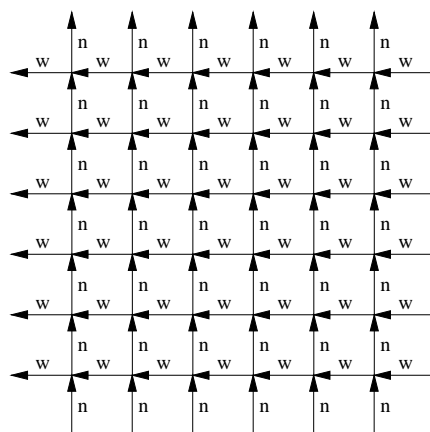
Und das macht nun gerade den Unterschied zur Döppschen Definition aus.

Nach Döpp ist ein Labyrinth immer planar, während unsere Definition auch nichtplanare Labyrinth zuläßt.

Ein Labyrinth ist planar, wenn man alle Kanten gleichlang und ihrer Richtung entsprechend zeichnen kann ohne daß dabei unterschiedliche Punkte aufeinanderfallen. Dementsprechend legen wir fest

Definition 2.1 Ein Labyrinth \mathcal{L} ist **planar** $\Leftrightarrow \mathcal{L}$ ist isomorph (d.h. gleich bis auf die Benennung der Punkte) zu einem Unterlabyrinth von \mathcal{L}_\emptyset .

Dabei ist \mathcal{L}_\emptyset das Netzlabyrinth, das zum Döppschen Labyrinth korrespondiert, in dem überhaupt kein Punkt markiert ist.



Ein Prälabyrinth \mathcal{L} ist **planar** $\Leftrightarrow \mathcal{L}^*$ ist planar.

(Dabei ist \mathcal{L}^* das durch \mathcal{L} definierte Labyrinth.)

Wie zu Beginn schon erwähnt, läuft der Budachsche Beweis nun so, daß zuerst zu jeder Maus ein nichtplanares Labyrinth konstruiert wird, das sie nicht bewältigt, und dieses Labyrinth dann anschließend so in ein planares Labyrinth verwandelt wird, daß die Maus das sozusagen nicht merkt.

Beweisidee:

- I. Konstruieren zu jeder Maus A ein nichtplanares Labyrinth \mathcal{L} , das sie nicht bewältigt.
- II. Betten \mathcal{L} in die Ebene ein, ohne daß sich das Verhalten von A dadurch wesentlich verändert.

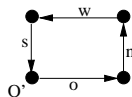
Der 2. Punkt klingt noch ziemlich wage wegen der unklaren Begriffe, wir werden sie aber Stück für Stück noch präzisieren.

Vorher wollen wir uns aber erst einmal mit dem 1. Punkt befassen. Dabei werden wir uns zunutze machen, daß eine Maus bestimmte Labyrinth nicht voneinander unterscheiden kann.

So ist sie beispielsweise nicht in der Lage die Steigung von Kanten anzumessen, so daß es aus ihrer Sicht auf das Gleiche herausläuft, ob wir sie vom Punkt 0

aus in das Labyrinth \mathcal{L} aus dem vorangehenden Beispiel oder von Punkt $0'$ aus in dieses planare Labyrinth \mathcal{L}' schicken:

\mathcal{L}'



Wir sagen dann: A kann \mathcal{L} und \mathcal{L}' nicht unterscheiden.

Das heißt nicht, daß ihr Verhalten – so wie wir es vor kurzem definiert haben – in \mathcal{L} und \mathcal{L}' übereinstimmt, denn zum Verhalten der Maus gehört ja abgesehen von der Zustandsfolge auch die Folge der angelaufenen Punkte und das sind in \mathcal{L} natürlich andere als in \mathcal{L}' .

Daß A \mathcal{L} und \mathcal{L}' nicht unterscheiden kann, soll vielmehr bedeuten, daß \mathcal{L} und \mathcal{L}' aus **ihrer Sicht** übereinstimmen, wenn wir sie in 0 und $0'$ im Anfangszustand starten. Genauer ist sie dann im n -ten Schritt in \mathcal{L} im selben Zustand wie in \mathcal{L}' und sieht in dieselben Richtungen Kanten ausgehen, so daß sie, da sie ja deterministisch ist, auch in dieselbe Richtung weiterläuft.

Wenn wir also unter der Sicht der Maus die Tripelfolge aus momentanem Zustand, Menge der abgehenden Richtungen, ausgewählte Richtung verstehen, so können wir den Begriff „ A kann \mathcal{L} und \mathcal{L}' nicht unterscheiden“ dadurch definieren, daß ihre Sicht von \mathcal{L} und \mathcal{L}' übereinstimmt, vorausgesetzt, daß wir sie in den Punkten 0 und $0'$ starten. Damit dabei nicht jedesmal dazu gesagt werden muß, welches die Startpunkte sind, schreiben wir sie bei Bedarf von nun an hinter den Labyrinthnamen.

Genauer legen wir fest:

Definition 2.2 Ein **punktiertes Labyrinth** ist ein Paar $(\mathcal{L}, 0)$ mit \mathcal{L} Labyrinth und 0 Punkt von \mathcal{L} . 0 wird Anfangs- (Start-, Ausgangs-, initialer) Punkt von \mathcal{L} genannt.

Die Folge $\{next^t(an(A), 0)\}_{t \geq 0}$ ist dann das **Verhalten** von A in $(\mathcal{L}, 0)$ und die Folge $\{(s_t, val(P_t), \lambda_a(s_t, val(P_t)))\}_{t \geq 0}$ die **A -Sicht** von $(\mathcal{L}, 0)$.

Dabei ist $(s_t, P_t) = next^t(an(A), 0)$ für alle $t \geq 0$.

Seien nun $(\mathcal{L}, 0)$ und $(\mathcal{L}', 0')$ zwei punktierte Labyrinth. Dann sagen wir:

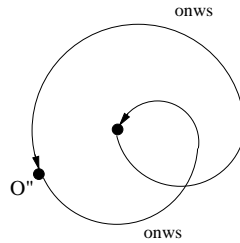
A kann $(\mathcal{L}, 0)$ und $(\mathcal{L}', 0')$ **nicht unterscheiden** \Leftrightarrow die A -Sichten von $(\mathcal{L}, 0)$ und $(\mathcal{L}', 0')$ stimmen überein.

Betrachten wir weitere Beispiele für Labyrinth, die eine Maus nicht unterscheiden kann:

Wenn wir uns die Labyrinth \mathcal{L} und \mathcal{L}' aus dem Beispiel nochmal ansehen, stellen wir fest, daß \mathcal{L} aus \mathcal{L}' entsteht, indem wir ausgehend von $0'$ alle reduzierten Wege sozusagen abwickeln.

Nun müssen wir das Labyrinth \mathcal{L}' aber keineswegs total abwickeln wie in \mathcal{L} geschehen. Wir können beispielsweise nach 2 Kreisdurchläufen Schluß machen und erhalten dann folgendes Labyrinth \mathcal{L}'' mit Anfangspunkt $0''$, das A weder von $(\mathcal{L}, 0)$ noch von $(\mathcal{L}', 0')$ unterscheiden kann:

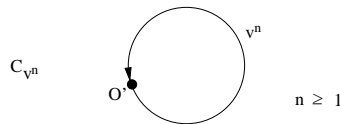
(\mathcal{L}'', O'')



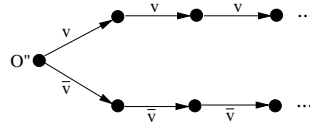
(Zur Erinnerung: wir zeichnen Prälabyrinth, meinen damit aber immer die dadurch definierten Labyrinth.)

In gleicher Weise können nun beliebige Kreislabirynth \mathcal{C}_v mit $v \in R$ und $f(v) \neq \bar{l}(v)$ abgewickelt werden.

Man erhält dann neben den Labirynth



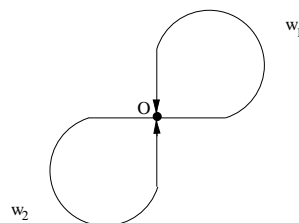
auch das Labirynth, in dem alle von 0 ausgehenden reduzierten Wege in \mathcal{C}_v abgewickelt sind und das daher als totale Abwicklung von \mathcal{C}_v bezeichnet wird:



Für festes v ist dann die Sicht der Maus in allen diesen Labirynth gleich, wenn sie in $0, 0'$ bzw. $0''$ gestartet wird.

Nun ist es sicher nicht sehr interessant einkreisige Labirynth abzuwickeln. Interessanter – insbesondere für unsere Zwecke – wird es, wenn man zu Doppelkreis-Labirynth übergeht.

Betrachten wir also ein Doppelkreis-Labirynth \mathcal{L}

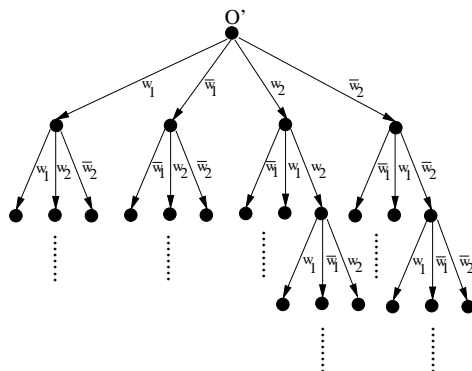


mit Anfangspunkt 0 und zwei Kreisen mit Markierung w_1 und w_2 , wobei die erste und letzte Richtung in w_1 und w_2 gemäß der Definition von Doppelkreis-Labirynth festliegen, d.h. $f(w_1) = o, l(w_1) = s, f(w_2) = w$ und $l(w_2) = n$.

Wir haben nun viel mehr Möglichkeiten Abwicklungen zu konstruieren, als bei einkreisigen Labyrinthen.

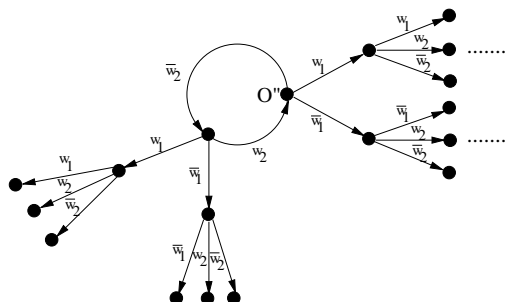
Zunächst einmal können wir natürlich wieder alle reduzierten Wege von O aus abwickeln und erhalten dann die totale Abwicklung \mathcal{L}' von \mathcal{L} .

\mathcal{L}'

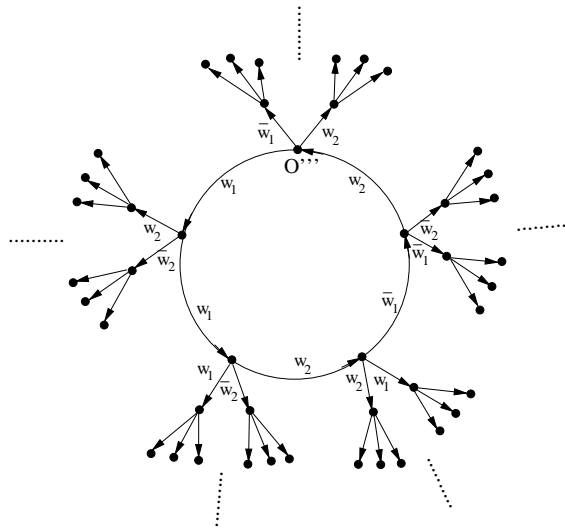


Weitere Abwicklungen entstehen, indem man bestimmte Rundwege unabgewickelt läßt. Betrachten wir einige Beispiele dazu:

\mathcal{L}''



\mathcal{L}'' entsteht, wenn $O \xrightarrow{w_2^2} O$ in \mathcal{L} unabgewickelt bleibt.



\mathcal{L}''' entsteht, wenn $O \xrightarrow{w_1^2 w_2 \bar{w}_1 w_2} O$ in \mathcal{L} unabgewickelt bleibt.

Eine beliebige Maus kann dann die Labyrinth $(\mathcal{L}, 0)$, $(\mathcal{L}', 0')$, $(\mathcal{L}'', 0'')$ und $(\mathcal{L}''', 0''')$ nicht unterscheiden.

Wir wollen nun den Abwicklungsbegriff allgemein definieren und gehen dazu von einem beliebigen Labyrinth $\mathcal{L} = (V, E)$ mit Startpunkt 0 aus.

Klar, die totale Abwicklung in der alle reduzierten von 0 ausgehenden Wege in \mathcal{L} abgewickelt sind, hat soviele Punkte, wie es in \mathcal{L} reduzierte Wege mit Startpunkt 0 gibt, also können wir deren Markierungen direkt mit den Punkten der totalen Abwicklung identifizieren. Wir legen also fest:

$\mathcal{L}' = (V', E')$ heißt **totale Abwicklung** von $(\mathcal{L}, 0)$
 $:\Leftrightarrow V' = \{z \in R / \exists Q \in V : 0 \xrightarrow{z} Q \text{ ist Weg in } \mathcal{L}\}$ und

$$E' = \{(z, r, zr) / r \in D \text{ und } z, zr \in V'\} \cup \{(zr, \bar{r}, z) / r \in D \text{ und } z, zr \in V'\}$$

Um nun die übrigen Abwicklungen zu definieren, in denen ein Rundweg vom Abwickeln ausgenommen wird, ist es am einfachsten, über die totale Abwicklung zu gehen und darin den abgewickelten Rundweg sozusagen wieder aufzuwickeln. Das bedeutet, daß wir bestimmte Punkte in der totalen Abwicklung miteinander identifizieren. Betrachten wir dazu die letzten Beispiele und fragen uns, wie wie die Abwicklung \mathcal{L}'' des Doppelkreislabyrinths \mathcal{L} , in der der Weg $0 \xrightarrow{w_2^2} 0$ unabgewickelt bleibt, aus der totalen Abwicklung \mathcal{L}' gewinnen können. Wir müssen dann die folgenden Punkte in \mathcal{L}' identifizieren.

für alle $k \geq 1$

1. \square , mit w_2^{2k}, \bar{w}_2^{2k}

2. w_1 , mit $w_2^{2k} \circ w_1, \bar{w}_2^{2k} \circ w_1$
 3. \bar{w}_1 , mit $w_2^{2k} \circ \bar{w}_1, \bar{w}_2^{2k} \circ \bar{w}_1$
 4. w_2 , mit $w_2^{2k} \circ w_2, \bar{w}_2^{2k} \circ w_2 = \bar{w}_2^{2k-1}$
 5. \bar{w}_2 , mit $w_2^{2k} \circ \bar{w}_2 = w_2^{2k-1}, \bar{w}_2^{2k} \circ w_2$
- usw. . . .

Dabei bezeichnen wir mit \circ wie gehabt die Multiplikation in der Gruppe R aller reduzierten Markierungen. Sei $U = \{w_2^{2k}/k \in \mathbf{Z}\}$ die von $\{w_2^2\}$ erzeugte Untergruppe von R , dann können wir festhalten, daß \mathcal{L}'' aus \mathcal{L}' entsteht, indem wir alle Punkte in \mathcal{L}' identifizieren, die durch Multiplikation eines Elementes aus U von links ineinander überführbar sind.

Genauer führen wir auf der Punktmenge der totalen Abwicklung eines Labyrinths wie folgt eine Äquivalenzrelation ein:

Definition 2.3 Sei $\mathcal{L} = (V, E)$ Labyrinth mit Startpunkt 0
und $\pi(\mathcal{L}, 0) = \{z \in R/\exists Q \in V : 0 \xrightarrow{z} Q \text{ ist Weg in } \mathcal{L}\}$
und $\pi(\mathcal{L}, 0, 0) = 0\{z \in R/0 \xrightarrow{z} 0 \text{ ist Weg in } \mathcal{L}\}$

Ist dann $G \subseteq \pi(\mathcal{L}, 0, 0)$ und U_G die von G erzeugte Untergruppe von $\pi(\mathcal{L}, 0, 0)$,
so setzen wir für $z, z' \in \pi(\mathcal{L}, 0)$:

$$z \equiv z' :\Leftrightarrow \exists v, v' \in U_G : v \circ z = v' \circ z'$$

Dabei enthält die Menge G gerade alle Markierungen von Rundwegen, die unabgewickelt bleiben sollen. Es kann sich dabei also allgemeiner als in den betrachteten Beispielen auch um mehrere handeln.

Definition 2.4 Damit können wir den Abwicklungsbegriff allgemein wie folgt definieren:

Das Labyrinth $\mathcal{L}^G = (V^G, E^G)$ mit

$$\begin{aligned} V^G &= \{[z]/z \in \pi(\mathcal{L}, 0)\} \\ \text{und } E^G &= \{([z], r, [zr])/r \in D, z, zr \in \pi(\mathcal{L}, 0)\} \\ &\cup \{([zr], \bar{r}, [z])/r \in D, z, zr \in \pi(\mathcal{L}, 0)\} \\ &= \{([z], r, [z \circ r])/r \in D, z, z \circ r \in \pi(\mathcal{L}, 0)\} \end{aligned}$$

heißt dann **(G-)Abwicklung** von $(\mathcal{L}, 0)$.

Wir gehen also von der totalen Abwicklung, deren Punktmenge $\pi(\mathcal{L}, 0)$ ist, aus und wickeln darin alle Abwicklungen von Rundwegen aus $(\mathcal{L}, 0)$, deren Markierungen in G vorkommen wieder auf. Welche Punkte dabei aufeinanderfallen wird gerade durch die eingeführte Äquivalenzrelation beschrieben, deren Äquivalenzklassen dementsprechend die Punkte der G -Abwicklung bilden.

\mathcal{L}^G ist stets ein Labyrinth, da für alle $r \in D, z, zr, z', z'r \in \pi(\mathcal{L}, 0)$ gilt: $z \equiv z' \Rightarrow zr \equiv z'r$

Da wir es zukünftig vor allem mit einelementigem G zu tun haben werden, wollen wir zur Vereinfachung der Schreibweise die Mengenklammern in diesen Fällen weglassen, wir schreiben also \mathcal{L}^z anstelle von $\mathcal{L}^{\{z\}}$ für $z \in \pi(\mathcal{L}, 0, 0)$.

Wir stellen fest:

Beobachtung: \mathcal{L}^\square ist die totale Abwicklung von \mathcal{L} .

Denn aus $G = \{\square\}$ folgt $U_G = \{\square\}$, so daß die eingeführte Äquivalenzrelation zur Gleichheit wird und man $V^\square = \pi(\mathcal{L}, 0)$ erhält.

Wir haben uns so ausführlich mit dem Thema Abwicklungen befaßt, weil eine Maus nicht in der Lage ist, ein Labyrinth von seinen Abwicklungen zu unterscheiden und wir uns diese Eigenschaft zu nutze machen können, um zu jeder Maus zunächst ein nicht-planares Labyrinth zu konstruieren, das sie nicht bewältigt. Zuvor muß allerdings bewiesen werden

Lemma 2.1 Für jedes Labyrinth $(\mathcal{L}, 0)$ und für jede Maus A gilt:

A kann $(\mathcal{L}, 0)$ und $(\mathcal{L}^G, [\square])$ nicht unterscheiden für alle $G \subseteq \pi(\mathcal{L}, 0, 0)$.

Beweis:

Seien $\{(s_t, P_t)\}_{t \geq 0}$ und $\{(s'_t, P'_t)\}_{t \geq 0}$ das Verhalten von A in $(\mathcal{L}, 0)$ und in $(\mathcal{L}^G, [\square])$ und

$$\omega: 0 = P_0 \xrightarrow{r_0} P_1 \xrightarrow{r_1} P_2 \rightarrow \dots$$

$$\omega': [\square] = P_0 \xrightarrow{r'_0} P'_1 \xrightarrow{r'_1} P'_2 \rightarrow \dots$$

die zugehörigen zurückgelegten Wege.

Wir zeigen für alle $t \geq 0$:

- (i) $s_t = s'_t$
- (ii) $val(P_t) = val(P'_t)$
- (iii) $r_t = r'_t$

durch vollständige Induktion über t . Dann folgt sofort, daß die A -Sichten von $(\mathcal{L}, 0)$ und $(\mathcal{L}^G, [\square])$ übereinstimmen und damit die Behauptung.

$t = 0$:

- (i) $s_o = s'_o = an(A)$
- (ii) es gilt
 - $r \in val(P_o) = val(v) \Leftrightarrow r \in \pi(\mathcal{L}, 0)$
 - $\Leftrightarrow ([\square], r, [r]) \in E^G$
 - $\Leftrightarrow r \in val([\square]) = val(P'_o)$

$$\begin{aligned}
r_o &= \lambda_A(s_o, \text{val}(P_o)) \\
\text{(iii)} \quad &= \lambda_A(s'_o, \text{val}(P'_o)) \quad \text{nach (i), (iii)} \\
&= r'_o
\end{aligned}$$

$t \rightarrow t + 1$:

$$\begin{aligned}
s_{t+1} &= \delta_A(s_t, \text{val}(P_t)) \\
\text{(i)} \quad &= \delta_A(s'_t, \text{val}(P'_t)) \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= s'_{t+1}
\end{aligned}$$

(ii) Nach Definition von \mathcal{L}^G gilt

$$P'_{t+1} = [\text{red}(r'_o \dots r'_t)], \text{ d.h. } \text{red}(r'_o \dots r'_t) \in \pi(\mathcal{L}, 0)$$

Sei $z = \text{red}(r'_o \dots r'_t)$ und $r \in D$

1. Fall: zr ist reduziert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
r &\in \text{val}(P_{t+1}) \\
&\Leftrightarrow z, zr \in \pi(\mathcal{L}, 0) \\
&\Leftrightarrow ([z], r[zr]) \in E^G \\
&\Leftrightarrow r \in \text{val}([z]) = P'_{t+1}.
\end{aligned}$$

2. Fall: zr ist nicht reduziert, d.h. $z = z'\bar{r}$. Dann gilt: $r \in \text{val}(P_{t+1})$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z', z \in \pi(\mathcal{L}, 0) \\
&\Leftrightarrow ([z'], \bar{r}[z]) \in E^G \quad ([z'], \bar{r}, [z]) \in E^G \\
&\Leftrightarrow ([z], \bar{\bar{r}}[z']) \in E^G \quad ([z'], \bar{\bar{r}}, [z]) \in E^G \\
&\Leftrightarrow r \in \text{val}([z]) = P'_{t+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{t+1} &= \lambda_A(s_{t+1}, \text{val}(P_{t+1})) \\
\text{(iii)} \quad &= \lambda_A(s'_{t+1}, \text{val}(P'_{t+1})) \quad \text{nach (i), (ii)} \\
&= r'_{t+1}
\end{aligned}$$

■

Aus Lemma 2.1 folgt sofort:

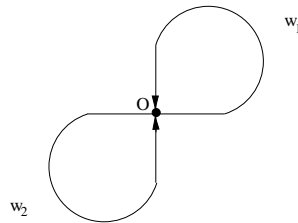
Beobachtung:

A kann $(\mathcal{L}^G, [\square])$ und $(\mathcal{L}^{G'}, [\square])$ nicht unterscheiden für alle $G, G' \subseteq \pi(\mathcal{L}, 0, 0)$.

Damit sind wir in der Lage, zu jeder Maus zunächst ein nicht planares Labyrinth zu konstruieren, das sie nicht bewältigt.

Und zwar besteht der Trick darin, die Maus in einem Doppelkreislabirynth

$\mathcal{L} = (V, E)$



mit Startpunkt 0 zu beobachten und dann, je nachdem wie sie sich verhält, eine Abwicklung von \mathcal{L} zu konstruieren, die sie nicht bewältigt.

Die Abwicklungen sind hier deshalb prädestiniert, weil A sie vom ursprünglichen Labyrinth nicht unterscheiden kann, so daß wir ihr Verhalten darin vorhersagen können. Darüberhinaus haben sie die Eigenschaft unendlich und zusammenhängend zu sein, so daß alle Punkte zulässig sind. Wenn dann der Weg von A von einem Punkt aus endlich bleibt, bewältigt sie das Labyrinth nicht und wir sind mit dem 1. Beweisschritt fertig.

Lassen wir also die Maus im Anfangszustand in Punkt 0 von \mathcal{L} loslaufen.

Da A niemals stehenbleibt und \mathcal{L} sowie die Zustandsmenge von A endlich sind, wird es dann einen Punkt in \mathcal{L} geben, den A irgendwann zum zweiten Mal im selben Zustand aufsucht, von wo an ihr Verhalten periodisch wird.

Sei also $\{(s_t, P_t)\}_{t \geq 0}$ das Verhalten von A in $(\mathcal{L}, 0)$ und $\omega : 0 = P_0 \xrightarrow{r_0} P_1 \xrightarrow{r_1} P_2 \rightarrow \dots$ der zurückgelegte Weg.

Da $\#(v) < \infty$ und $\#(S(A)) < \infty$, existiert $0 \leq i < k$ mit $(s_i, P_i) = (s_{i+k}, P_{i+k})$, d.h.

$(s_{i+l}, P_{i+l}) = (s_{i+l \bmod k}, P_{i+l \bmod k})$ für alle $l \geq 0$ (d.h. das Verhalten von A wird periodisch).

Wir wollen vereinbaren, daß wir von nun an mit p' immer die Markierung des Weges von P_0 nach P_i bezeichnen den die Maus zurücklegt, bevor ihr Verhalten periodisch wird und der zukünftig oft Vorlauf genannt wird, d.h. $p' = r_0 \dots r_{i-1}$ und mit q' die Markierung des wiederholt abgelaufenen Wegstücks von P_{i+1} bis P_{i+k} , d.h. $q' = r_i \dots r_{i+k-1}$.

p und q sollen dann immer für die zugehörigen reduzierten Markierungen stehen, d.h.

$$p := \text{red}(p')$$

$$q := \text{red}(q')$$

Wir können dann 2 Fälle unterscheiden je nachdem, ob das wiederholt abgelaufene Wegstück ein Testlauf ist oder nicht.

1. Fall: $q = \square$, d.h. $P_i \xrightarrow{q'} P_{i+k}$ ist Testlauf.

Beispiel:

$$p' = \text{ownswosn}\bar{w}_2o$$

$$q' = r_2r_3\bar{r}_3\bar{r}_2, \text{ wobei } (w_1 = r_1r_2 \dots r_n) \text{ mit } r_1 = 0 \text{ und } r_n = s.$$

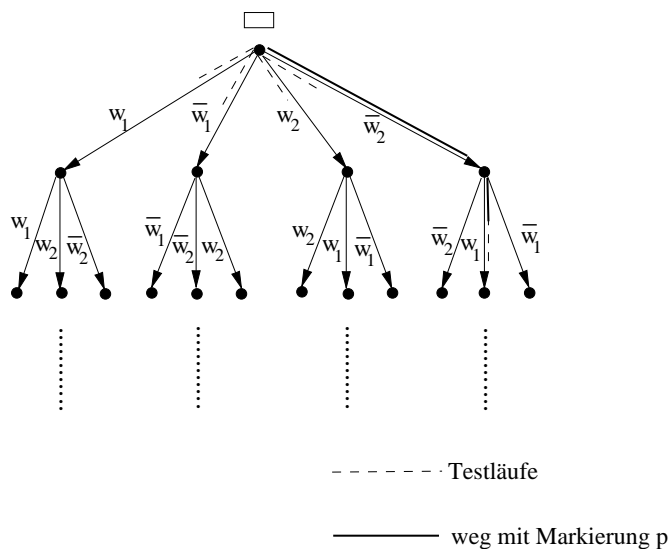
Reduzieren liefert

$$p = \bar{w}_2o \text{ und}$$

$$q = \square.$$

Wenn wir A dann vom Punkt \square aus in \mathcal{L}^\square schicken macht sie zunächst einen Schritt vor und wieder zurück in jeden wegführenden Gang hinein, läuft dann

den Gang mit Markierung \bar{w}_2 hinunter und dann noch einen Schritt weiter in den Gang mit Markierung w_1 hinein um dort für immer 2 Schritte vor und wieder zurück zu maschieren. D.h. aber der Träger ihres Wegs gestartet in \square bleibt endlich, obwohl unendlich viele Punkte erreichbar wären. Sie bewältigt die totale Abwicklung daher nicht.



Wenn das wiederholt abgelaufene Wegstück ein Testlauf ist, haben wir also mit der totalen Abwicklung stets ein Labyrinth, das A nicht bewältigt, da sie gestartet in \square abgesehen von endlich vielen endlich langen Testläufen nur den Weg mit Markierung p entlang läuft und daher insgesamt höchstens endlich viele Punkte besucht.

Allgemein gilt also: $q = \square \Rightarrow A$ bewältigt $(\mathcal{L}^\square, \square)$ nicht.

Damit kommen wir zum 2. Fall.

2. Fall: $q \neq \square$, d.h. $P_i \xrightarrow{q'} P_{i+k}$ ist kein Testlauf.

Beispiel:

$$p' = \text{ownswosn}\bar{w}_2\text{or}_2 \dots r_n = \text{ownswosn}\bar{w}_2w_1$$

$$q' = \text{oww}_2\text{or}_2 \dots r_n = \text{oww}_2w_1$$

Wir können dann ohne weiteres p' um $r_2 \dots r_n$ verlängern und q' um $n - 1$ Stellen nach links shiften, so daß wir die Markierungen

$$p' = \text{ownswosn}\bar{w}_2w_1 \text{ und} \\ q' = \text{oww}_2w_1$$

erhalten, die den Weg von A in \mathcal{L} genauso gut beschreiben, nur beginnt und endet das wiederholt abgelaufene Wegstück nunmehr im Startpunkt 0 von \mathcal{L} .

Diese Vorgehensweise ist im Fall $q \neq \square$ immer möglich, da der Punkt 0 dann unter den Punkten P_i, \dots, P_{i+k} notwendigerweise vorkommen muß, so daß wir durch geeignetes Verlängern von p' und Shiften von q' stets $P_i = 0$ erreichen können.

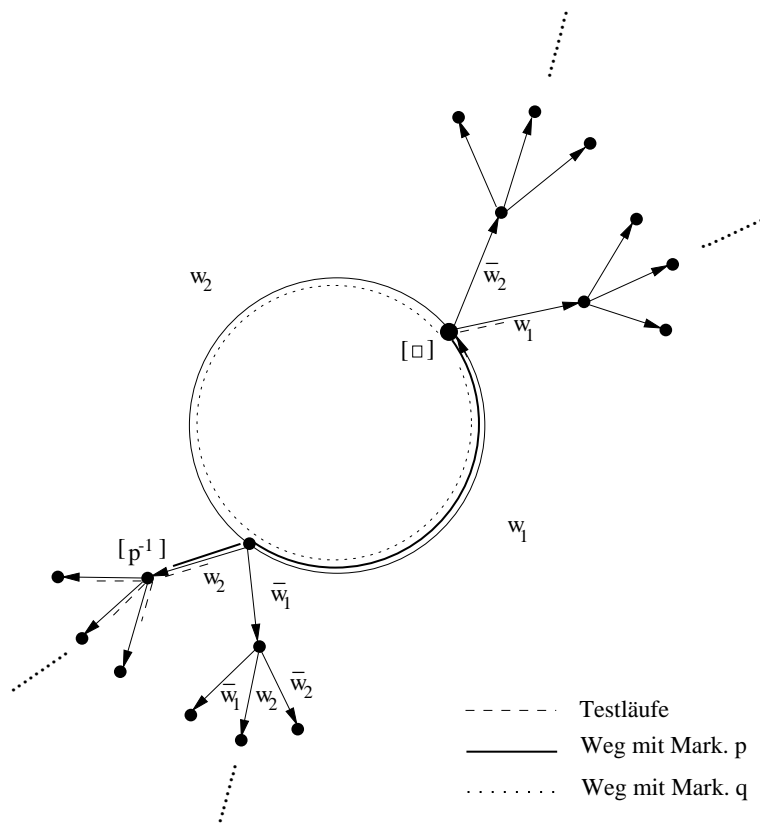
Reduzieren liefert nun

$$p = \bar{w}_2 w_1 \text{ und}$$

$$q = w_2 w_1$$

Wenn wir dann A im Punkt $[p^{-1}]$ der Abwicklung \mathcal{L}^q von $(\mathcal{L}, 0)$ starten, schaut sie wieder zuerst einmal in jeden Gang hinein, durchläuft dann den Gang mit Markierung w_2 in Gegenrichtung und anschließend den mit Markierung w_1 in Vorwärtsrichtung. Damit hat sie den Weg mit Markierung p' hinter sich gebracht und der mit Markierung q' beginnt. Sie geht dann zuerst einen Schritt nach Osten in den Gang mit Markierung w_1 hinein und gleich wieder zurück, um anschließend einmal durch den Kreis mit Markierung $w_2 w_1$ zu laufen. Damit ist sie wieder in Punkt $[\square]$ angekommen und die Wiederholung des Weges mit Markierung q' beginnt. Also wird ihr Verhalten auch in \mathcal{L}^q periodisch. Der Träger ihres Weges bleibt daher endlich und sie bewältigt das Labyrinth nicht.

\mathcal{L}^q



Wie im 1. Fall läßt sich das Beispiel wieder verallgemeinern. Wir stellen dazu folgendes fest:

Beobachtung:

$(\mathcal{L}^q, [p^{-1}])$ ist stets isomorph zu $(\mathcal{L}^{pqp^{-1}}, [\square])$. Da A nach Lemma 1 $(\mathcal{L}, 0)$ und $(\mathcal{L}^{pqp^{-1}}, [\square])$ nicht unterscheiden kann, kann sie daher $(\mathcal{L}, 0)$ und $(\mathcal{L}^q, [p^{-1}])$ auch nicht unterscheiden.

Wenn wir also die Maus im Fall $q \neq \square$ von Punkte $[p^{-1}]$ aus in die Abwicklung \mathcal{L}^q schicken, so geht sie abgesehen von endlich vielen Testläufen zuerst den Weg mit Markierung p entlang, um dann im Kreis mit Markierung q für immer zu rotieren.

Da aber auf dem Weg mit Markierung pq nur endlich viele Punkte liegen und sie durch die Testläufe ebenfalls nur endlich viele Punkte erreicht, bewältigt sie das Labyrinth \mathcal{L}^q nicht.

Allgemein gilt also: $q \neq \square \Rightarrow A$ bewältigt $(\mathcal{L}^q, [p^{-1}])$ nicht.

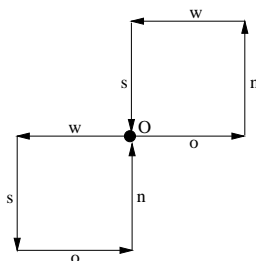
3 A-flexible Labyrinth

Damit haben wir zu jeder Maus eine Abwicklung des Doppelkreislabyrinths konstruiert, die sie nicht bewältigt. Diese Abwicklungen stellen sozusagen Mausefallen dar, die allerdings nicht planar sind. Der nächste Beweisschritt wird daher darin bestehen, diese Mausefallen so in die Ebene einzubetten, daß die Maus ihr Verhalten nicht wesentlich verändert, d.h. ohne daß der Träger ihres Weges dadurch unendlich wird.

Zuvor wollen wir aber noch vereinbaren, daß das Doppelkreislabyrinth \mathcal{L} , in dem eine Maus A zunächst beobachtet wird von nun an **A-Test** heißen soll. Dabei wird der Name der Maus vorangestellt, weil das Beobachtungslabyrinth zukünftig von der jeweils vorgegebenen Maus abhängen wird, was momentan aber noch nicht der Fall ist.

Gehen wir nun einmal vom einfachsten A-Test aus der möglich ist, nämlich diesem hier:

$(\mathcal{L}, 0)$



und nehmen an, daß

$p' = wsnoswn$ die Markierung des Vorlaufs und

$q' = osnw$ die Markierung des wiederholt abgelaufenen Wegstücks ist,

wenn sie im Anfangszustand im Punkt 0 von \mathcal{L} gestartet wird.

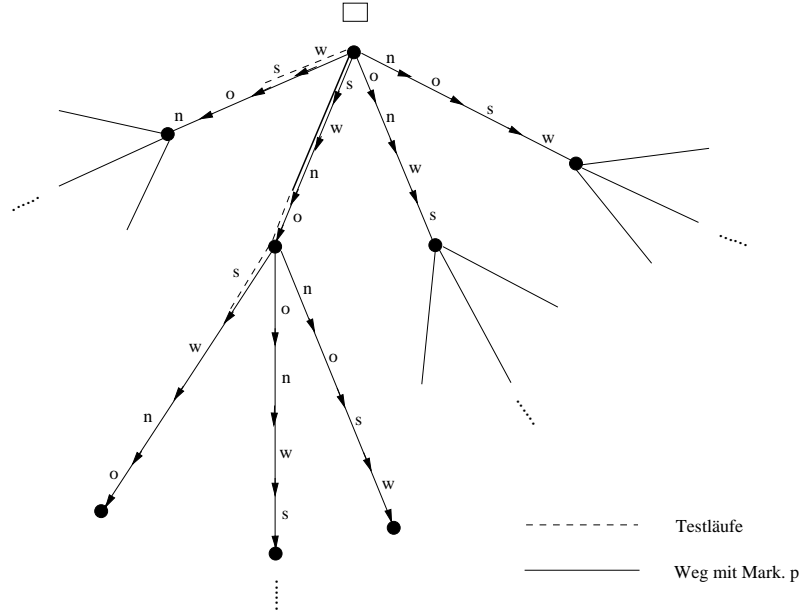
Reduzieren liefert dann:

$$p = red(p') = swn$$

$$q = red(q') = \square$$

so daß nach den vorangehenden Betrachtungen die totale Abwicklung von \mathcal{L} eine adäquate Mausefalle ist:

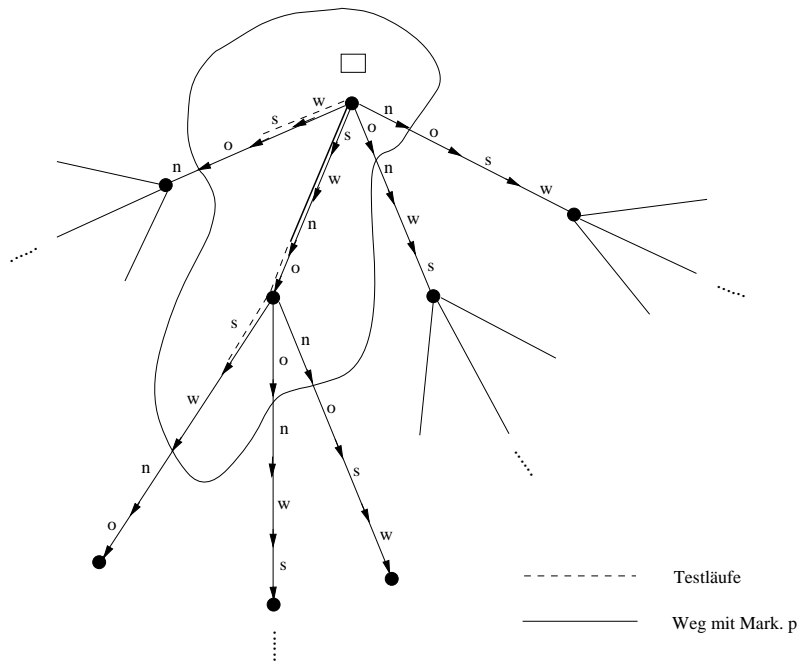
$(\mathcal{L}^\square, \square)$



Da die totale Abwicklung nicht planar ist, stellt sich die Frage, was wir tun können, um dem Ziel einer planaren Falle näher zu kommen?

Zunächst einmal brauchen wir ja gar nicht das komplette Labyrinth. Wir können hergehen und jeden Weg, der vom Ursprung wegführt an dem ersten erreichbaren Punkt kappen, den die Maus gerade nicht mehr besucht. Dann erhalten wir zwar zunächst ein endliches Labyrinth, uns stehen aber genügend viele Randpunkte zur Verfügung, die die Maus, deren Verhalten sich durch das Kappen der Wege ja nicht ändert, nicht besucht, und an denen wir nach der Einbettung des Labyrinths in die Ebene immer noch wieder unendlich viele Punkte anhängen können (genauer gesagt: fast alle Punkte aus der Ebene der ganzen Zahlen, da wir ja letztendlich ein Netzlabyrinth erreichen wollen, das einem Döppschen Labyrinth entspricht, und in diesem dürfen ja nur endlich viele Punkte markiert, also vom möglichen Betreten ausgenommen sein).

Von nun an wollen wir das endliche Unterlabyrinth von \mathcal{L}^\square , das den Weg von A sozusagen „ganz in seinem Inneren“ enthält, Fallenkandidat nennen und mit \mathcal{F} bezeichnen. Im Beispiel sieht \mathcal{F} wie folgt aus:



Zu einer sogenannten *A-Falle* wird ein solcher Fallenkandidat dann werden, wenn er sich in die Ebene einbetten läßt, ohne daß die Maus ihr Verhalten wesentlich verändert, und dann zu einem Netzlabyrinth ergänzen läßt.

Wir legen also fest:

Definition 3.1 Ist $\mathcal{L}^q = (V, E) (q \in R)$ Abwicklung vom *A-Test* \mathcal{L} , die *A* nicht bewältigt, so heißt ein Labyrinth $\mathcal{F} = (V', E')$ Fallenkandidat

$:\Leftrightarrow$

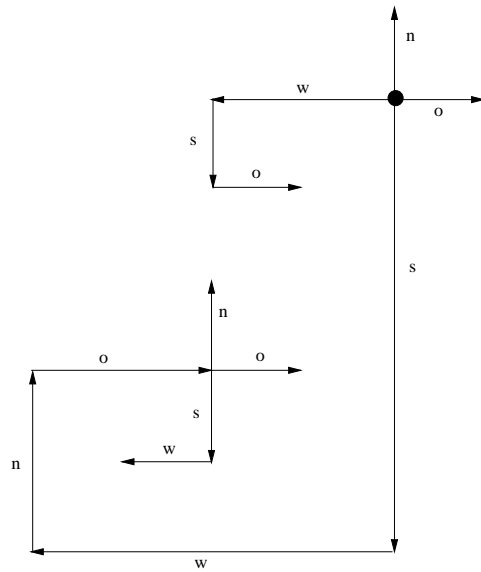
- (i) \mathcal{F} ist endliches Unterlabyrinth von \mathcal{L}^q .
- (ii) Ist $\{(s_t, P_t)\}_{t \geq 0}$ das Verhalten von *A* in $(\mathcal{L}^\square, \square)$ bzw. $(\mathcal{L}^q, [p^{-1}])$, so gilt

$$\text{a) } \{P_t / t \geq 0\} \cup \{Q / \exists t \geq 0 : P_t \xrightarrow{r} Q \in E\} \subseteq V'$$

es gehören also alle Punkte zu \mathcal{F} , die *A* besucht, und mindestens deren direkte Nachbarn und

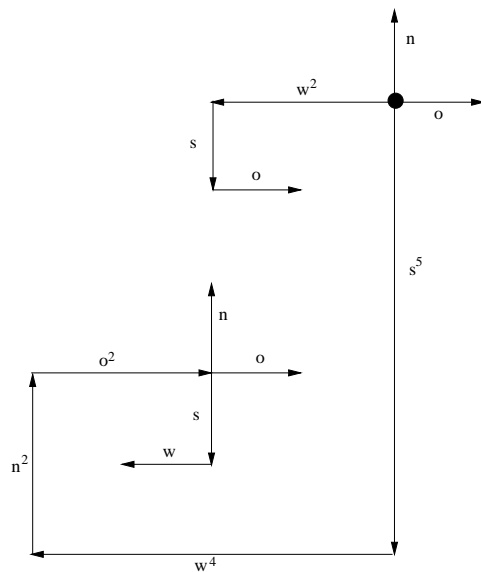
$$\text{b) } (V' \times D \times V') \cap E = E'$$

Wie sieht es nun mit der Planarität des Fallenkandidaten im Beispiel aus?



Wir stellen fest: der Fallenkandidat \mathcal{F} ist zwar so direkt nicht planar, kann aber eben gezeichnet werden, wenn wir die Kanten unterschiedlich lang malen. Damit kann \mathcal{F} aber auch in die Ebene der ganzen Zahlen eingebettet werden, da bei einem endlichen Labyrinth in diesem Fall stets erreicht werden kann, daß die Kantenlänge ganzzahlig ist. Wir sagen dann, „ \mathcal{F} kann durch Ausweitung seiner Kanten“ in die Ebene der ganzen Zahlen eingebettet werden.

Definitiv können wir den Begriff des Ausweitens so fassen, daß Kanten durch Prälabyrinthkanten ersetzt werden, deren Markierung durch Iteration der Ausgangsmarkierung entsteht. Im Beispiel hätten wir es dann mit folgendem Prälabyrinth $\hat{\mathcal{L}}$ zu tun:



Nun zur Definition des Begriffs Kantenausweitung:

Definition 3.2 Sei $\mathcal{L} = (V, E)$ ein Prälabyrinth, $(P, z, Q) \in E$ und $v \in R$ mit $f(v) = f(z)$ und $l(v) = l(z)$.

Dann sagen wir:

$\tilde{\mathcal{L}} = (V, E \setminus \{(P, z, Q), (Q, \bar{z}, P)\} \cup \{(P, v, Q), (Q, \bar{v}, P)\})$ entsteht aus \mathcal{L} durch **Substitution** von (P, z, Q) durch (P, v, Q) und schreiben: $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(P, z \vdash v, Q)$.

Das Ausweiten einer Prälabyrinthkante ist dann nichts anderes als eine spezielle Form der Substitution und zwar muß die Markierung v der neuen Kante durch Iteration von z entstehen, es muß also $v = z^k$ für irgendein k gelten. Da jede Prälabyrinthkante einem Gang im definierten Labyrinth entspricht, ist jedes Ausweiten einer Prälabyrinthkante gleichbedeutend mit dem Ausweiten eines Ganges im zugehörigen Labyrinth. Wir legen also fest:

Gilt $v = z^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so sagen wir

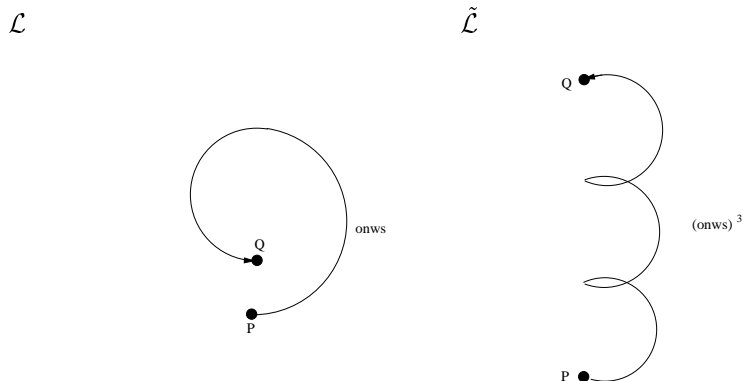
- (i) $\tilde{\mathcal{L}}$ entsteht aus \mathcal{L} durch **Ausweiten von Kante** (P, z, Q)
- (ii) $\tilde{\mathcal{L}}^*$ entsteht aus \mathcal{L}^* durch **Ausweiten von Gang** $P \xrightarrow{z} Q$
bzw. durch **Ausweiten von Kante** (P, z, Q) , falls $z \in D$

Dabei bezeichnen wir wie gehabt mit $\tilde{\mathcal{L}}^*$ und \mathcal{L}^* die durch die Prälabyrinth $\tilde{\mathcal{L}}$ und \mathcal{L} definierten Labyrinth.

Wenn wir im folgenden dann sagen, daß Prälabyrinth $\tilde{\mathcal{L}}$ aus \mathcal{L} durch Kantenausweitung entsteht, so meinen wir, daß es durch Ausweitung keiner, einer oder mehrerer Prälabyrinthkanten entsteht, wir meinen also die reflexive transitive Hülle der hier auf Prälabyrinth definierten Relation. Entsprechendes gilt für Gangausweitung bei Labyrinth.

Man beachte, daß die Definition viel allgemeiner gehalten ist, als wir sie im Beispiel gebraucht haben. In der Markierung z der auszuweitenden Prälabyrinthkante können nämlich verschiedene Richtungen auftreten. Folglich bezieht die Definition nicht nur mit ein, daß im definierten Labyrinth einzelne Kanten oder gerade Gänge ausgeweitet werden können, sondern auch solche, in denen Windungen vorkommen.

Betrachten wir dazu die beiden folgenden Prälabyrinth \mathcal{L} und $\tilde{\mathcal{L}}$



Auch hier würden wir laut unserer Definition sagen, daß $\tilde{\mathcal{L}}$ aus \mathcal{L} durch Kantenausweitung bzw. daß das Labyrinth $\tilde{\mathcal{L}}^*$ aus \mathcal{L}^* durch Gangausweitung entsteht.

Damit können wir zu unserem Ausgangsproblem, nämlich der Konstruktion planarer Mausefallen zurückkehren.

Wir hatten bereits gesehen, daß der Fallenkandidat \mathcal{F} im Beispiel durch Ausweiten seiner – in diesem Fall – Kanten (= Gänge der Länge 1) in die Ebene der ganzen Zahlen eingebettet werden kann. Bezeichnen wir den planarisierten Fallenkandidat einmal mit \mathcal{L}' , d.h. $\hat{\mathcal{L}}^* = \mathcal{L}'$.

Nachdem das Planaritätsproblem aus dem Weg geschafft ist, tritt nun sofort ein neues Problem auf: da \mathcal{L}' von \mathcal{F} verschieden ist, kann es sein, daß sich die Maus in \mathcal{L}' anders verhält als in \mathcal{F} und alle Punkte besucht, so daß wir keine Freistelle mehr zur Verfügung haben, an der wir das Labyrinth zu einem Netzlabyrinth ergänzen können, ohne die Maus dadurch erneut zu beeinflussen.

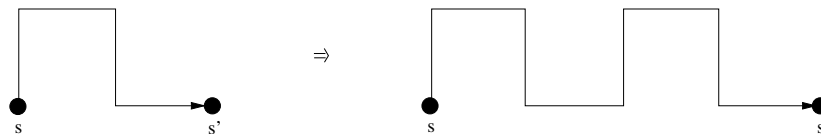
Bevor wir diese Problem lösen, ist es allerdings zweckmäßig präzise zu formulieren, was wir erreichen wollen:

wir haben einen Fallenkandidaten gegeben, das ist ein endlicher Ausschnitt aus einer Abwicklung, die die Maus nicht bewältigt und der ihren Weg ganz in seinem Inneren enthält, d.h. Randpunkte, von denen nur eine Kante ausgeht, werden nicht besucht.

Damit aus diesem Fallenkandidaten ein fangendes Netzlabyrinth wird, muß er so wie im Beispiel durch Ausweitung seiner Kanten oder allgemeiner eventuell auch durch Ausweitung seiner Gänge in die Ebene einbettbar sein, aber damit nicht genug.

Diese Einbettung soll auf eine Weise möglich sein, daß die Maus dadurch nicht wesentlich beeinflußt wird, d.h. ihr Verhalten im ausgeweiteten Labyrinth soll ihrem Verhalten im Fallenkandidaten ähneln. Wenn also beispielsweise eine Kante zu einem geraden Gang ausgeweitet wird und die Maus die Kante vorher durchlaufen hat, so soll sie anschließend stattdessen den Gang durchlaufen und dabei in seinen Endpunkten die gleichen Zustände annehmen wie vorher in Anfangs- und Endpunkte der Kante.

Das gleiche gilt, wenn ein Gang z.B. dieser hier ausgeweitet wird.



Wenn A den Gang zuvor durchlaufen hat und dabei von Zustand s in Zustand s' überging, so soll sie auch den neuen Gang durchlaufen und dabei ebenfalls von s nach s' übergehen. Wie sie sich im Inneren des Ganges verhält, spielt keine Rolle.

Wenn wir also im ausgeweiteten Labyrinth alle Punkte fixieren, die auch im Ausgangslabyrinth auftreten und nur in diesen Punkten Posten aufstellen, die die Maus beobachten, so soll das beobachtete Verhalten mit dem im Ausgangslabyrinth übereinstimmen. Da die fixierten Punkte ein Prälabrynth definieren,

können wir das Verhalten von A , das die in diesen Punkten aufgestellten Posten beobachten, als Prälabyrinthverhalten wie folgt definieren:

Definition 3.3 Sei $\tilde{\mathcal{L}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ ein Prälabyrinth mit Anfangspunkt P_0 und $\tilde{\mathcal{L}}^* = \mathcal{L}$ das definierte Labyrinth. Sei $\{(s_t, P_t)\}_{t \geq 0}$ das Verhalten von A in (\mathcal{L}, P_0) .

Definiere:

$$h(s_t, P_t) = \begin{cases} (s_{t_0}, P_{t_0}), & \text{falls } t_0 = \min\{t' > t/P_{t'} \in \tilde{V}\} \\ \text{nicht definiert,} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die Folge $\{(h^t(s_0, P_0))\}_{t \geq 0}$ das **Verhalten** von A in $(\tilde{\mathcal{L}}, P_0)$.

Bemerkung:

da $h(s_t, P_t)$ für ein t nicht definiert sein kann, ist es möglich, daß das Prälabyrinthverhalten von A endlich ist, nämlich dann wenn die Maus auf Nimmerwiedersehen in einem Gang verschwindet, in dem keine Beobachtungsposten aufgestellt sind, in dem also keine Prälabyrinthpunkte vorkommen.

Wir wollen präzisieren, daß der Fallenkandidat so durch Ausweiten seiner Kanten oder Gänge in die Ebene einbettbar sein soll, daß die Maus dadurch nicht wesentlich beeinflusst wird und das können wir jetzt formulieren, indem wir sagen, daß ihr Verhalten im Prälabyrinth, das durch die Ausweitung entsteht mit dem im Ausgangslabyrinth bzw. allgemeiner mit dem im Ausgangsprälabyrinth, übereinstimmt.

Ein Prälabyrinth, das diese Eigenschaft besitzt, wollen wir von nun an zum Ausgangslabyrinth „ A -treu“ nennen.

Definition 3.4 Seien $\mathcal{L} = (V, E)$, $\tilde{\mathcal{L}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ Prälabyrinthe. Dann heißt $\tilde{\mathcal{L}}$ **A -treu** zu \mathcal{L} (Schreibweise $\mathcal{L} \triangleleft_A \tilde{\mathcal{L}}$).

⇔

- (i) $\tilde{\mathcal{L}}$ entsteht aus \mathcal{L} durch Kantenausweitung
- (ii) $\forall s \in S(A), P \in \tilde{V}$: das Verhalten von A_s in (\mathcal{L}, P) und in $(\tilde{\mathcal{L}}, P)$ stimmt überein. (dabei ist A_s die Maus A aber mit Startzustand s)

Damit können wir genauer sagen, was wir erreichen wollen:

Wir wollen Fallenkandidaten \mathcal{F} konstruieren, die durch Prälabyrinthe definiert werden, zu denen A -treue planare Prälabyrinthe existieren.

Wir sagen dann: \mathcal{F} ist verhaltenstreu in die Ebene einbettbar und meinen, daß \mathcal{F} durch Ausweitung seiner Kanten oder Gänge so in die Ebene eingebettet werden kann, daß die Maus ihr Verhalten nicht wesentlich verändert, d.h. wenn wir A vor und nach der Ausweitung nur in den Punkten beobachten, die nicht im Inneren eines Ganges liegen, der ausgeweitet wird bzw. wurde, stellen wir beidesmal dasselbe Verhalten fest.

Nun wird das Prälabyrinth $\hat{\mathcal{L}}$ aus unserem laufenden Beispiel wie schon gesagt sicherlich nicht die Eigenschaft haben zum Fallenkandidaten \mathcal{F} A -treu zu sein. Es entsteht zwar daraus durch Kantenausweitung aber nur eine „dumme“ Maus wird nichts davon bemerken und in $\hat{\mathcal{L}}$ dasselbe Verhalten zeigen wie in \mathcal{F} . Wir müssen nämlich davon ausgehen, daß eine vorgegebene Maus sehr wohl unterscheiden kann, ob eine Kante einmal oder zweimal in dieselbe Richtung führt, da sie in ihrem endlichen Gedächtnis ja endlich weit zählen kann.

Wie sieht es aber aus, wenn ein Gang aus 1000 Südkanten zu einem Gang aus 2000 Südkanten ausgeweitet wird oder, falls A das noch unterscheiden kann, ein Gang aus 10000 Südkanten zu einem Gang aus 20000 Südkanten. Da eine Maus aufgrund ihres endlichen Gedächtnis immer nur ein modulo-Zähler ist, wird sie für eine hinreichend große Zahl x nicht mehr unterscheiden können, ob sie x mal oder $2x$ mal oder $3x$ mal in dieselbe Richtung gelaufen ist.

Im Folgenden wollen wir uns davon überzeugen, daß diese Vermutung zutrifft, indem wir folgendes Lemma beweisen:

Lemma 3.1 Für jede Maus A gilt:

$$\forall r \in D \exists \alpha(r) \in \mathbb{N} \forall \mathcal{L} = (V, E) \text{ Prälabyrinth } \forall (P, r^{\alpha(r)}, Q) \in E \forall t \in \mathbb{N} : \mathcal{L} \triangleleft_A \mathcal{L}(P, r^{\alpha(r)} \vdash r^{t \cdot \alpha(r)}, Q)$$

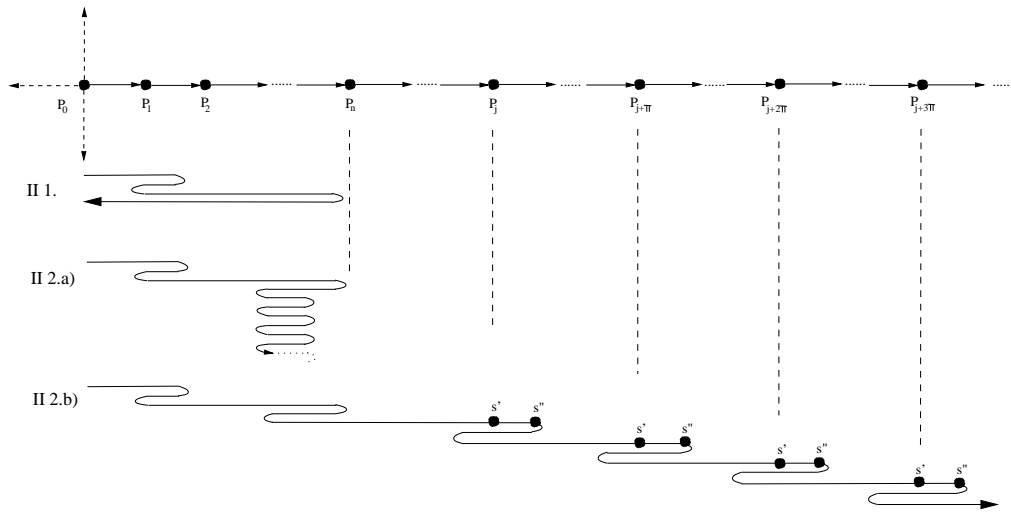
D.h. die Ausweitung von Labyrinthgängen, die $\alpha(r)$ mal in Richtung r führen, hat auf das Verhalten der Maus keinen wesentlichen Einfluß. Es ändert sich höchstens im Inneren der Gänge, beobachtet in den übrigen Punkten bleibt es gleich.

Beweis:

Sei A Maus und $r \in D$. Dann erhält man die Zahl $\alpha(r)$, indem man A ausgehend von Zustand s und Punkt P_0 , der irgendeine beliebige Wertigkeit hat, in einen Gang hineinschickt, der beliebig weit in eine feste Richtung r führt, und beobachtet, wie sie sich verhält.

Bezeichnen wir dazu dieses Labyrinth, das abgesehen von 1, 2, 3 oder 4 von P_0 ausgehenden Kanten nur aus diesem einen Gang besteht mit \mathcal{L}_r .

$$\mathcal{L}_r \quad (r \in D, \quad val(P_0) \text{ beliebig fest})$$



Sei $\{(s_t, Q_t)\}_{t \geq 0}$ das Verhalten von A_s in (\mathcal{L}_r, P_0) . Dann können wir folgende Fälle unterscheiden:

I. Fall:

A_s geht nicht in den Gang, d.h. $Q_1 \neq P_1$.

II. Fall:

A_s geht in den Gang, d.h. $Q_1 = P_1$ und

1. Kehrt irgendwann nach P_0 zurück, d.h. $\exists i > 0 : Q_i = P_0$
oder
2. Kehrt nie mehr nach P_0 zurück, d.h. $\forall i > 0 : Q_i \neq P_0$
In diesem Fall können wir erneut zwei Fälle unterscheiden und zwar kann sie
 - a) nur endlich tief in den Gang hineinlaufen
oder
 - b) sich beliebig weit vom Startpunkt P_0 entfernen.

Betrachten wir zuerst den Fall:

2. a) d.h. $\exists n \forall t \geq n : Q_t \in \{P_0, \dots, P_n\}$

In diesem Fall, wenn die Maus also maximal bis Punkt P_n vorläuft, muß ihr Verhalten aufgrund der Endlichkeit der Zustandsmenge und der Menge der besuchten Punkte periodisch werden. Da sie weder nach P_0 zurückläuft noch P_n überschreitet, heißt das, daß sie zwischen P_0 und P_{n+1} irgend einen Testlauf für immer wiederholt.

Der interessanteste Fall ist sicherlich der Fall:

2. a) wenn also gilt: $\forall \exists t > n : Q_t \notin \{P_0, \dots, P_n\}$.

Das bedeutet, daß A_s jeden Punkt im Gang irgendwann einmal besucht.

$$\Rightarrow \{Q_i/i \geq 0\} = \{P_i/i \geq 0\}$$

Wir können daher jedem Punkt im Gang die Nummer des Schrittes von A_s zuordnen, in dem sie ihn zum ersten Mal betritt:

$$\text{sei } h(t) = \min\{j/Q_j = P_t\}$$

Die Funktion h ist streng monoton wachsend, da die Maus keinen Punkt im Gang besuchen kann, ohne zuvor an jedem Vorgänger vorbeigekommen zu sein.

$s_{h(t)}$ ist dann der Zustand, den A_s annimmt, wenn sie Punkt P_t zum ersten Mal betritt.

Die weitere Argumentation basiert nun wieder auf der Endlichkeit der Zustandsmenge.

Da die Maus nun endlich viele Zustände hat, aber beliebig viele Punkte besucht, wird es zwei verschiedene Punkte geben, so daß sie im selben Zustand ist, wenn sie sie zum ersten Mal aufsucht, d.h.

$$\exists j, \pi \in \mathbf{N} : s_{h(j)} = s_{h(j+\pi)} = s'$$

Da $val(P_i) = val(P_1)$ ($i \geq 1$) haben die Wege von A_s ab Schritt $h(j)$ und Schritt $h(j + \pi)$ dieselbe Markierung und die Zustandsfolgen stimmen überein. Daraus folgt (*) $\forall \lambda \in \mathbf{N}_0 : s_{h(j+\lambda)} = s_{h(j+\lambda \bmod \pi)}$

D.h. daß die Maus nicht nur beim ersten Besuch der Punkte $P_j, P_{j+\pi}, P_{j+2\pi}, \dots$ usw. im selben Zustand ist, sondern daß das Gleiche auch für alle dazwischenliegenden Punkte gesagt werden kann, sofern sie von $P_j, P_{j+\pi}, P_{j+2\pi} \dots$ nur gleichweit entfernt liegen.

Wenn wir dann λ_0 so wählen, daß $j + \lambda_0$ ein Vielfaches von π ist, d.h. daß $j + \lambda_0 = k_0\pi$ für ein $k_0 \in \mathbf{N}$ gilt, erhalten wir aus (*) schließlich

$$\forall k \in \mathbf{N}_0 : s_{h(j+\lambda_0)} = s_{h(k_0\pi)} = s_{h((k_0+k)\pi)}$$

Insbesondere gilt das dann auch für $k = k_0, 2k_0, 3k_0, \dots$ usw., so daß A_s im selben Zustand ist, wenn sie die Punkte $P_{k_0\pi}, P_{2k_0\pi}, P_{3k_0\pi}$ usw. zum ersten Mal betritt.

Wenn also der in Richtung r laufende Gang, in den wir A ausgehend von Punkt P_0 und Zustand s schicken, nunmehr nur endliche Länge hat, so ist es gleichgültig, ob er Länge $k_0\pi, 2k_0\pi$ oder $3k_0\pi, \dots$ usw. hat. A wird das andere Ende stets im selben Zustand erreichen.

Fassen wir nun alle Fälle zusammen. Da das Verhalten von A im Gang nur vom Startzustand der Gangrichtung und der Wertigkeit von P_0 abhängt, können wir eine Funktion $t(s, r, val(P_0))$ wie folgt definieren:

$$t(s, r, val(P_0)) = \begin{cases} 1, & \text{im Fall I.} \\ \max\{n/Q_t = P_n \text{ für ein } t \geq 0\} + 1, & \text{im Fall II.1 + 2a)} \\ k_0\pi, & \text{im Fall II.2b)} \end{cases}$$

Wenn dann eine Maus in einem Labyrinth ausgehend von Zustand s und Punkt P_0 einen in Richtung r laufenden endlichen Gang betritt, so wird sie stets im selben Zustand wieder bei P_0 bzw. am entgegengesetzten Gangende herauskommen, unabhängig davon ob der Gang die Länge $t(s, r, \text{val}(P_0))$ hat oder ein Vielfaches davon.

Um den Beweis des Lemmas zu vervollständigen müssen wir jetzt nur noch berücksichtigen, daß in einem Labyrinth der Startpunkt eines endlichen in Richtung r verlaufenden Ganges eine beliebige Wertigkeit haben kann, die Maus ihn in einem beliebigen Zustand erreichen kann und nicht zuletzt, daß die Maus den Gang auch vom Gangende her betreten kann. Für all diese Fälle stellen wir entsprechende Beobachtungen an und bilden dann das kgV aller erhaltenen Funktionswerte von t . D.h. wir bilden

$$kgV(\{t(s, r, M)/s \in S(A), M \in P'(D) \text{ und } r \in M\} \cup \{t(s, \bar{r}, M)/s \in S(A), M \in P'(D) \text{ und } r \in M\}) = \alpha(r)$$

Das ist dann die gesuchte Größe $\alpha(r)$, so daß die Ausweitung von Gängen in einem Labyrinth, die $\alpha(r)$ mal in Richtung r laufen auf das Verhalten der Maus höchstens im Inneren der Gänge einen Einfluß hat. Bezogen auf die Endpunkte bleibt es unverändert. ■

Kehren wir nun wieder zu unserem laufenden Beispiel zurück. Einzelne Labyrinthkanten können wir nicht ausweiten, ohne daß die Maus ihr Verhalten wesentlich verändert, dafür aber hinreichend lange geradlinige Gänge. Nun sind wir aber keineswegs darauf festgelegt, daß der A -Test – also das Testlabyrinth \mathcal{L} , in dem die Maus zunächst beobachtet wird – die im Beispiel angegebene Form haben muß.

Wir können ohne Weiteres hergehen und jede Kante in Richtung r durch einen Gang, der $\alpha(r)$ mal in Richtung r führt, ersetzen. In der Abwicklung, die A nicht bewältigt, und damit auch im Fallenkandidaten führen dann ebenfalls statt einzelner Kanten entsprechend lange Gänge in jede Richtung und diese können ausgeweitet werden, ohne die Maus wesentlich zu beeinflussen.

Um uns dabei unabhängig von der Richtung zu machen, in der ein Gang verläuft, gehen wir her und bilden noch einmal das kgV und zwar aller $\alpha(r)$ für $r = n, s, o, w$.

$$\text{Sei } t_A = kgV\{\alpha(n), \alpha(s), \alpha(w), \alpha(o)\}$$

Setzen wir dann:

$$\begin{array}{ll} n_A = n^{t_A} & w_A = w^{t_A} \\ s_A = s^{t_A} & o_A = o^{t_A}, \end{array}$$

so können wir in jedem Prälabrynth Kanten, die eine dieser Markierungen aufweisen, beliebig ausweiten, es kommt immer wieder ein A -treues Prälabrynth heraus, in dem A dasselbe Verhalten zeigt.

Ein Prälabrynth, dessen sämtliche Kanten nur diese Markierungen aufweisen, wollen wir von nun an A -flexibel nennen und diese Bezeichnung auch auf das definierte Labyrinth übertragen.

Definition 3.5 Ein Prälabrynth $\tilde{\mathcal{L}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ heißt A -flexibel $:\Leftrightarrow \forall (P, Z, Q) \in$

$\tilde{E} : Z \in \{n_A, s_A, w_A, o_A\}$.

Ein Labyrinth \mathcal{L} heißt **A -flexibel** $:\Leftrightarrow \exists$ Prälabyrinth $\tilde{\mathcal{L}} : \tilde{\mathcal{L}}$ A -flexibel und $\tilde{\mathcal{L}}^* = \mathcal{L}$.

In einem A -flexiblen Labyrinth führen mit jeder Kante gleich t_A Kanten in dieselbe Richtung. Die Bezeichnung A -flexibel soll verdeutlichen, daß man jeden solchen Gang beliebig ausweiten kann, ohne daß die Maus ihr Verhalten wesentlich verändert.

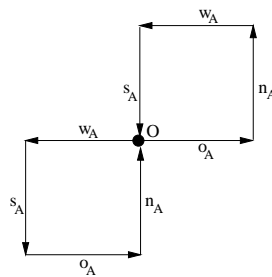
Beobachtung:

Ist $\mathcal{L} = (V, E)$ ein A -flexibles Prälabyrinth und $\tilde{\mathcal{L}}$ entsteht aus \mathcal{L} durch Kantenausweitung so gilt $\mathcal{L} \triangleleft_A \tilde{\mathcal{L}}$

Zurück zum Beispiel:

Machen wir den A -Test nunmehr A -flexibel, indem wir jede Kante t_A mal wiederholen und lassen A im Anfangszustand von Punkt 0 loslaufen.

\mathcal{L}



Nehmen wir dabei der Einfachheit halber an, daß der Weg von A in \mathcal{L} ganz ähnlich aussieht wie vorher, d.h. daß

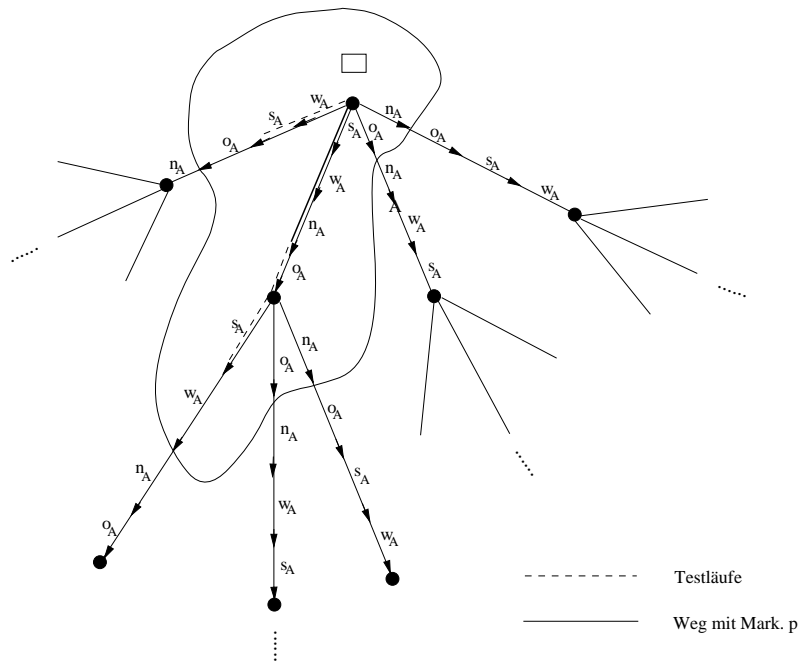
$p' = w_A s_A o_A w_A n_A o_A s_A w_A n_A$ die Markierung des Vorlaufs und

$q' = o_A s_A n_A w_A$ die Markierung des wiederholt abgelaufenen Wegstücks ist.

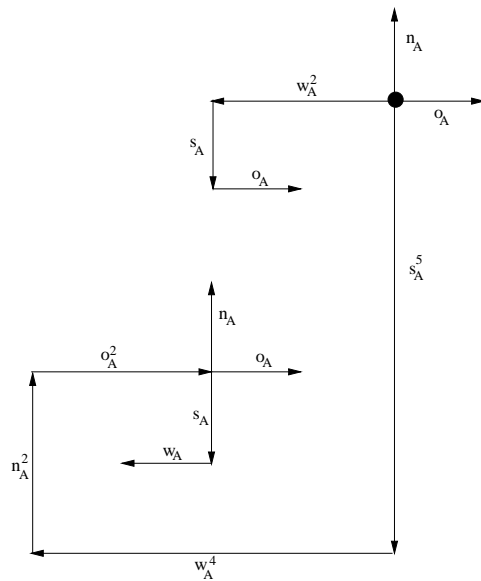
Reduzieren liefert:

- $p = red(p') = s_A w_A n_A$ und
- $q = red(q') = \square$

Da $q = \square$ ist, d.h. daß periodische Verhalten von A in einem Testlauf besteht, schicken wir A wieder in die totale Abwicklung, wo sie nur endlich viele Punkte besucht, so daß wir durch Kappen der stets wieder einen endlichen Falkenkandidaten \mathcal{F} erhalten, der den Weg von A ganz in seinem Inneren enthält, d.h. Randpunkte bleiben unbesucht. Dabei kann das Kappen der ste so vorgenommen werden, daß \mathcal{F} genauso wie der A -Test A -flexibel ist, d.h. durch ein A -flexibles Prälabyrinth definiert wird.



Diesen Fallenkandidaten können wir nun auf genau dieselbe Weise in die Ebene einbetten wie den Fallenkandidaten im vorangehenden Beispiel nur werden jetzt statt einzelner Kanten Prälabyrinthkanten mit Markierung s_A, n_A, w_A oder o_A ausgeweitet, wodurch die Maus nicht wesentlich beeinflusst wird, d.h. A läßt die Randpunkte weiterhin unbesucht. Damit ist es uns gelungen, den Fallenkandidaten verhaltenstreu in die Ebene einzubetten.



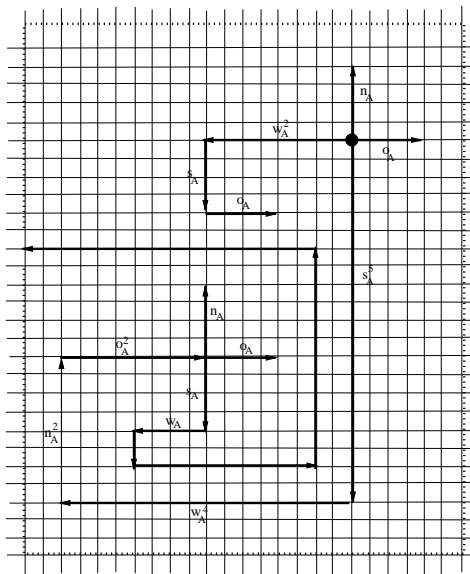
Ziel ist, ein Labyrinth im Döppschen Sinn zu konstruieren, das von der Maus nicht bewältigt wird. Dabei können wir o.B.d.A. davon ausgehen, daß $t_A \geq 4$ ist.

Dann können wir hergehen und

1. um das verhaltenstreu eingebettete Labyrinth einen Rahmen aus markierten Punkten legen, wobei ein Punkt als Ausgang freibleibt,
2. einen „außerhalb aller Kreise liegenden“ Randpunkt P durch einen Weg mit dem Ausgang verbinden, der an jedem Labyrinthpunkt ungleich P im Mindestabstand 2 vorbeiführt und schließlich
3. alle Punkte im Inneren des Rahmens, die weder zum Labyrinth noch zum neuen Weg gehören, markieren.

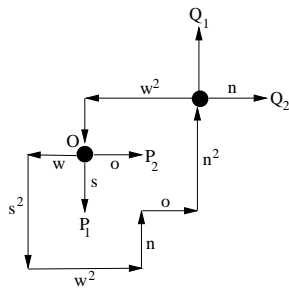
Die Menge der markierten Punkte definiert dann ein Netzlabyrinth, das A nicht bewältigt, weil sie gestartet in dem Punkt auf den der Punkt \square aus \mathcal{F} bei der Einbettung in die Ebene fällt, nie zum Ausgang findet.

Nehmen wir an, daß im Beispiel $t_A = 4$ gilt, so erhalten wir folgendes Netzlabyrinth:



Was mit einem „außerhalb aller Kreise liegenden“ Randpunkt gemeint ist, ist für planare Labyrinth sicherlich klar. Im Beispiel gibt es ohnehin keine Kreise.

Ein Randpunkt ist ein Punkt von dem nur eine Kante wegführt, d.h. P ist **Randpunkt** von $\mathcal{L} = (V, E) : \Leftrightarrow \#(val(P)) = 1$ und im Beispiel



würden wir sagen:

P_1, P_2 liegen innerhalb und Q_1, Q_2 liegen außerhalb von $0 \xrightarrow{ws^2w^2non^2w^2s} 0$.

Eine Definition des Begriffs, die auch nicht planare Labyrinth mit einbezieht, wird später angegeben werden.

4 Fallenkonstruktion I

Da wir aus jedem A -flexiblen und verhaltenstreu planarisierbaren Fallenkandidaten, bei dem nach der Einebnung mindestens ein außerhalb aller Kreise liegender Randpunkt existiert, in derselben Weise ein Netzlabyrinth konstruieren können, das die Maus nicht bewältigt, indem wir ihn zuerst in die Ebene einbetten, ohne daß die Maus ihr Verhalten wesentlich ändert, und ihn dann wie beschrieben in ein fangendes Netzlabyrinth verwandeln, wollen wir Fallenkandidaten, die diese Eigenschaft besitzen, von nun an als A -Falle bezeichnen:

Ein Fallenkandidat \mathcal{F} heißt A -Falle

$:\Leftrightarrow$

- (i) \mathcal{F} ist A -flexibel und verhaltenstreu planarisierbar,
- (ii) nach der Einebnung existiert ein außerhalb aller Kreise liegender Randpunkt.

Aus jeder A -Falle \mathcal{F} kann dann ein fangendes Netzlabyrinth konstruiert werden, indem

1. \mathcal{F} verhaltenstreu in die Ebene eingebettet wird,
2. das entsprechende Netzlabyrinth wie angegeben konstruiert wird.

In unserem Beispiel stellt der Fallenkandidat also eine A -Falle dar und wir sind fertig. Aber nicht nur in diesem ganz speziellen Fall:

Jeder A -flexible und baumförmige Fallenkandidat ist eine A -Falle, da er durch Ausweitung seiner A -flexiblen Gänge verhaltenstreu in die Ebene eingebettet werden kann und dann einen außerhalb aller Kreise liegenden Randpunkt besitzt - weil es nämlich gar keine Kreise gibt. Und da sich immer dann, wenn das wiederholt abgelaufene Wegstück im A -Test ein Testlauf ist, endliche Bäume als Fallenkandidaten ergeben, haben wir all diese Fälle bereits erledigt. Halten wir also fest:

Beobachtung:

\mathcal{F} A -flexibler endlicher Baum $\Rightarrow \mathcal{F}$ A -Falle.

Dabei bezeichnen wir ein Labyrinth $\mathcal{L} = (V, E)$ als **Baum**, wenn der durch \mathcal{L} definierte Graph $G = (V, \{(P, Q) / \exists r \in D : (P, r, Q) \in E\})$ ein Baum ist.

Um die oben angegebene Beobachtung im Einzelnen zu begründen, stellen wir zunächst fest, daß jeder endliche Baum durch Ausweitung seiner Kanten in die Ebene eingebettet werden kann. Da wir an dieser Stelle ausschließlich von Labyrinth und nicht von Prälabyrinth sprechen, bedeutet Kantenausweitung die Ausweitung einzelner Kanten und nicht von ganzen Gängen, in denen möglicherweise Windungen vorkommen. Ein Labyrinth, das in dieser Weise in die Ebene einbettbar ist, soll von nun an quasiplanar heißen:

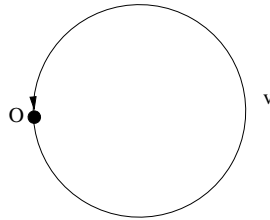
Ein Labyrinth \mathcal{L} heißt **quasiplanar**

$:\Leftrightarrow$

\mathcal{L} kann durch Ausweitung seiner Kanten in die Ebenen eingebettet werden.

Da dieser Begriff für alles Weitere von grundlegender Bedeutung ist, wollen wir einige Beispiele dazu betrachten.

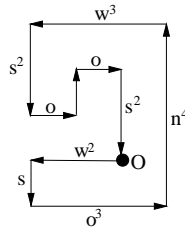
Sei \mathcal{C}_v das Kreislabyrinth



mit Anfangspunkt 0 und $v \in R$.

1. $v = (wson)^2os$

In diesem Fall ist \mathcal{C}_v quasiplanar, weil es durch Ausweitung einzelner Kanten folgendermaßen in die Ebene eingebettet werden kann:

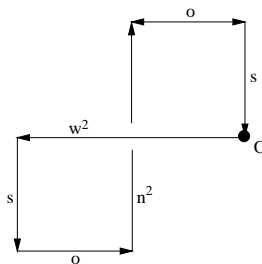


Wenn nun

2. $v = wsonos$

gewählt wird, so ist durch Kantenausweitung hier keine Planarität erreichbar.

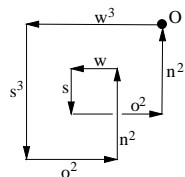
In diesem Fall ist \mathcal{C}_v also nicht quasiplanar, es kann aber immerhin noch durch Ausweitung von Gängen in die Ebene eingebettet werden. Dazu brauchen wir den Gang mit Markierung $wson$ nur zu verdoppeln und können dann wie in 1. verfahren.



Wenn wir nun schließlich

$$3. v = (wson)^2$$

wählen, kann \mathcal{C}_v weder durch Ausweitung von Kanten noch von Gängen in die Ebene eingebettet werden.



Bei endlichen Labyrinthen bedeutet Quasiplanarität also, daß wir sie eben zeichnen können, wenn wir die Kanten unterschiedlich lang malen.

Warum ist für uns nun die Beobachtung, daß jeder endliche Baum auch Ausweitung seiner Kanten planiert wrden kann und damit quasiplanar ist (\rightarrow eintragen in Beobachtung) überhaupt von Interesse?

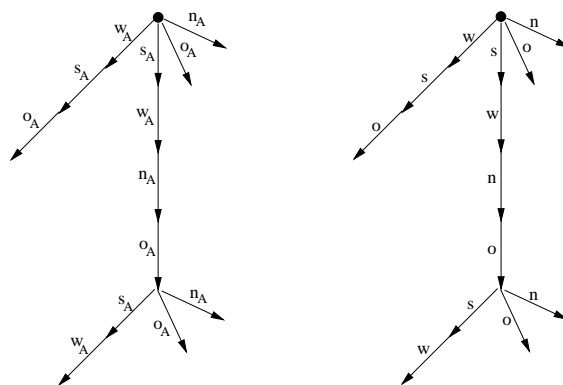
Mit der Ausweitung einzelner Kanten kommen wir doch sowieso nicht zum Ziel, weil wir ja um die Maus nicht entscheidend zu stören nur hinreichend lange gerade Gänge ausweiten dürfen.

Was hat die Quasiplanarität von endlichen Bäumen also damit zu tun, daß der Fallenkandidat in diesem Fall stets auch eine A -Falle ist?

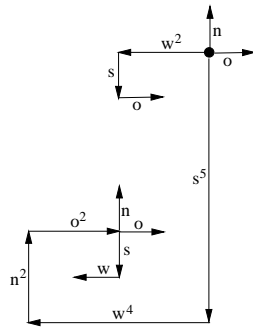
Wir können ja hergehen und den Fallenkandidaten zusammenschnurren lassen, indem wir die A -flexiblen Gänge in die er sich zerlegen läßt – so wie hier im Beispiel – auf einzelne Kanten einschrumpfen.

\mathcal{F}

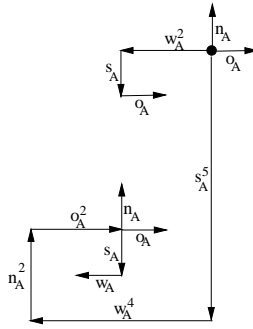
$Ret(\mathcal{F})$



Dieses Labyrinth wird als Retrakt $Ret(\mathcal{F})$ des Fallenkandidaten bezeichnet. Der Retrakt ist ebenfalls ein Baum und kann wie wir uns gerade überlegt haben durch Kantenausweitung in die Ebene eingebettet werden:



In diesem planaren Labyrinth müssen wir dann nur noch jede Kante wieder rückwärts zu einem entsprechenden A -flexiblen Gang ausweiten.



und schon ist der Fallenkandidat in die Ebene eingebettet und zwar verhaltenstreu, weil ja jede Ausweitung einer einzelnen Kante im Retrakt, der Ausweitung eines A -flexiblen Gangs im Fallenkandidaten entspricht. Während also der Retrakt durch Ausweitung von Kanten in die Ebene eingebettet wird, wird der Fallenkandidat durch Ausweitung von geraden Gängen in die Ebene eingebettet, und dieses Einbettung erfolgt verhaltenstreu, weil die Ausweitung von A -flexiblen Gängen auf das Verhalten der Maus keinen wesentlichen Einfluß hat.

Halten wir also fest:

Sei $\mathcal{L} = (V, E)$ A -flexibles Labyrinth und $\tilde{\mathcal{L}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ A -flexibles Prälabryrith mit $\tilde{\mathcal{L}}^* = \mathcal{L}$. Dann heißt das Labyrinth $Ret(\mathcal{L}) = \{(\tilde{v}, \{(P, r, Q)/r \in D \text{ und } (P, r_A, Q) \in \tilde{E}\})\}$ **Retrakt von** \mathcal{L} .

Wir können dann wie folgt verfahren:

Sei \mathcal{F} ein A -flexibler endlicher Baum

1. Bilde $Ret(\mathcal{F})$
2. Bette $Ret(\mathcal{F})$ durch Kantenausweitung in Ebene ein
3. Ersetze jede Kante (P, r, Q) wieder durch (P, r_A, Q) .

Dann ist \mathcal{F} verhaltenstreu planarisiert und alle Randpunkte liegen außerhalb aller Kreise (weil es in einem Baum ja keine Kreise gibt, in denen sie eingeschlossen sein könnten), d.h. \mathcal{F} ist A -Falle.

Wir haben unsere Beobachtung, daß der Fallenkandidat im Fall des endlichen Baumes eine A -Falle darstellt, deshalb so genau begründet, weil wir die Vorgehensweise über endliche Bäume hinaus verallgemeinern können. Unabhängig davon ob der Retrakt von \mathcal{F} ein endlicher Baum oder irgend etwas anderes ist, können wir nämlich stets wie hier angegeben verfahren, solange er nur quasilplanar ist, und den Fallenkandidaten verhaltenstreu in die Ebene einbetten, indem wir seinen Retrakt durch Ausweitung einzelner Kanten planarisieren und dann jede Kante wieder zu einem entsprechenden A -flexiblen Gang ausweiten.

Allgemein gilt: \mathcal{F} A -flexible und $Ret(\mathcal{F})$ quasilplanar $\Rightarrow \mathcal{F}$ verhaltenstreu planarisierbar.

Wir hatten schon erwähnt, daß an dieser Stelle bereits alle Fälle erledigt sind, in denen das wiederholt abgelaufene Wegstück der Maus in einem A -flexiblen Beobachtungslabyrinth ein Testlauf ist.

Dann entsteht der Fallenkandidat nämlich aus der totalen Abwicklung, ist also ein A -flexibler endlicher Baum, in dem die Maus alle Randpunkte unbesucht läßt, und stellt somit eine A -Falle dar, die wie beschrieben in ein fangendes Netzlabyrinth verwandelt werden kann.

Es verbleibt, also diejenigen Fälle zu betrachten, in denen das wiederholt abgelaufene Wegstück der Maus im A -Test kein Testlauf ist und hier kommen wir eigentlich erst zum schwierigen Teil des Beweises.

Ziel wird es sein, auch hier Fallenkandidaten mit quasilplanaren Retrakten zu konstruieren. Wie wir uns überlegt haben, können diese dann nämlich verhaltenstreu in die Ebene eingebettet werden, indem wir den Retrakt durch Ausweitung einzelner Kanten einbetten und jede Kante anschließend wieder zu einem entsprechenden A -flexiblen Gang ausweiten und wenn dann außerdem noch ein außerhalb aller Kreise liegender Randpunkt existiert, haben wir eine A -Falle und sind fertig.

Dazu stellen wir zunächst fest, daß aus der Quasilplanarität des Fallenkandidaten sofort die seines Retraktes folgt. Der Fallenkandidat entsteht nämlich aus seinem Retrakt durch Ausweitung von Kanten und wenn er dann selbst durch Kantenausweitung in die Ebene eingebettet werden kann, trifft das natürlich auch auf seinen Retrakt zu. Genauer kann man zeigen, daß ein A -flexibles endliches Labyrinth genau dann quasilplanar, wenn sein Retrakt quasilplanar ist.

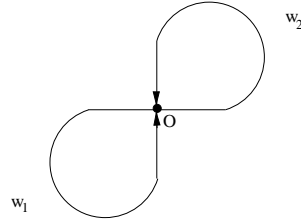
Es reicht also, wenn wir im folgenden die Quasilplanarität von \mathcal{F} erreichen, die von $Ret(\mathcal{F})$ ist dann ebenfalls sichergestellt.

Gehen wir nun also davon aus, daß das wiederholt abgelaufene Wegstück der Maus kein Testlauf ist.

Dabei soll der A -Test \mathcal{L} von nun an folgendermaßen aussehen:

$(\mathcal{L}, 0)$

$w_1, w_2 \in \{s_A, o_A, n_A, w_A\}^+$
und $\mathcal{C}_{w_1}, \mathcal{C}_{w_2}$ sind quasilplanar



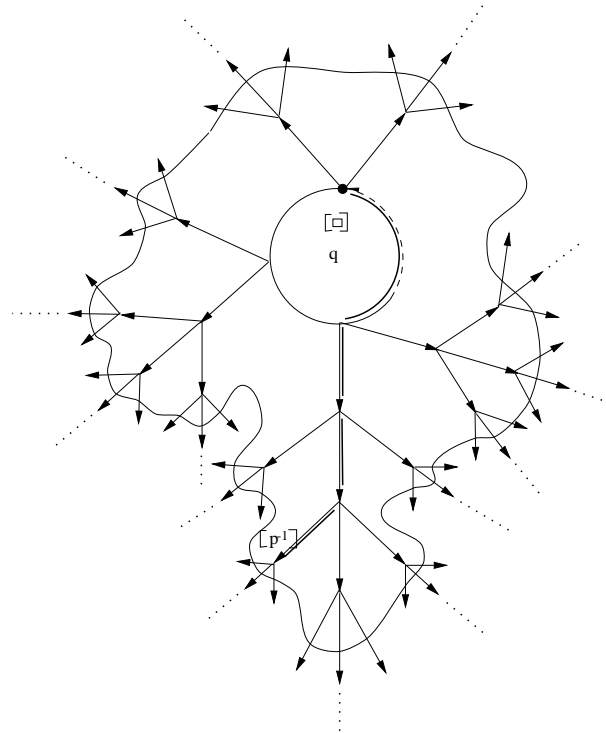
Wir bezeichnen dann wie gehabt mit p' die Markierung des Vorlaufs, also des von A abgelaufene Wegstück bevor ihr Verhalten periodisch wird, mit q' die Markierung des wiederholt abgelaufenen Wegstücks und mit p und q die zugehörigen reduzierten Markierungen.

Da das wiederholt abgelaufene Wegstück kein Testlauf ist, gilt $q \neq \square$.

In diesem Fall schicken wir die Maus ausgehend vom Punkt $[p^{-1}]$ in die Abwicklung vom A -test \mathcal{L} in der alle reduzierten Wege bis auf den Rundweg mit Markierung q abgewickelt sind. Wir schicken sie also in das punktierte Labyrinth $(\mathcal{L}^q, [p^{-1}])$. Abgesehen von Testläufen, läuft sie dann zunächst den Weg mit Markierung p^{-1} in umgekehrter Richtung, entlang um dann im Kreis mit Markierung q für immer zu rotieren. Sie bewältigt die Abwicklung also nicht, da sie nur endlich viele Punkte besucht.

hnlich wie im vorangehenden Beispiel können wir dann wieder hergehen und die Bäume, die am Kreis hängen so kappen, daß das verbleibende Labyrinth endlich und A -flexibel ist und den Weg der Maus ganz in seinem Inneren enthält. Damit haben wir wieder einen Fallenkandidaten \mathcal{F} erhalten.

$(\mathcal{L}^q, [p^{-1}])$



\mathcal{F} wird als „endlicher Baum über dem Kreislabyrinth \mathcal{C}_q “ bezeichnet, da er aus \mathcal{C}_q entsteht, indem endlich viele endliche und disjunkte Bäume angehängt werden (auf die formale Definition soll hier verzichtet werden).

Ein A -flexibler Fallenkandidat ist A -Falle, kann also dann in ein die Maus fangendes Netzlabyrinth verwandelt werden, wenn er verhaltenstreu in die Ebene eingebettet werden kann und dann einen außerhalb aller Kreise liegenden Randpunkt besitzt, und ersteres ist, wie wir wissen, der Fall, wenn \mathcal{F} und damit ja auch sein Retrakt quasiplanar ist.

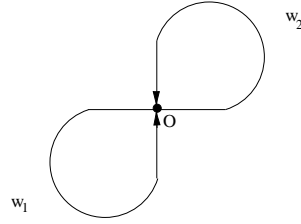
Wir müssen uns daher fragen, unter welcher Bedingung ein endlicher Baum über einem Kreislabyrinth \mathcal{C}_v quasiplanar ist. Das ist sicherlich der Fall, wenn \mathcal{C}_v quasiplanar ist, denn dann können wir hergehen und \mathcal{C}_v und jeden angehängten Baum für sich durch Kantenausweitung in die Ebene einbetten und anschließend die planarisierten Bäume an den entsprechenden Stellen an das planarisierte Kreislabyrinth wieder anhängen, wobei wir die Kreiskanten so stark weiter ausweiten können, daß für die Bäume hinreichend viel Platz geschaffen wird und sie sich nicht überlappen. Das Ergebnis ist ein planares Labyrinth. Ein endlicher Baum über dem Kreislabyrinth \mathcal{C}_v ist also genau dann quasiplanar, wenn \mathcal{C}_v quasiplanar ist.

Um das Problem zu lösen, wann der Fallenkandidat \bar{t} im Fall $q \neq \square$ A -Falle ist, brauchen wir daher abgesehen von der Randpunktfrage statt der Quasiplanarität von \mathcal{F} nur die des Kreislabyrinths \mathcal{C}_q zu untersuchen. Aus der Quasiplanarität von \mathcal{C}_q folgt dann sofort die von \mathcal{F} und damit auch die verhaltenstreu

Planarisierbarkeit von \mathcal{F} .

Betrachten wir dazu wieder den A -Test \mathcal{L} mit seinen beiden A -flexiblen Kreisen mit Markierung w_1 und w_2 .

$(\mathcal{L}, 0)$ $w_1, w_2 \in \{s_A, o_A, n_A, w_A\}^+$
und $\mathcal{C}_{w_1}, \mathcal{C}_{w_2}$ sind quasiplanar



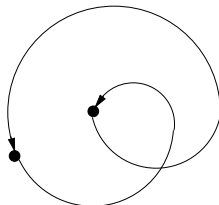
Im Fall $q \neq \square$, wenn also das von A wiederholt abgelaufene Wegstück kein Testlauf ist, können wir folgende Fälle unterscheiden:

1. $q = w_1^n \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.
(0 wird ausgeschlossen, da $n = 0 \quad q = \square$ bedeutet und wir diesen Fall bereits behandelt haben.)
 $q = w_1^n$ bedeutet, daß die Maus abgesehen von Testläufen von irgendeinem Schritt an ausgehend von Punkt O und einem bestimmten Zustand s , den rechten Kreis $|n|$ -mal durchläuft und zwar in positiver Richtung, falls $n < 0$ ist, und in Gegenrichtung, falls $n > 0$ ist, um anschließend wieder in Zustand s in Punkt O anzukommen und den ganzen Vorgang für immer zu wiederholen.
Entsprechend kann gelten
2. $q = w_2^n$,
3. d.h. anstelle des rechten wird der linke Kreis durchlaufen und schließlich kann gelten
4. $q = w_1^{n_1} w_2^{m_1} \dots w_1^{n_k} w_2^{m_k} \quad k \geq 1, \quad n_i, m_i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \quad (1 \leq i \leq k)$,
d.h. das periodische Verhalten der Maus besteht abgesehen von Testläufen darin, wiederholt zuerst den rechten Kreis n_1 -mal dann den linken Kreis m_1 -mal, dann wieder den rechten Kreis n_2 usw. zu durchlaufen, wobei negative Exponenten möglich sind und bedeuten, daß der betreffende Kreis in Gegenrichtung durchlaufen wird.

Wenden wir uns zunächst den einfachen Fällen 1. und 2. zu und wählen stellvertretend Fall 1. aus. 2. geht dann analog.

1. $q = w_1^n$
Dabei können wir O.B.d.A. von $n > 0$ ausgehen, denn die Kreislabirynthe \mathcal{C}_q und $\mathcal{C}_{q^{-1}}$ stimmen überein - wir gehen lediglich von 2 verschiedenen Orientierungen aus - so daß es auf das Gleiche hinausläuft, ob wir die Quasiplanarität von $\mathcal{C}_{w_1^n}$ oder von $\mathcal{C}_{w_1^{-n}}$ untersuchen.

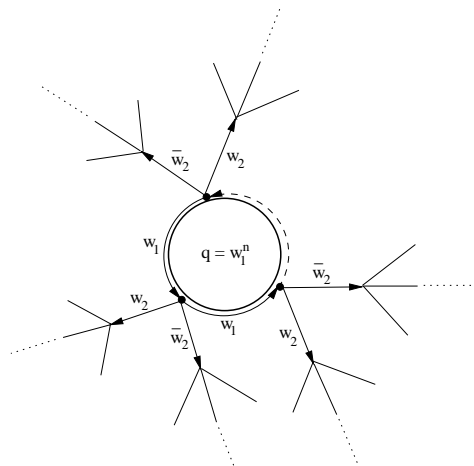
Betrachten wir beispielsweise den Fall $n = 2$, dann sieht das Kreislabirynth $\mathcal{C}_{w_1^2}$ so aus



und man kann beweisen, daß es nicht quasiplanar ist und für größere n ebenfalls nicht, so daß sich aus der Abwicklung $(\mathcal{L}^{w_1^n}, [p^{-1}])$, in die wir die Maus in diesem Fall schicken wollten, kein quasiplanarer Fallenkandidat gewinnen läßt.

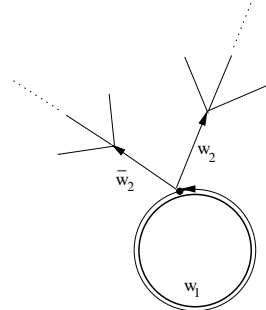
Nun können wir die Maus aber anstatt in die Abwicklung $(\mathcal{L}^{w_1^n}, [p^{-1}])$ genauso gut in die Abwicklung $(\mathcal{L}^{w_1}, [p^{-1}])$ schicken. Sie kann diese beiden Abwicklungen sowieso nicht unterscheiden. Der einzige Unterschied besteht darin, daß auf jeden Kreisdurchlauf von A in $(\mathcal{L}^{w_1^n})$ n in (\mathcal{L}^{w_1}) kommen. Folglich ist der Träger des Weges von A im zweiten Labirynth ebenfalls endlich, so daß der Fallenkandidat auch aus \mathcal{L}^{w_1} gewonnen werden kann. Dieser Fallenkandidat ist dann aber quasiplanar, da das Kreislabirynth \mathcal{C}_{w_1} nach Voraussetzung quasiplanar ist.

$\mathcal{L}^{w_1^n}$

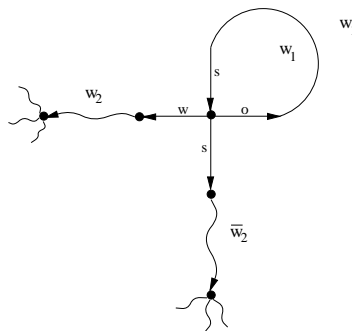


abgesehen von Testläufen wiederholt abgelaufenes Wegstück in $\mathcal{L}^{w_1^n}$ bzw. \mathcal{L}^{w_1} .

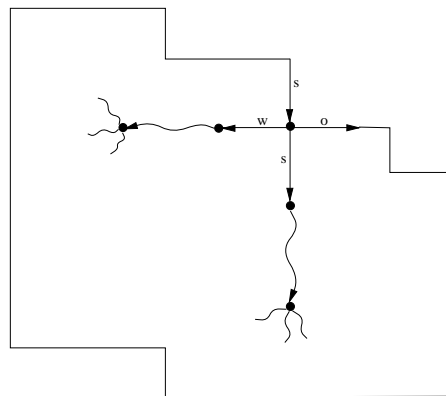
\mathcal{L}^{w_1}



Wie sieht es nun mit der Frage nach Randpunkten aus, die nach der Einbettung von \mathcal{F} in die Ebene außerhalb des Kreises liegen. Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, ob der Kreis mit Markierung w_1 mehr nach links oder mehr nach rechts dreht. Dementsprechend kann die Situation nach Einbettung von \mathcal{F} in die Ebene nämlich so



oder so



aussehen, so daß alle Randpunkte entweder außerhalb oder innerhalb des Kreises liegen. Wie sich der problematische zweite Fall vermeiden läßt, werden wir später noch sehen.

Damit haben wir Fall 1. und 2. bis auf die Randpunktfrage erledigt und können uns nun Fall

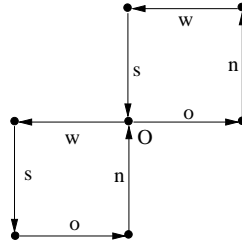
2. $q = w_1^{n_1} w_2^{m_1} \dots w_1^{n_k} w_2^{m_k}$ $k \geq 1$, $n_i, m_i \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ ($1 \leq i \leq k$)

zuwenden. Betrachten wir dazu zunächst einige Beispiele, wobei wir der Einfachheit halber wieder von folgendem A -Test ausgehen:

A -Test \mathcal{L}

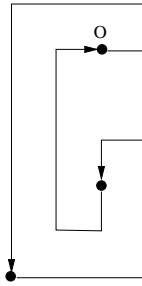
$$w_2 = w_A s_A o_A n_A$$

$$w_1 = o_A n_A w_A s_A$$



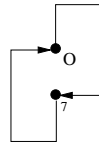
a) $q = w_1^2 w_2^{-1}$

In diesem Fall ist \mathcal{C}_q quasiplanar, da wir es überschneidungsfrei zeichnen können, wenn wir die Kanten unterschiedlich lang malen:



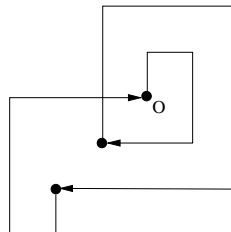
b) $q = w_1^{-1} w_2^{-1}$

Auch hier stellen wir fest, daß \mathcal{C}_q quasiplanar ist:



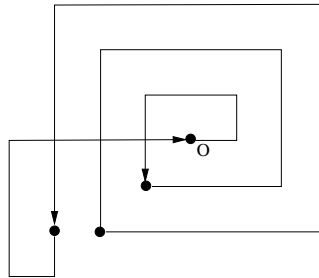
c) $q = w_1^{-2} w_2^{-1}$

Egal wie lang wir die Kanten in diesem Fall zeichnen, läßt sich eine Kantenüberschneidung nicht vermeiden, d.h. \mathcal{C}_q ist nicht quasiplanar:



d) $q = w_1^3 w_2^{-1}$

In diesem Fall ist \mathcal{C}_q ebenfalls nicht quasiplanar:



Warum ist \mathcal{C}_q in den beiden oberen Beispielen quasiplanar und in den unteren nicht?

Zählen wir dazu die Anzahl der Links- und Rechtsdrehungen in den entsprechenden Kreisen:

in a) haben wir 7 Linksdrehungen
 und 3 Rechtsdrehungen,
 die Differenz ist also 4,

in b) haben wir 2 Linksdrehungen
 und 6 Rechtsdrehungen,
 so daß wir -4 als Differenz erhalten,

in c) zählen wir 2 Linksdrehungen
 und 10 Rechtsdrehungen,
 was die Differenz -8 ergibt

und in d) schließlich 11 Linksdrehungen
 und 3 Rechtsdrehungen,
 was die Differenz 8 ergibt

Tatsächlich zeigt Budach, daß ein Kreis genau dann quasiplanar ist, wenn der Rotationsindex seiner Markierung, das ist die Anzahl der Links- minus der Anzahl der Rechtsdrehungen geteilt durch 4 gleich 1 oder -1 ist, womit wir uns im nächsten Abschnitt genauer befassen wollen.

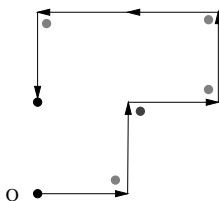
5 Quasiplanarität

Für $v \in R$ definieren wir den Rotationsindex

$Rot(v) = 1/4$ (Anzahl der Linksdrehungen
– Anzahl der Rechtsdrehungen beim Abschreiten eines Weges mit
Markierung v)

(Die formale Definition findet sich in [2].)

Wie man sofort sieht, verwandeln sich Links- in Rechtsdrehungen und umgekehrt, wenn man einen Weg in Gegenrichtung abschreitet. Betrachten wir dazu den Weg mit Markierung $v = (on)^2w^2s$:



Dann zählen wir beim Abschreiten in Pfeilrichtung 4 Linksdrehungen und 1 Rechtsdrehung, d.h.

$Rot(v) = 1/4(4 - 1) = 3/4$. In Gegenrichtung werden aus Links- Rechts- und aus Rechts- Linksdrehungen, so daß wir

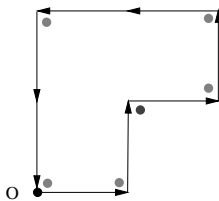
$Rot(\bar{v}) = 1/4(1 - 4) = -3/4 = -Rot(v)$ erhalten, was natürlich allgemeingültig ist.

Budach zeigt dann folgenden Satz:

Satz 5.1 Sei $v \in R$ mit $f(v) \neq l(v)$. Dann gilt: \mathcal{C}_v quasiplanar $\Leftrightarrow Rot(vf(v)) = \pm 1$.

$f(v)$ wird angehängt, um auch noch eine mögliche Drehung im Ausgangspunkt zu erfassen.

Wenn wir also z.B. den Weg im Beispiel um eine weitere Südkante ergänzen und zum Kreis zusammenschließen, so müssen wir, um alle Drehungen einschließlich derjenigen im Ausgangspunkt zu erfassen, nicht nur einmal ringsherum laufen, sondern dann noch einen Schritt weiter.



Wir stellen dann für $v' = (on)^2w^2s^2$ fest, daß $Rot(v'f(v')) = 1/4(5 - 1) = 1$ gilt und daß der Kreis $\mathcal{C}_{v'}$ im Beispiel nicht nur quasiplanar sondern sogar planar ist.

Nun zum Beweis des Satzes, der hier aber nur skizziert werden soll.

In der „ \Rightarrow “-Richtung, folgt die Aussage direkt aus einem Theorem von Riemann und Hopf über die Drehung der Tangenten bei doppelungsfreien geschlossenen ebenen Kurven [3], [6].

In der „ \Leftarrow “-Richtung ist zu zeigen, daß jeder Kreis, dessen Markierung Rotationsindex $+1$ oder -1 hat, quasiplanar ist. Hier besteht der entscheidende Trick darin, das Problem auf die Betrachtung von Spiralen zu reduzieren.

Unter einer Spirale verstehen wir die Markierung eines Weges, bei dessen Abschreiten man sich abgesehen von Geradeauschritten immer nur in einer Richtung dreht. Je nachdem ob wir uns dabei immer nur nach rechts oder immer nur nach links drehen unterscheiden wir Links- und Rechtsspiralen.



Mit Hilfe des Rotationsindex können wir eine Spirale wie folgt definieren:

$s \in R$ heißt **Linksspirale** [**Rechtsspirale**]
 $:\Leftrightarrow \forall s', s''$ Präfix von s :
 s' Präfix von s''
 $\Rightarrow Rot(s') \leq Rot(s'')$
 $[Rot(s') \geq Rot(s'')]$.

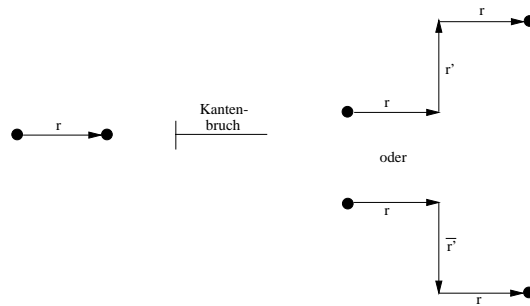
Während wir also einen Weg ablaufen, der mit einer Spiralen markiert ist, ist der Rotationsindex mit wachsender Weglänge entweder monoton wachsend oder monoton fallend, und zwar ist er monoton wachsend bei Linksspiralen und monoton fallend bei Rechtsspiralen. Das Wort „Spirale“ ist dann der Oberbegriff für Links- und Rechtsspiralen.

$s \in R$ heißt **Spirale** $:\Leftrightarrow s$ ist Links- oder Rechtsspirale

Schließlich wollen wir einen Gang in einem Labyrinth, der mit einer Spirale markiert ist, als **Spiralgang** bezeichnen.

Ziel ist zu zeigen, daß jeder Kreis, dessen Markierung Rotationsindex $+1$ oder -1 hat, quasiplanar ist, indem das Problem auf die Betrachtung von Spiralen reduziert wird. Genauer zeigt Budach, daß jeder Gang in einem Labyrinth aus einem Spiralgang mit gleicher Anfangsrichtung und gleichem Rotationsindex bis auf Kantenausweitung durch „Kantenbruch“ entsteht.

Dabei verstehen wir unter Kantenbruch, daß eine einzelne Labyrinthkante mit Markierung r durch einen Gang mit Markierung $rr'r$ ersetzt wird, wobei die Kante in Richtung r' auf der in Richtung r senkrecht steht.



Formal können wir das so festlegen:

Sei $i : D \rightarrow D$ die Drehung gegen den Uhrzeigersinn, d.h. $i(n) = w$, $i(w) = s$, $i(s) = o$ und $i(o) = n$. Dann beschreibt i^{-1} gerade die im Uhrzeigersinn mit $i^{-1}(n) = o$, $i^{-1}(w) = n$, usw.

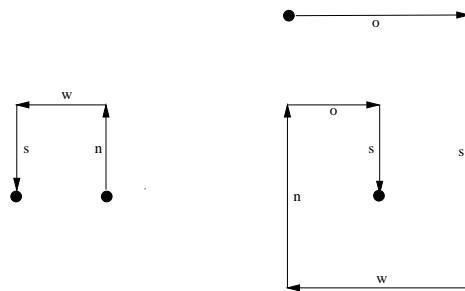
Wenn dann für zwei Labyrinth \mathcal{L} und $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(P, r \mapsto rr'r, Q)$ und $r' \in \{i(r), i^3(r)\}$ gilt, sagen wir

$\tilde{\mathcal{L}}^*$ entsteht aus \mathcal{L} durch **Brechen** von Kante (P, r, Q) .

Daß ein Labyrinth aus einem anderen durch Kantenbruch entsteht, bedeutet dann wie üblich, daß es durch Brechen keiner, einer oder mehrerer Kanten entsteht.

Um Budachs Ergebnis formulieren zu können, brauchen wir noch zwei weitere Notationen und zwar wollen wir das Labyrinth, das nur aus dem Gang mit Markierung v besteht, von nun an mit \mathcal{G}_v bezeichnen und die Spirale, die man erhält, indem man eine gegebene Anfangsrichtung r m mal im bzw. gegen den Uhrzeigersinn dreht mit s_r^m .

Z.B. ist $s_n^2 = nws$ und $s_o^{-5} = oswnos$. Die zugehörigen Spiralganglabyrinth sind dann



wobei die Kanten im 2. Fall wieder unterschiedlich lang gezeichnet sind.

Allgemein ist s_r^m für $r \in D$ und $m \in \mathbf{Z}$ also die Spirale $s_r^m = r_0 r_1 \dots r_{|m|}$ mit

$$r_\lambda = \begin{cases} i^\lambda(r), & \text{falls } m \geq 0 \\ i^{-\lambda}(r), & \text{falls } m < 0 \end{cases}$$

$(0 \leq \lambda \leq |m|)$.

In s_r^m kommen demnach $|m|$ Drehungen vor und zwar sind es Linksdrehungen im

Fall $m > 0$ und Rechtsdrehungen im Fall $m < 0$, so daß sich als Rotationsindex von s_r^m gerade $m/4$ ergibt. Es gilt also:

$$f(s_r^m) = r \text{ und } Rot(s_r^m) = m/4$$

Damit können wir die Aussage, daß jeder Gang in einem Labyrinth aus einem Spiralgang mit gleicher Anfangsrichtung und gleichem Rotationsindex durch Kantenausweitung und Kantenbruch entsteht, folgendermaßen präzisieren:

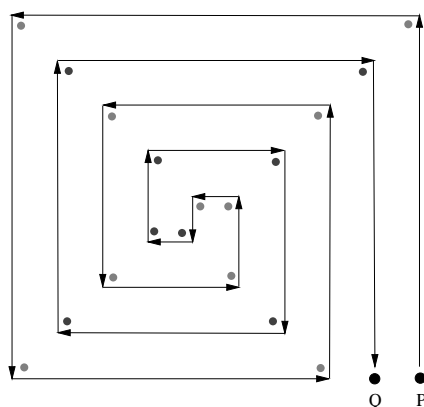
Lemma 5.2 $\forall v \in R : \mathcal{G}_v$ entsteht aus $\mathcal{G}_{s_{f(v)}^{4 \cdot Rot(v)}}$ durch Kantenausweitung und Kantenbruch.

Man ahnt vielleicht schon welche Rolle dieses Lemma spielt. Kantenausweitung und Kantenbruch erhalten nämlich die Quasiplanarität von Labyrinth. Wenn wir also zeigen können, daß das Labyrinth $\mathcal{G}_{s_{f(v)}^{4 \cdot Rot(v)}}$ quasiplanar ist, überträgt sich das Ergebnis sofort auf \mathcal{G}_v und zwar auch dann, wenn wir die Gänge zu Kreisen zusammen schließen.

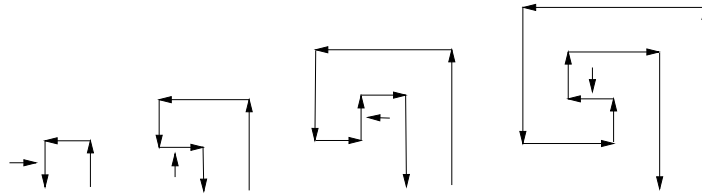
Man kann sich die Aussage aus Lemma 3 wie folgt plausibel machen: gegeben ein Labyrinth, das nur aus einem Gang besteht, können wir zunächst alle Kantenausweitungen rückgängig machen, was auf Anfangsrichtung und Rotationsindex sicherlich keinen Einfluß hat. Der erhaltene Gang dreht dann in jedem Punkt. Immer wenn er im Nachfolger eines Punktes anders herum dreht wie im Ausgangspunkt, haben wir es mit einem Kantenbruch zu tun. Machen wir nun solange Kantenbrüche rückgängig, bis keine mehr da sind, dreht der verbleibende Gang nur noch in einer Richtung, wobei Anfangsrichtung und Rotationsindex erneut unverändert geblieben sind. Damit haben wir aber ein Spiralganglabyrinth erhalten, das die Bedingung aus Lemma 3 erfüllt.

Betrachten wir noch ein Beispiel dazu:

Das Ganglabyrinth \mathcal{G}_v bestehe aus einer Linksspiralen mit Anfangsrichtung nord und 10 Linksdrehungen gefolgt von einer Rechtsspiralen mit 8 Rechtsdrehungen. Der Rotationsindex von v ist daher $1/4(10 - 8) = \frac{2}{4}$.



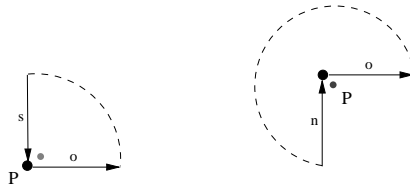
\mathcal{G}_v entsteht dann aus $\mathcal{G}_{s_n^2}$ durch Kantenausweitung und Kantenbruch wie folgt, wobei die schwarzen Pfeile jeweils auf die Stelle zeigen, an der der nächste Kantenbruch stattfindet:



Damit sind wir in der Lage $Rot(vf(v)) = \pm 1 \Rightarrow C_v$ quasiplanar zu zeigen.

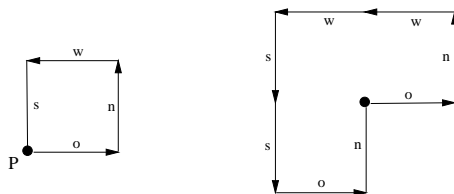
Betrachte das Kreislabirynth C_v mit Anfangspunkt P . Dann stellen wir zunächst fest, daß wir P stets so wählen können, daß $f(v) \neq l(v)$ gilt, d.h. daß in P eine Drehung stattfindet. Außerdem wollen wir der Einfachheit halber von $Rot(vf(v)) = +1$ und $f(v) = o$ aus gehen. Alle übrigen Fälle gehen dann analog.

Wegen $f(v) = o$ können wir dann 2 Fälle unterscheiden und zwar kann $l(v) = s$ oder $l(v) = n$, so daß wir im 1. Fall eine Links- und im 2. Fall eine Rechtsdrehung in P hätten.



Wenn wir dann die beiden Kreise im Ausgangspunkt P auftrennen und jeweils den Gang mit Markierung v betrachten, entfällt diese Drehung und wir erhalten für den Rotationsindex $Rot(v) = 1 - 1/4 = \frac{3}{4}$ im 1. Fall und $1 + 1/4 = \frac{5}{4}$ im 2.

Wir können dann Lemma 3 zum Einsatz bringen und erhalten, daß das Ganglabirynth G_v im 1. Fall aus $G_{s_0^3}$ und im 2. Fall aus $G_{s_0^5}$ durch Kantenausweitung und Kantenbruch entsteht. Folglich entsteht das Kreislabirynth C_v aus $C_{s_0^3}$ bzw. $C_{s_0^5}$ durch Kantenausweitung und Kantenbruch und da die letzteren beiden planar bzw. quasiplanar sind (im 2. Fall sind zur Einbettung in die Ebene lediglich zwei Kantenausweitungen erforderlich)



und sowohl Kantenausweitung wie Kantenbruch die Quasiplanarität von Labirynth erhalten, folgt aus der Quasiplanarität von $C_{s_0^3}$ und $C_{s_0^5}$ sofort die des Kreislabirynths C_v und der Satz ist bewiesen.

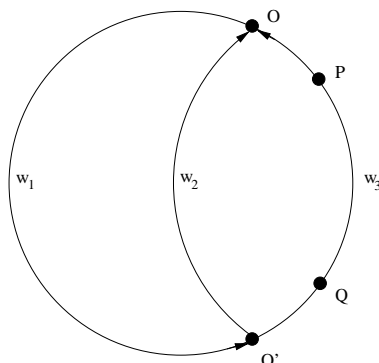
Daß insbesondere Kantenbruch die Quasiplanarität von Labirynth erhält, muß natürlich bewiesen werden. Der Beweis findet sich in []. ■

Bevor wir zu unserem eigentlichen Thema, nämlich der Einebnung von Faltenkandidaten zurückkehren, soll an dieser Stelle noch ein weiteres Ergebnis

angeführt werden, das auf Satz 1 aufbaut und das später noch eine wichtige Rolle spielt.

Satz 5.3 Wenn die Kreislabyrinth $\mathcal{C}_{w_1 w_2}$ und $\mathcal{C}_{w_2 \bar{w}_3}$ quasiplanar sind, so ist das Labyrinth

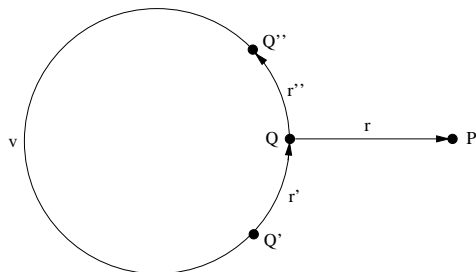
\mathcal{L}



ebenfalls quasiplanar, sofern die direkten Nachbarn P und Q der Punkte O und O' entweder beide „außerhalb“ oder beide „innerhalb“ des Kreises $0 \xrightarrow{w_1 w_2}$ liegen. (Im Bild sieht es so aus, als lägen sie außerhalb, weil der Gang mit Markierung w_2 links von P und Q entlang führt. Ebenso hätten wir ihn aber auch rechts davon einzeichnen können.)

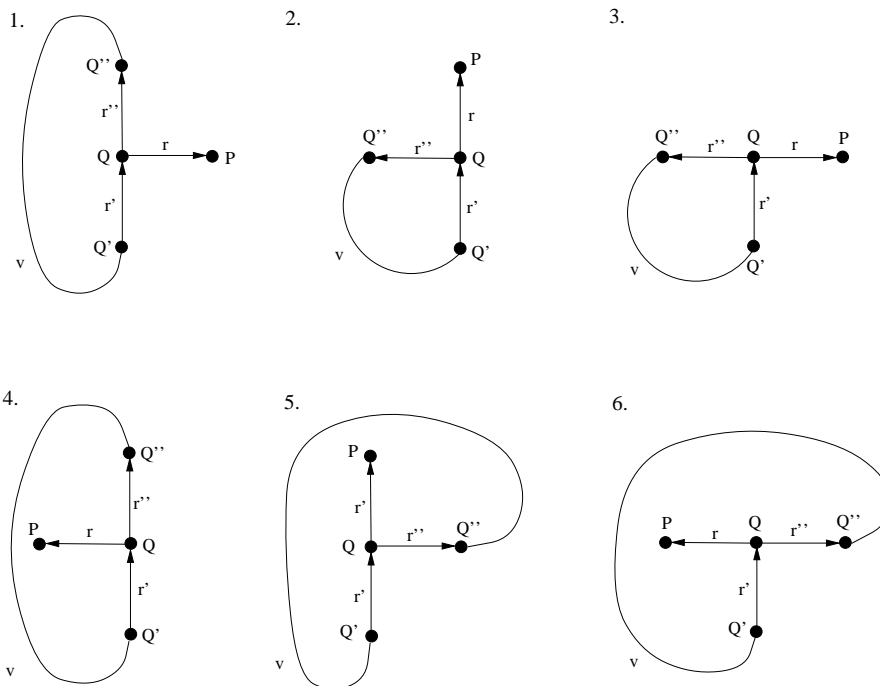
Die Worte außerhalb und innerhalb sind oben in Anführungsstriche geschrieben, weil an dieser Stelle nicht geklärt ist, was es heißt, daß ein Punkt in einem quasiplanaren Labyrinth außerhalb bzw. innerhalb eines Kreises liegt. Die Vorstellung dabei ist, daß das Labyrinth durch Kantenausweitung so in die Ebene einbettbar ist, daß das Bild des Punktes im eingeebneten Labyrinth außerhalb bzw. innerhalb des Kreises liegt. Dies kann mit Hilfe des Rotationsindex folgendermaßen formuliert werden.

Sei \mathcal{L} das folgende Labyrinth, das aus einem quasiplanaren Kreislabyrinth \mathcal{C}_v mit Anfangspunkt Q entsteht, indem wir Q über eine Kante in Richtung r mit einem neuen Punkt P verbinden:



Sei $l(v) = r'$ und $f(v) = r''$, dann muß $r \notin \{r'', \bar{r}'\}$ gelten, da andernfalls die Labyrinthbedingung verletzt wäre.

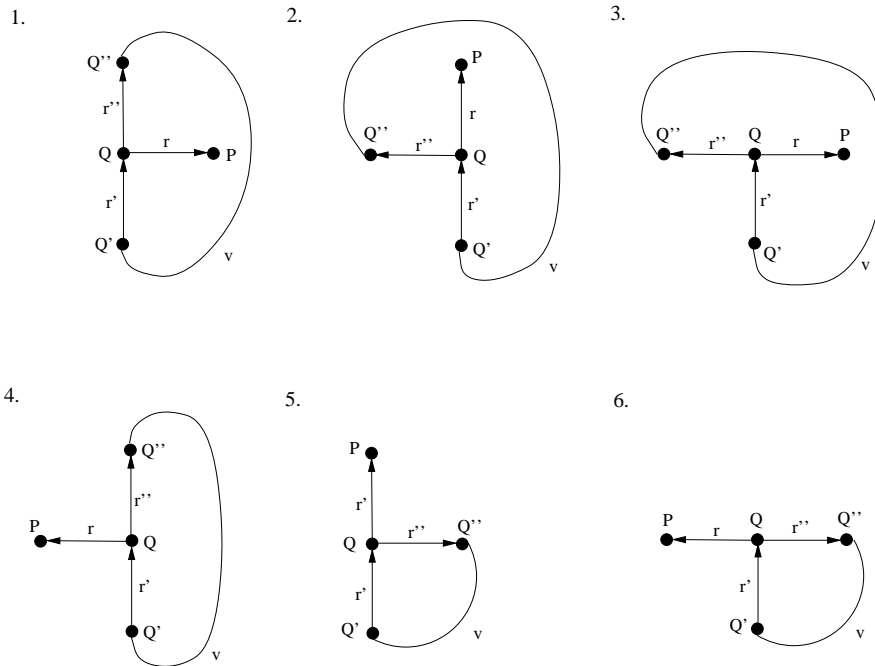
Betrachten wir nun alle Möglichkeiten, wie die Situation in Punkt Q aussehen kann, stellen wir fest, daß eine Bedingung dafür, daß das Bild von P nach der Einbettung von \mathcal{L} in die Ebene außerhalb des Bildes des Kreises liegt zu sein scheint, daß P in \mathcal{L} rechts vom Weg $Q \xrightarrow{r'r''} Q$ liegt:



Formal gibt die Differenz aus den Rotationsindizes von $r'r''$ und $r'r$ Auskunft darüber, ob P rechts oder links von $Q \xrightarrow{r'r''} Q$ und zwar gilt:

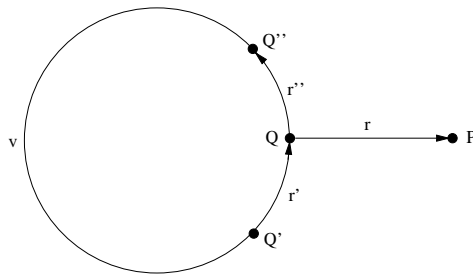
$$\begin{aligned} Rot(r'r'') - Rot(r'r) &\geq 0 \text{ in 1., 2., 3. und} \\ Rot(r'r'') - Rot(r'r) &< 0 \text{ in 4., 5., 6..} \end{aligned}$$

Nun ist die Eigenschaft, daß P rechts von $Q \xrightarrow{r'r''} Q$ liegt, nur dann hinreichend dafür, daß sein Bild nach der Einebnung von \mathcal{L} außerhalb des Kreises liegen wird, wenn wir unterstellen, daß $Rot(vf(v)) = +1$ gilt, was bedeutet, daß im Kreis $Q \xrightarrow{v} Q$ mehr Links- wie Rechtsdrehungen vorkommen. Sollte dagegen $Rot(vf(v)) = -1$ gelten und damit die Anzahl der Rechtsdrehungen überwiegen, dreht sich die Lage komplett um. Dann wird das Bild von P nach der Einebnung von \mathcal{L} innerhalb des Kreises liegen, wenn P in \mathcal{L} rechts von $Q \xrightarrow{r'r''} Q$ liegt und außerhalb, wenn er links davon liegt:



Um die Begriffe *innerhalb* und *außerhalb* formal zu definieren, müssen wir also sowohl den Rotationsindex von $vf(v)$ als auch das Vorzeichen von $Rot(r'r'') - Rot(r'r)$ berücksichtigen. Wir stellen dann fest, daß der *außerhalb*-Fall genau dann eintritt, wenn beide das gleiche Vorzeichen haben und legen dementsprechend fest:

Definition 5.1 Seien $v \in R, r \in D, f(v), \bar{l}(v), r$ paarweise verschieden, \mathcal{L} Labyrinth



und $P \notin \text{supp}(w)$ für $w : Q \xrightarrow{v} Q$. Dann sagen wir:

P liegt **außerhalb** von $Q \xrightarrow{v} Q$
 $:\Leftrightarrow \text{sgn}(Rot(vf(v))) = \text{sgn}[Rot(l(v)f(v)) - Rot(l(v)r)]$
(dabei ist $\text{sgn}(z) = \begin{cases} +1, & \text{falls } z \geq 0 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$).

Wenn P dann nach Definition außerhalb von $Q \xrightarrow{v} Q$ liegt und $Rot(vf(v)) = \pm 1$ gilt, \mathcal{C}_v also quasiplanar ist, so kann gezeigt werden, daß \mathcal{L} durch Kantenaus-

weitung tatsächlich so in die Ebene eingebettet werden kann, daß das Bild von P im planarisierten Labyrinth außerhalb des Kreises liegt.

Wie man sich leicht überlegen kann, gilt das Gleiche dann aber auch für jeden Punkt P und jeden Kreis eines quasilanaren Labyrinths, sofern P von einem außerhalb liegenden direkten Kreisnachbarn durch einen Weg erreichbar ist, auf dem kein Punkt des Kreises vorkommt.

Dementsprechend erweitern wir die Definition wie folgt:

Sei $\mathcal{L} = (V, E)$ Labyrinth, $\omega : Q \xrightarrow{v} Q$ Kreis in \mathcal{L} und $P \in V$.

Wir sagen P liegt **außerhalb** von $Q \xrightarrow{v} Q$

$:\Leftrightarrow$ es gibt einen Weg $P_0 \xrightarrow{r_1} P_1 \xrightarrow{r_2} \dots \xrightarrow{r_k} P_k = P$ mit $k \geq 1$ und

(i) $P_0 \in \text{supp}(\omega)$ und $P_i \notin \text{supp}(\omega)$ ($1 \leq i \leq k$)

(ii) P_1 liegt außerhalb von $Q \xrightarrow{v} Q$

Für die Konstruktion von A -Fallen bedeutet das, daß ein Fallenkandidat \mathcal{F} A -Falle ist, wenn er

(i) quasilanar ist und

(ii) einen außerhalb aller Kreise liegenden Randpunkt besitzt, denn Kantenausweitung hat auf (ii) keinen Einfluß.

Soviel zu den Begriffen außerhalb und innerhalb.

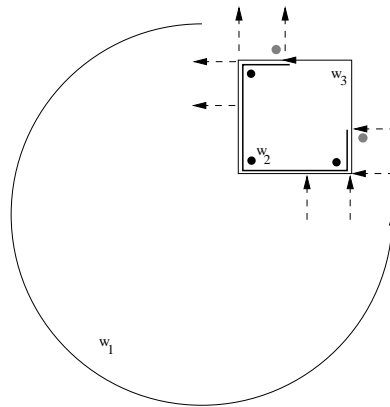
Damit ist klar, was in Satz 5.3 damit gemeint ist, daß die Punkte P und Q entweder beide außerhalb oder beide innerhalb des Kreises $O \xrightarrow{w_1 w_2} O$ liegen sollen. Der Beweis des Satzes läuft dann in groben Zügen folgendermaßen:

Beweisidee von Satz 5.3:

Da Kantenausweitung und Kantenbruch auf die Quasilanarität von Labyrinthen keinen Einfluß hat, können wir zunächst hergehen und in den Gängen mit Markierung w_1 , w_2 und w_3 solange Kantenausweitungen und Kantenbrüche rückgängig machen, bis keine mehr da sind. Wenn wir dann vom so erhaltenen Labyrinth Quasilanarität nachweisen können, überträgt sich das Ergebnis sofort auf das ursprüngliche Labyrinth. Der Einfachheit halber können wir aber auch von vornherein annehmen, daß w_1 , w_2 und w_3 Spiralen mit Drehungen in jedem Punkt sind.

Budach unterscheidet dann zwei Fälle, je nachdem ob die Spiralen w_2 und w_3 entgegengesetzte oder gleiche Drehrichtung haben. Im weiteren Verlauf wollen wir annehmen, daß $\text{Rot}(w_1 w_2 f(w_1)) = +1$ ist, daß der Kreis $0 \xrightarrow{w_1 w_2} 0$ also mehr Links- als Rechtsdrehungen hat und daß die Punkte P und Q außerhalb liegen. Die anderen Fälle gehen dann analog.

Wenn die Spiralen w_2 und w_3 dann entgegengesetzte Drehrichtung haben, und außerdem keine von beiden eine triviale Spirale mit Rotationsindex 0 ist, stellt man fest, daß \mathcal{L} bis auf Drehung von 90° , 180° oder 270° und Rückgängigmachen von Kantenausweitungen folgende Form hat:



Dabei sind die Alternativen für die erste und letzte Kante in $0 \xrightarrow{w_1} 0'$ gestrichelt gezeichnet.

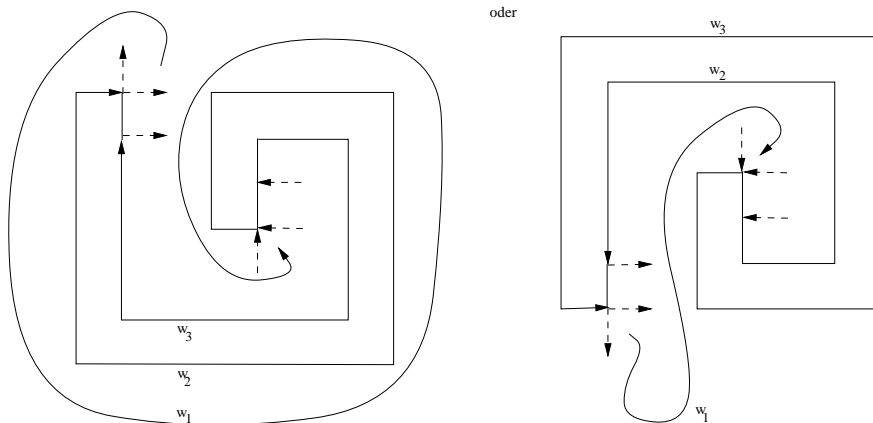
Man sieht dann leicht, daß unabhängig davon welche Alternative gewählt wird, die Spirale w_2 zum Rotationsindex von $w_1 w_2 f(w_1)$ nichts beiträgt.

Es gilt also

$Rot(w_1 f(w_1)) = Rot(w_1 w_2 f(w_1)) = 1$, so daß \mathcal{C}_{w_1} nach Satz 1 quasiplanar ist.

Budach zeigt dann umgekehrt, daß der Einbau von \square in den Gang eines quasiplanaren Labyrinths die Quasiplanarität erhält und der Fall, daß w_2 und w_3 verschiedene Drehrichtung haben, ist erledigt.

Wenn w_1 und w_2 gleiche Drehrichtung haben oder eine von beiden eine triviale Spirale ohne Drehungen ist, zeigt Budach, daß \mathcal{L} bis auf Drehung um 90° , 180° oder 270° Grad, Rückgängigmachen von Kantenausweitungen und dem Rotationsindex von w_2 und w_3 wie folgt aussehen muß:



Das bedeutet, daß sich die Rotationsindices von w_2 und w_3 dem Betrage nach nur beschränkt unterscheiden können, genauer weichen sie höchstens um 4, mindestens aber um 2 voneinander ab (*).

Budach zeigt dann wieder umgekehrt: wenn man parallel zu einem Spiralgang in einem quasiplanaren Labyrinth einen 2. Spiralgang gleicher Drehrichtung ein-

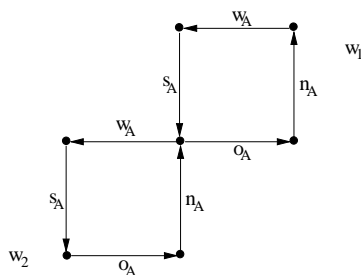
baut, so daß die Rotationsindices (*) erfüllen, ist das so erhaltene Labyrinth wieder quasilplanar und der Beweis des Satzes ist abgeschlossen. ■

6 Fallenkonstruktion II

Betrachten wir noch einmal das 3. Beispiel am Ende von Kapitel 4. Als A -Test sind wir von folgendem Labyrinth \mathcal{L} ausgegangen und hatten angenommen, daß das periodische Verhalten der Maus darin besteht, abgesehen von Testläufen erst zweimal den rechten und dann einmal den linken Kreis jeweils in Gegenrichtung zu durchlaufen, d.h. daß $q = w_1^{-2}w_2^{-1}$ ist.

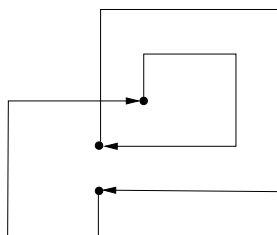
A -Test

\mathcal{L}



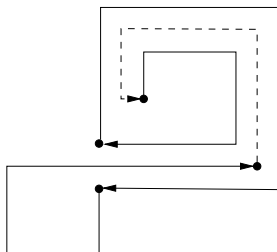
$$q = w_1^{-2}w_2^{-1}$$

\mathcal{C}_q (mit unterschiedlich lang gezeichneten Kanten)



Da $Rot(qf(q)) = 2$ gilt, ist \mathcal{C}_q nach Satz 1 nicht quasiplanar. Um den zugehörigen Fallenkandidaten dennoch verhaltenstreu in die Ebene einbetten zu können, müßten wir den Rotationsindex von $qf(q)$ ändern können, ohne daß die Maus ihr Verhalten wesentlich ändert.

Wenn es z.B. möglich wäre zwischen w_2^{-1} und w_1^{-1} noch eine Linksspirale mit 3 Linksdrehungen zu hängen, wäre der Fallenkandidat quasiplanar und wir müßten uns nur noch um die Randpunktfrage kümmern:



Nun können wir aber nicht davon ausgehen, daß ein solcher Spiraleinbau auf das Verhalten der Maus keinen wesentlichen Einfluß hat.

Dieses Problem ist uns in ähnlicher Form schon einmal begegnet, als es darum ging, den Fallenkandidaten durch Ausweitung seiner Kanten so in die Ebene einzubetten, daß sich das Verhalten der Maus dadurch nicht wesentlich ändert. Wir hatten uns dazu überlegt, daß die Maus aufgrund ihres endlichen Gedächtnisses zwar durchaus unterscheiden kann, ob eine Kante einmal oder mehrmals hintereinander in eine bestimmte Richtung führt, daß es aber eine Zahl α gibt, so daß sie nicht mehr auseinanderhalten kann, ob sie einen geradeauslaufenden Gang der Länge α einmal oder mehrmals hintereinander abgelaufen ist. Ursache dafür ist, daß ein endlicher Automat immer nur ein modulo-Zähler ist und sich die Maus die Anzahl ihrer Geradeausschritte daher immer nur modulo einer bestimmten Zahl merken kann.

Das gleiche gilt aber auch für Drehungen. So wird ihr Verhalten nach einer 360° Drehung beim Durchlaufen eines Spiralganges möglicherweise anders aussehen als nach zweien, aber es wird auch hier wieder eine Zahl α geben, so daß sie α 360° -Drehungen von 2α , 3α , 4α Stück usw. nicht mehr unterscheiden kann.

Für unser Beispiel bedeutet das, daß wir zwar mit einer deutlichen Verhaltensänderung rechnen müssen, wenn wir zwischen w_2^{-1} und w_1^{-1} eine zusätzliche Linksspirale einbauen, wenn aber an dieser Stelle von vornherein bereits eine entsprechende Anzahl von Linksspiralen sitzen würde, dann könnten wir ihre Zahl verdoppeln, verdreifachen usw., ohne die Maus dadurch entscheidend zu beeinflussen und hätten somit ein Regulationsmechanismus für den Rotationsindex gewonnen.

Tatsächlich kann man Lemma 2 sehr viel allgemeiner beweisen, als wir das hier getan haben und zwar für beliebige Gänge anstelle einzelner Kanten. In dieser Form lautet das Lemma dann:

Lemma 6.1 Für jede Maus A und für jedes $v \in R$ gibt es eine Zahl $\alpha(v) \in \mathbf{N}$, so daß für jedes Prälabyrinth $\mathcal{L} = (V, E)$ und für jedes $t \in \mathbf{N}$ folgendes gilt:

$$(P, v^{\alpha(v)}, Q) \in E \Rightarrow \mathcal{L} \Delta_A \mathcal{L}(P, v^{\alpha(v)} \vdash v^{\alpha(v) \cdot t}, Q)$$

In Worten: für jedes $v \in R$ existiert eine natürliche Zahl $\alpha(v)$, so daß man jede Prälabyrinthkante mit Markierung $v^{\alpha(v)}$ in einem Prälabyrinth \mathcal{L} beliebig ausweiten kann und dadurch immer wieder ein Prälabyrinth erhält, daß zum Ausgangsprälabyrinth A -treu ist.

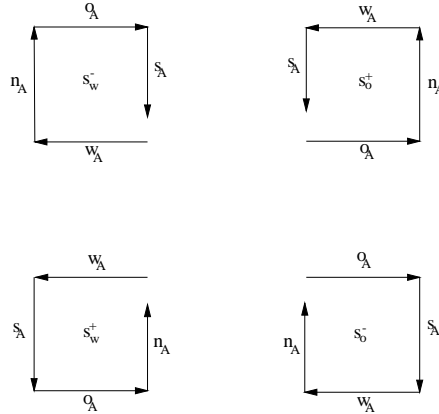
Für das Labyrinth \mathcal{L}^* bedeutet das, daß man jeden Gang mit Markierung $v^{\alpha(v)}$ beliebig ausweiten kann, ohne daß sich das Verhalten der Maus ändert, wenn wir sie nur in den Gangendpunkten und im übrigen Labyrinth beobachten.

Da sich der Beweis nicht sehr von dem unterscheidet, den wir für den einfachen Fall der einzelnen Richtung geführt haben, wollen wir ihn hier nicht besprechen. Man kan ihn in [] nachlesen.

Unser Ziel ist die verhaltenstreue Planarisierung von Fallenkandidaten und die neue Idee besteht darin, im A -Test an bestimmten Stellen von vornherein spezielle Rechts- bzw. Linksspiralgänge vorzusehen, durch deren Ausweitung der Ro-

tationsindex des Kreislabirynths \mathcal{C}_q gesteuert werden kann. Aufgrund des Lemmas können wir dabei davon ausgehen, daß die Ausweitung auf das Verhalten der Maus keinen wesentlichen Einfluß hat, sofern diese Spiralgänge ausreichend viele Windungen haben.

Betrachten wir die folgenden 4 A -flexiblen Spiralgänge



$$\begin{aligned} s_w^- &= w_A n_A o_A s_A \\ s_o^+ &= o_A n_A w_A s_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_w^+ &= w_A s_A o_A n_A \\ s_o^- &= o_A s_A w_A n_A \end{aligned}$$

deren Markierungen zur Abkürzung mit s_w^- , s_w^+ , s_o^+ und s_o^- bezeichnet werden, wobei der untere Index die Anfangsrichtung und der obere die Drehrichtung angibt, und zwar steht + für Links- und – für Rechtsspiralen.

Für jede dieser Spiralen gibt es dann aufgrund des Lemmas eine Zahl α , so daß die Maus nicht unterscheiden kann, ob sie in einem Labyrinth α mal oder ein Vielfaches davon durch einen solchen Spiralgang gelaufen ist.

Um später nicht zwischen den α -Werten der 4 Spiralen unterscheiden zu müssen, bilden wir wieder ihr kgV :

$$\text{Sei } T_A = K g V \{ \alpha(s_w^-), \alpha(s_w^+), \alpha(s_o^+), \alpha(s_o^-) \}.$$

Die Markierungen, die man erhält, indem man jede dieser 4 Spiralen T_A mal hintereinander hängt, nennen wir dann Wirbel, wobei wir in Analogie zu den Spiralen den negativen und positiven Westwirbel sowie den positiven und negativen Ostwirbel unterscheiden und folgende Bezeichnungsweise einführen:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \text{wirb}_w^- &= (s_w^-)^{T_A} \quad (\text{negativer Westwirbel}) \\ \text{wirb}_w^+ &= (s_w^+)^{T_A} \quad (\text{positiver Westwirbel}) \\ \text{wirb}_o^+ &= (s_o^+)^{T_A} \quad (\text{positiver Ostwirbel}) \\ \text{wirb}_o^- &= (s_o^-)^{T_A} \quad (\text{negativer Ostwirbel}) \end{aligned}$$

Wir wissen dann aufgrund des Lemmas, daß jeder Gang in einem Labyrinth, der mit einem dieser Wirbel markiert ist, beliebig ausgeweitet werden kann, ohne daß sich das Verhalten von A dadurch wesentlich verändert, und haben somit eine Möglichkeit an der Hand, den Rotationsindex zu steuern.

Betrachten wir dazu den positiven Westwirbel, der aus der Spirale s_w^+ entsteht. Dann gilt:

$$Rot(s_w^+) = 3/4, Rot((s_w^+)^2) = 7/4 = Rot(s_w^+) + 1, Rot((s_w^+)^3) = Rot((s_w^+)^2) + 1 = Rot(s_w^+) + 2, \text{ usw.}$$

D.h. der Rotationsindex erhöht sich für jedes weitere Anhängen von s_w^+ um 1, so daß wir allgemein

$$Rot((s_w^+)^k) = Rot(s_w^+) + (k - 1) = k - 1/4 \text{ erhalten.}$$

Insbesondere gilt dann für den positiven Westwirbel:

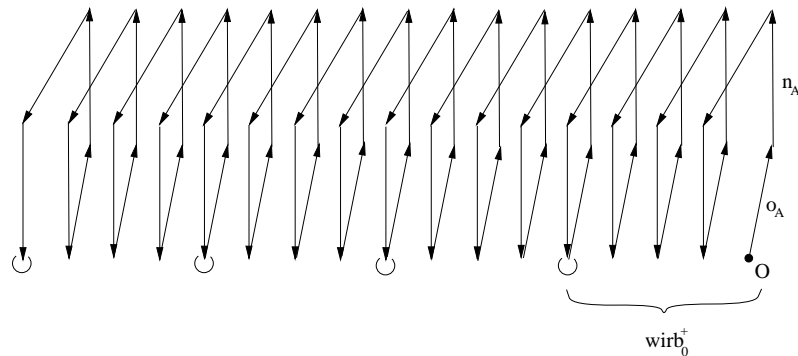
$$\begin{aligned} & Rot((wirb_w^+)^{k+1}) \\ &= Rot((s_w^+)^{T_A(k+1)}) = T_A(k+1) - 1/4 \\ &= Rot((s_w^+)^{T_A}) + kT_A \\ &= Rot((wirb_w^+)) + kT_A \end{aligned}$$

- und für die anderen Wirbel gilt Entsprechendes -, so daß wir folgende Beobachtung festhalten können:

Beobachtung:

Iteriert man einen positiven (negativen) Wirbel $(k+1)$ -mal erhöht, (vermindert) sich der Rotationsindex um kT_A .

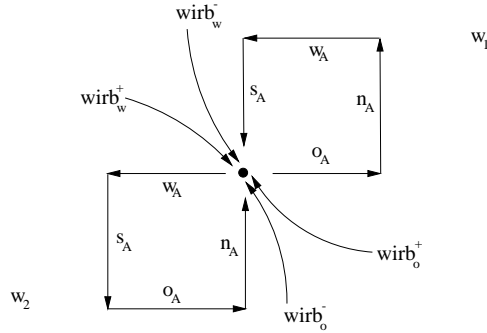
Wir wissen, daß die Iteration von Wirbeln auf das Verhalten der Maus keinen entscheidenden Einfluß hat. Im folgenden Beispiel mit $T_A = 4$ wäre sie also, sofern sie den Gang mit dem negativen Ostwirbel überhaupt durchläuft stets im gleichen Zustand, wenn sie einen der eingekreisten Punkte erreicht.



Gleichzeitig senkt bzw. erhöht die Wirbeliteration aber den Rotationsindex um Vielfache von T_A , so daß wir sie nutzen können um den Kreis mit Markierung q im Fallenkandidaten verhaltenstreu zu planarisieren.

Wir müssen lediglich dafür sorgen, daß von vornherein wenigstens ein positiver und ein negativer Wirbel in q auftritt und das erreichen wir, indem wir die Wirbel bereits im Beobachtungslabyrinth vorsehen, und zwar an folgenden Stellen:

\mathcal{L}
A-Test



d.h.

$$w_1 = wirb_o^+ s_o^+ wirb_w^- \quad \text{und}$$

$$w_2 = wirb_w^+ s_w^+ wirb_o^-$$

Man beachte, daß wir in den Fällen $q = \square$, $q = w_1^n$ und $q = w_2^n$, in denen wir bereits quasiplanare Fallenkandidaten konstruiert haben, vom A-Test lediglich verlangt haben, daß die beiden Kreislabirynthe \mathcal{C}_{w_1} und \mathcal{C}_{w_2} A-flexibel und quasiplanar sind und daß Anfang und Ende von w_1 und w_2 o und s bzw. w und n sind.

Da der neue A-Test diese Bedingungen erfüllt, können wir alle zuvor erzielten Lösungen darauf übertragen und daher von nun an davon ausgehen, daß der A-Test generell wie oben angegeben aussieht.

Insbesondere sind \mathcal{C}_{w_1} und \mathcal{C}_{w_2} quasiplanar, da sich in w_1 die Linksdrehungen im positiven Ostwirbel und die Rechtsdrehungen im negativen Westwirbel gegenseitig aufheben und in w_2 für den positiven West- und den negativen Ostwirbel das Gleiche zutrifft, so daß sich in beiden Fällen Rotationsindex 1 ergibt.

Genauer errechnen wir:

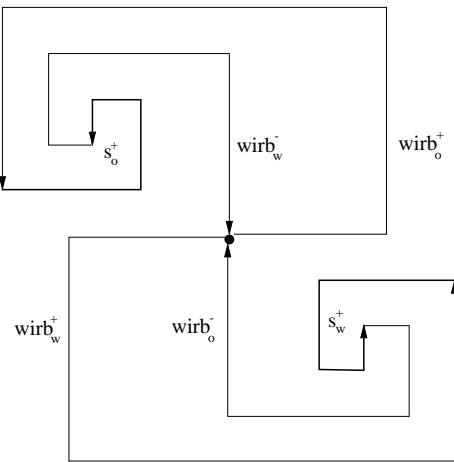
$$Rot(w_1 f(w_1)) = Rot(w_1) + Rot(l(w_1) f(w_1)) = Rot(s_o^+) + Rot(s_o) = 3/4 + 1/4 = 1.$$

Entsprechend zeigt man:

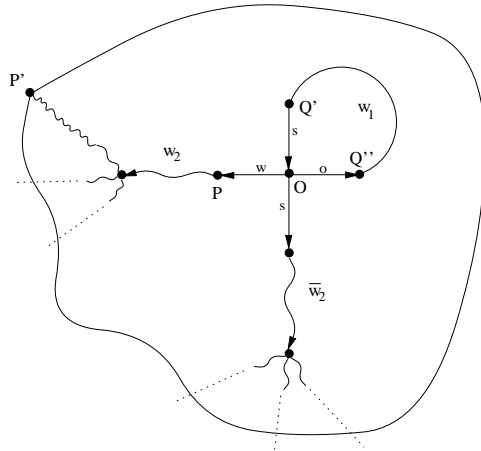
$$Rot((w_2 f(w_2))) = 1$$

d.h. \mathcal{C}_{w_1} und \mathcal{C}_{w_2} sind quasiplanar.

Damit ist aber auch der gesamte A-Test quasiplanar und kann durch Kantenausweitung in die Ebene eingebettet werden, was hier für den einfachsten Fall - nämlich $T_A = 1$, wo jeder Wirbel mit der zugehörigen Spirale übereinstimmt - einmal durchgeführt ist:



Bevor wir uns nun wieder der Diskussion des Falls zuwenden, in dem die Markierung des reduzierten wiederholt abgelaufenen Wegstücks der Maus im A -Test von der Form $q = w_1^{n_1} w_2^{m_1} \dots w_1^{n_k} w_2^{m_k}$ ist, wollen wir noch einmal auf die noch offene Randpunktfrage im Fall $q = w_1^n$ zurückkommen. Dabei sind wir o.B.d.A. von $n > 0$ ausgegangen und haben den Fallenkandidaten \mathcal{F} aus der Abwicklung \mathcal{L}^{w_1} konstruiert, indem wir die Wege an geeigneten Stellen gekappt haben:



\mathcal{F} ist dann sicher quasiplanar, da es ein endlicher Baum über dem Kreislabirynth \mathcal{C}_{w_1} ist und \mathcal{C}_{w_1} für $w_1 = wirb_o^+ s_o^+ wirb_w^-$ wegen $Rot(w_1 f(w_1)) = 1$ quasiplanar ist.

Um nun die Frage nach der Existenz eines außerhalb des Kreises mit Markierung w_1 liegenden Randpunkts zu beantworten, stellen wir zunächst fest, daß der Punkt P der durch einen Schritt nach Westen von O aus erreichbar ist, rechts vom Weg $Q' \xrightarrow{s} Q''$ liegt. Da $Rot(w_1 f(w_1)) > O$ gilt, der Kreis mit Markierung w_1 also mehr nach links als nach rechts dreht, bedeutet das, daß P nach Definition außerhalb dieses Kreises liegt. Damit liegt aber auch jeder Randpunkt von \mathcal{F} außerhalb, den wir erreichen, wenn wir einen der Baumäste entlang wandern, bis es nicht mehr weitergeht, z.B. also bis zum Punkt P' .

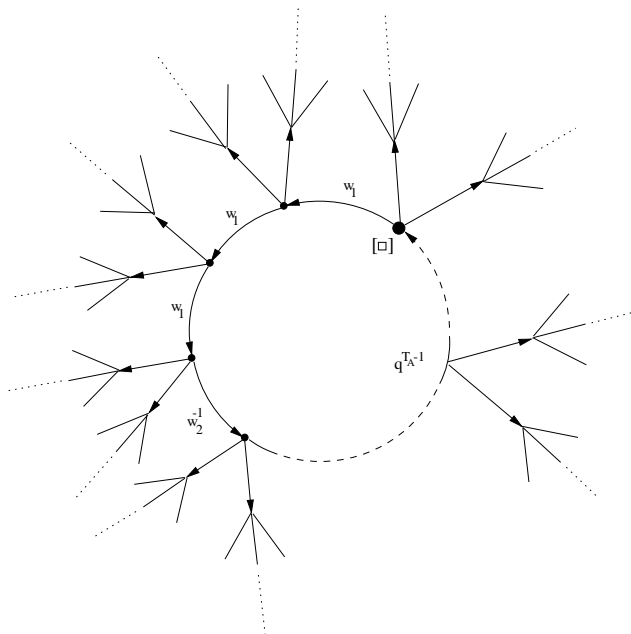
\mathcal{F} ist also quasiplanar und P' ist ein außerhalb aller Kreise liegender Randpunkt von \mathcal{F} . Und da die zweite Eigenschaft bei der Einbettung von \mathcal{F} in die Ebene erhalten bleibt, ist \mathcal{F} somit A -Falle und wir sind fertig.

Gehen wir nun wieder davon aus, daß $q = w_1^{n_1} w_2^{m_1} \dots w_1^{n_k} w_2^{m_k}$ die Markierung des reduzierten wiederholt abgelaufenen Wegstücks der Maus ist, und wenden uns dabei zuerst dem Spezialfall $q = w_1^3 w_2^{-1}$ zu, den wir am Ende von Kapitel 4 ebenfalls bereits betrachtet haben. Da sich die Drehungen in den Wirbeln am Anfang und am Ende von $w_1 = \text{wirb}_o^+ s_o^+ \text{wirb}_w^-$ und $w_2 = \text{wirb}_w^+ s_w^+ \text{wirb}_o^-$ gegenseitig aufheben, erhalten wir wie für $w_1 = s_o^+$ und $w_2 = s_w^+$ $\text{Rot}(qf(q)) = 2$, d.h. \mathcal{C}_q ist nicht quasiplanar.

Im Gegensatz zu vorher können wir nun aber durch die Iteration von Wirbeln den Rotationsindex um Vielfache von T_A senken oder erhöhen, ohne daß die Maus ihr Verhalten wesentlich ändert. Das Problem ist, daß sich auf diese Weise in der Regel nicht $+1$ oder -1 erreichen läßt.

Nun können wir einen endlichen und A -flexiblen Fallenkandidaten \mathcal{F} statt aus der Abwicklung \mathcal{L}^q auch aus der Abwicklung $\mathcal{L}^{q^{T_A}}$ gewinnen, in der alle im Anfangspunkt beginnenden reduzierten Wege im A -Test abgewickelt sind bis auf den Kreis mit Markierung q^{T_A} , und die im Beispiel $q = w_1^3 w_2^{-1}$ schematisch so aussieht:

$\mathcal{L}^{q^{T_A}}$



Auch in dieser Abwicklung bleibt der Träger des Weges von A endlich, der einzige Unterschied besteht darin, daß auf einen Kreisdurchlauf von A in der neuen Abwicklung T_A in der Abwicklung \mathcal{L}^q kommen, so daß sich ein endliches A -flexibles Unterlabyrinth \mathcal{F} extrahieren läßt, das A von $\mathcal{L}^{q^{T_A}}$ nicht unterscheiden kann, wenn sie im Punkt $[p^{-1}]$ gestartet wird.

Wie man sich leicht überlegen kann, gilt dann für den Rotationsindex $Rot(q^{T_A} f(q^{T_A})) = T_A \cdot Rot(qf(q))$, so daß wir im Beispiel $q = w_1^3 w_2^{-1}$ $Rot(q^{T_A} f(q^{T_A})) = T_A \cdot 2$ erhalten. Und nun haben wir durch den Einbau zusätzlicher Wirbel immerhin die Möglichkeit Rotationsindex 0 zu erreichen, ohne daß die Maus ihr Verhalten wesentlich ändert, indem wir z.B. ans Ende von q^{T_A} , das ja mit w_2^{-1} und damit mit dem Inversen des positiven Westwirbels endet, zwei weitere dieser inversen Wirbel hängen. Wir bilden also

$$\tilde{q} = q^{T_A} (wirb_w^+)^{-2}$$

und erhalten dann

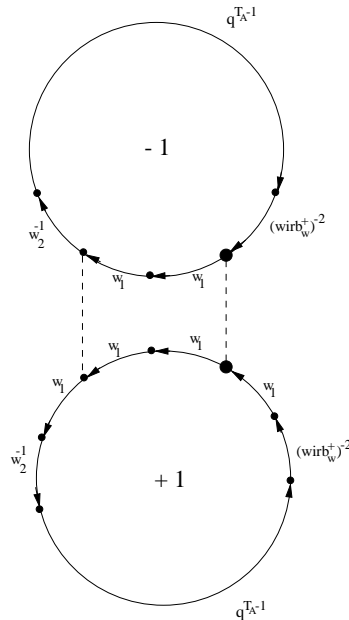
$$Rot(\tilde{q}f(\tilde{q})) = Rot(q^{T_A} f(q^{T_A})) - 2T_A = 0$$

Unser Ziel ist aber Rotationsindex +1 oder -1 zu erreichen. Da $Rot(w_1 f(w_1)) = 1$ gilt, liegt es nahe, ein w_1 an \tilde{q} anzuhängen bzw. das erste w_1 aus \tilde{q} herauszunehmen. Sei also $q' = \tilde{q}w_1$ und $q'' = w_1^2 w_2^{-1} q^{T_A - 1} (wirb_w^+)^{-2}$, dann erhalten wir, da $Rot(xy) = Rot(xf(y)) + Rot(y)$ für alle $xy \in R$ gilt:

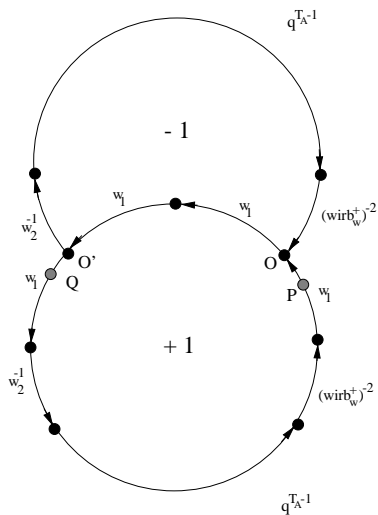
$$Rot(q'f(q')) = Rot(\tilde{q}f(w_1)) + Rot(w_1 f(\tilde{q})) = Rot(\tilde{q}f(\tilde{q})) + Rot(w_1 f(w_1)) = 0 + 1 = 1$$

$$\text{und } Rot(\tilde{q}f(\tilde{q})) = Rot(w_1 f(w_1)) + Rot(q''f(\tilde{q})) = 1 + Rot(q''f(q'')) \\ \text{d.h. } Rot(q''f(q'')) = -1.$$

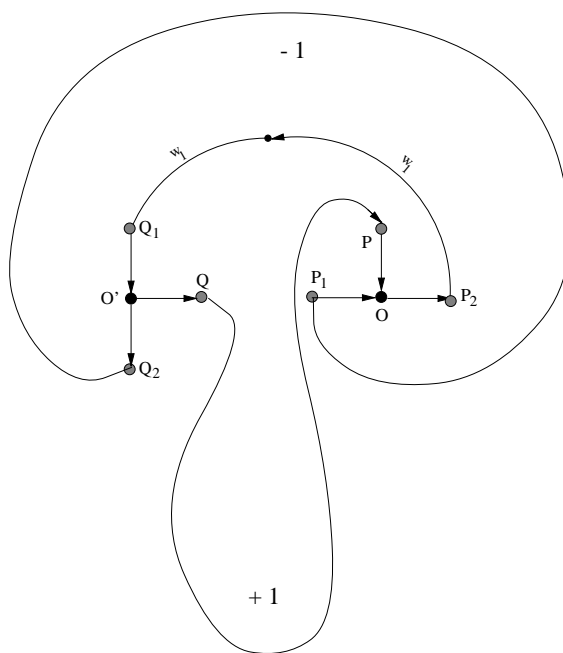
Sowohl Hinzufügen als auch Herausnehmen eines w_1 führen also zu quasiplanaren Kreislabyrinthen $C_{q'}$ bzw. $C_{q''}$. Das Problem ist, daß die entsprechenden Umbaumaßnahmen im Fallenkandidaten bewirken können, daß die Maus ihr Verhalten ändert und alle außerhalb des Kreises mit Markuerng q' bzw. q'' liegenden Randpunkte besucht, so daß wir daraus kein fangendes Netzlabyrinth mehr konstruieren können.



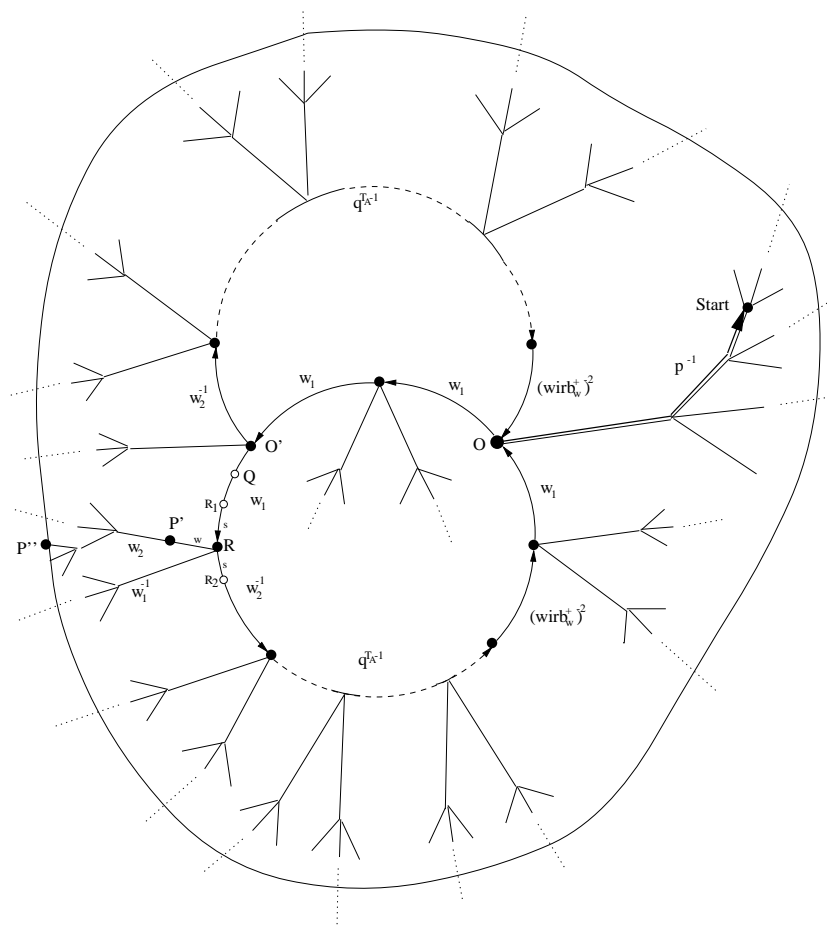
Der entscheidende Trick besteht nun darin, die beiden Kreislabyrinthe $\mathcal{F}_{q'}$ und $\mathcal{F}_{q''}$ im Weg mit Markierung w_1^2 zur Deckung zu bringen, d.h. wir schieben sie zusammen zu folgendem Labyrinth \mathcal{L}_1 mit zwei Kreisen:



Wir wissen dann aufgrund von Satz 2, daß \mathcal{L}_1 quasiplanar ist, da jedes Kreislabyrinth für sich quasiplanar ist und die Punkte P und Q außerhalb des oberen Kreises liegen. Wenn wir die Situation in den Punkten O_1 und O_2 nämlich genauer zeichnen, sieht man, daß Q und P links von $Q_1 \xrightarrow{s^2} Q_2$ bzw. $P_1 \xrightarrow{o^2} P_2$ liegen, während der obere Kreis mehr nach rechts als nach links dreht und das heißt ja gerade, daß sie außerhalb liegen.



Wenn wir dann in allen Punkten von \mathcal{L}_1 , die von O aus durch einen reduzierten Weg erreichbar sind, dessen Markierung aus $\{w_1, w_2^{-1}\}^*$ ist, alle im Startpunkt beginnenden reduzierten Wege des A -Tests in die noch freien Richtungen abwickeln und dann die Maus in dem Punkt starten, den man erreicht, wenn man von O aus den Weg mit Markierung p^{-1} abläuft (p war die Markierung des Vorlaufs der Maus im A -Test bevor ihr Verhalten periodisch wird), so läuft sie abgesehen von Testläufen zuerst den Weg mit Markierung p^{-1} in umgekehrter Richtung entlang, um dann für immer abwechselnd erst einmal durch den unteren und dann einmal durch den oberen Kreis zu laufen. Der Träger ihres Weges bleibt also auch in dem so erhaltenen Labyrinth \mathcal{L}_2 endlich, so daß wir einen endlichen und A -flexiblen Fallenkandidaten \mathcal{F}_2 in der bekannten Weise durch Kappen der Äste auch aus \mathcal{L}_2 konstruieren können.



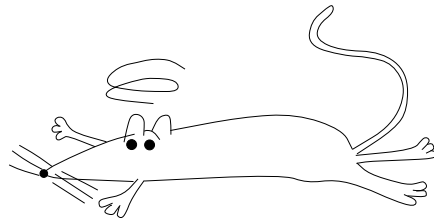
Dieser Fallenkandidat ist dann A -Falle, wenn er quasiplanar ist und einen außerhalb aller Kreise liegenden Randpunkt besitzt. Quasiplanar ist er bestimmt, da er ein endlicher Baum über dem endlichen Labyrinth \mathcal{L}_1 ist, von dem wir ja wissen, daß es quasiplanar ist.

Es verbleibt also nur noch die Frage nach einem außerhalb aller Kreise liegenden Randpunkt zu klären. Betrachten wir dazu die Lage im Punkt R genauer.

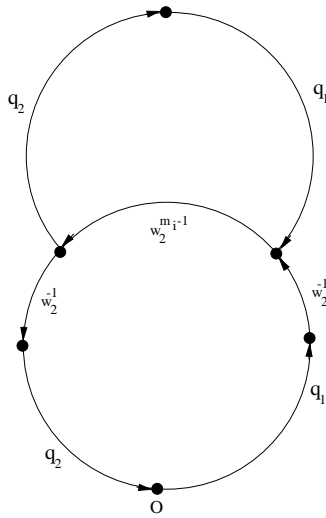
w_1 endet mit Süd während w_2^{-1} damit beginnt, so daß die beiden übrigen in R beginnenden Wege nach Osten und Westen führen. Sei P' der Punkt in \mathcal{F}_2 der durch einen Schritt nach Westen von R aus erreicht wird. Klar, P' liegt rechts von $R_1 \xrightarrow{s^2} R_2$ und damit außerhalb des unteren Kreises, der ja Rotationsindex $+1$ hat. P' liegt aber auch außerhalb des oberen Kreises, da bereits der Punkt Q außerhalb davon liegt und P' von Q aus über einen Weg erreichbar ist, der nicht über Punkte des oberen Kreises führt.

Wenn wir dann von P' aus weiterlaufen, bis wir einen Punkt P'' erreichen, von dem aus es nicht mehr weitergeht, so ist daß ein außerhalb aller Kreise liegender Randpunkt von \mathcal{F}_2 , d.h. \mathcal{F} ist A -Falle.

Wir können dann wie bereits besprochen hergehen und die A -Falle durch Ausweitung ihrer A -flexiblen Gänge verhaltenstreu in die Ebene einbetten, um das Labyrinth einen Rahmen aus markierten Punkten legen und nur einen Punkt als Ausgang freilassen, den wir mit dem Bild von P'' in der planarisierten Falle durch einen Weg verbinden und schließlich noch alle Nichtlabyrinthpunkte im Inneren des Rahmen markieren. Die markierten Punkte definieren dann ein Labyrinth im Döppschen Sinn und wenn wir dann die Maus in dem Punkt starten, auf den der Startpunkt der A -Falle bei der Einbettung in die Ebene fällt, so wird sie für immer herumirren und nie den Ausgang finden.



Alles was wir jetzt am Beispiel $q = w_1^3 w_2^{-1}$ durchgesprochen haben, läßt sich direkt verallgemeinern für den Fall, daß sich in $q = w_1^{n_1} w_2^{m_1} \dots w_1^{n_k} w_2^{m_k}$ mindestens ein Exponent betragsmäßig von 1 unterscheidet. Angenommen dieser Exponent ist ein m_i mit $m_i < 1$ - die übrigen Fälle gehen analog -, dann können wir zunächst wieder durch Iteration eines Wirbels in q^{T_A} ein \tilde{q} mit $Rot(\tilde{q}f(\tilde{q})) = 0$ erreichen und anschließend für $\tilde{q} = q_1 w_2^{m_i} q_2$ folgendes Labyrinth \mathcal{L}_1 konstruieren:

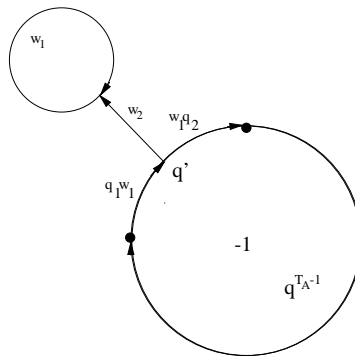


Aus \mathcal{L}_1 läßt sich dann wie für den Spezialfall $q = w_1^3 w_2^{-1}$ demonstriert eine A-Falle gewinnen.

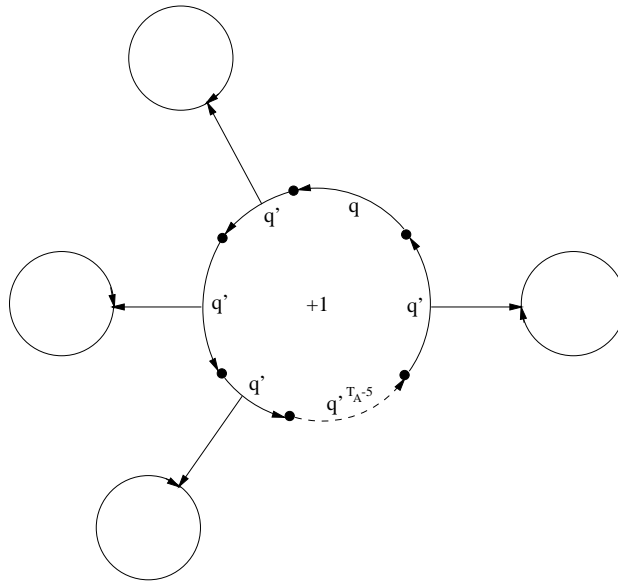
Wenn sich dagegen kein Exponent von +1 oder -1 unterscheidet, ist noch einmal eine andere Vorgehensweise erforderlich, die hier aber nur noch andeutungsweise vorgeführt werden soll, da wir den schwierigeren Fall bereits erledigt haben.

Sei also $q = w_1^{n_1} w_2^{m_1} \dots w_1^{n_k} w_2^{m_k}$ $n_i, m_i \in \{+1, -1\}$ ($1 \leq i \leq k$)

Um hier vom Kreis mit Markierung q^{T_A} , für den ja durch Wirbeleinbau \tilde{q} mit $Rot(\tilde{q}f(\tilde{q})) = 0$ erreicht werden kann zu einem quasiplanaren Kreis mit Rotationsindex +1 oder -1 zu gelangen, können wir ein w_1 oder sein Inverses in folgender Weise abspalten. Dabei gehen wir für die Zeichnung davon aus, daß $q = q_1 w_1 w_2^{-1} w_1 w_2 w_1 q_2$ gilt (die übrigen Fälle laufen dann analog):



Wir stellen dann fest, daß für $q' = q_1 w_1^2 q_2 q^{T_A-1}$ $Rot(q'f(q')) = Rot(q^{T_A} f(q^{T_A})) - 1$ gilt, so daß der Kreis mit Markierung q' durch Wirbeleinbau auf Rotationsindex -1 gebracht werden, da $Rot(q^{T_A} f(q^{T_A}))$ ein Vielfaches von T_A ist. Sollte einem das nicht passen, weil man keinen außenliegenden Randpunkt findet, kann man die "Drehrichtung" umkehren indem man das Herausziehen von w_1 , das wir hier nur einmal durchgeführt haben, $(T_A - 1)$ -mal durchführt.



Für diesen Kreis gilt dann $Rot(q'')f(q'') = Rot(q^{T_A} f(q^{T_A}) - T_A + 1$, wobei $q'' = (q_1 w_1^2 q_2)^{T_A - 1} q$ ist. Der Rotationsindex ist also um $T_A - 1$ geringer als der vom ursprünglichen Kreis mit Markierung q^{T_A} und kann daher durch Wirbeleinbau auf $+1$ gebracht werden, da $Rot(q^{T_A} f(q^{T_A})) - T_A$ ein Vielfaches von T_A ist.

Da die beiden Kreise unterschiedliche Drehrichtung haben, wird wenigstens einer von beiden geeignet sein, um im Fallenkandidaten einen außerhalb aller Kreise liegenden Randpunkt zu finden.

7 Literaturverzeichnis

- [1] L. Budach, On the Solution of the Labyrinth Problem for Finite Automata, EIK 11 10-12, 661-672 (1975).
- [2] L. Budach, Automata and Labyrinths, Math. Nachr. 86, 195-282 (1978).
- [3] S. S. Chern, Curves and Surfaces in Euclidean Space. In: Studies in Global Geometry and Analysis (ed.: S. S. Chern); Prentice-Hall 1967.
- [4] K. Döpp Automaten in Labyrinthen, EIK 7/2, 79-94; 3, 167-189 (1971).
- [5] A. Hemmerling, Labyrinth Problems, Labyrinth Searching Abilities of Automata, Teubner-Texte zur Mathematik (1989).
- [6] H. Hopf, Über die Drehung der Sehnen und Tangenten ebener Kurven, Compositio Mathematica 2, 50-62 (1935).
- [7] N. E. Kobrinski, B. A. Trachtenbrot, Einführung in die Theorie endlicher Automaten, Akademie-Verlag Berlin (1967).
- [8] H. Müller, Endliche Automaten und Labyrinth. EIK 7/4, 261-264 (1971).
- [9] Cl. E. Shannon, Presentation of a maze-solving machine. In: Cybernetics; Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found. (Editor: H. v. Foerster); 173-180 (1951).