Prof. Dr.-Ing. P. Pelz
Fachgebiet
Fluidsystemtechnik
Fachbereich 16 · Maschinenbau

Magdalenenstr.4
64289 Darmstadt
Telefon (0 61 51) 16 - 6554
Telefax (0 61 51) 16 - 2453
E-Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Strömungslehre für die Mechatronik

Lösungen zur Übung 1

Lösung Aufgabe 1.1 – U-Rohr-Manometer

Die Druckverteilung in ruhender, schwerer Flüssigkeit ist im Inertialsystem:

$$p + \rho g z = const. \qquad \text{Gl. 1}$$

Der Druck p_L am linken Spiegel der Messflüssigkeit beträgt von der Flüssigkeit a kommend

$$p_L = p_1 + \rho_a g\left(\frac{\Delta h}{2} - h_1\right) \qquad \text{Gl. 2}$$

der Druck p_R am rechten Spiegel der Flüssigkeit b kommend

$$p_R = p_2 - \rho_b g\left(\frac{\Delta h}{2} + h_2\right) \qquad \text{Gl. 3}$$

Die Differenz ist demnach

$$p_L - p_R = p_1 - p_2 + \frac{\Delta h}{2} g(\rho_a + \rho_b) - g(\rho_a h_1 - \rho_b h_2) \qquad \text{Gl. 4}$$

andererseits aber auch der Druckunterschied an diesen Stellen in der Flüssigkeit c

$$p_L - p_R = \rho_c g \Delta h \qquad \text{Gl. 5}$$

Durch gleichsetzen erhält man die gesuchte Druckdifferenz

$$p_1 - p_2 = \rho_c g \Delta h\left(1 - \frac{\rho_a + \rho_b}{2\rho_c}\right) + g(\rho_a h_1 - \rho_b h_2) \qquad \text{Gl. 6}$$

Lösung Aufgabe 1.2 – Kugel als Dichtelement

a)

Auf die Kugel wirken die Auftriebskraft, die Gewichtskraft und die Druckkraft der Flüssigkeit.
Um den Druck nicht über der Oberfläche integrieren zu müssen, wird vom Archimedischen Prinzip Gebrauch gemacht. Dies besagt, dass sich das Gewicht eines eingetauchten Körpers scheinbar um das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit verringert. Dies kommt daher, dass die Druckkräfte an der Körperoberfläche eine resultierende Kraft vertikal nach oben ergeben.

Prof. Dr.-Ing. P. Pelz
Fachgebiet
Fluidsystemtechnik
Fachbereich 16 · Maschinenbau

Magdalenenstr.4
64289 Darmstadt
Telefon (0 61 51) 16 - 6554
Telefax (0 61 51) 16 - 2453
E-Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Diese Kraft – die Auftriebskraft – ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Flüssigkeitsvolumens:

$$F_a = \rho g V \qquad \text{Gl. 7}$$

Der von der Flüssigkeit umgebene Körper wird freigeschnitten, und es wird gedanklich so getan, als wäre der Körper komplett von Flüssigkeit umgeben. Dann berechnet sich die theoretische Auftriebskraft zu:

$$\begin{aligned} F_a &= \rho g V_{Kalotte} \\ &= \rho g \frac{\pi}{3} h_0^2 \left(3r_0 - h_0\right) \end{aligned} \qquad \text{Gl. 8}$$

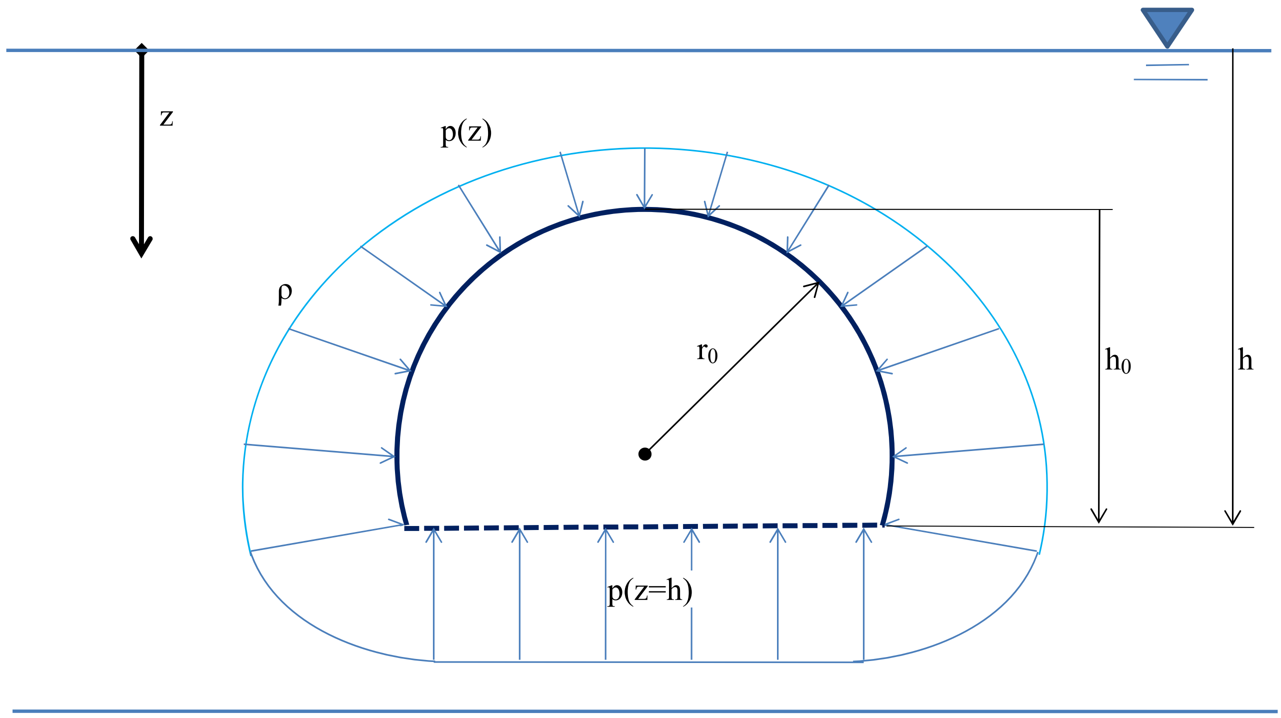

Abbildung 1: Druckverteilung um den vollständig eingetauchten Körper

Von dieser Auftriebskraft muss noch diejenige Kraft abgezogen werden, die aufgrund des (gedanklich aufgebrachten) Druckes an der Unterseite der Kalotte entstünde und in der Auftriebskraft enthalten ist:

$$\begin{aligned} F_{theo} &= p(z = h) A \\ &= \rho g h A \end{aligned} \qquad \text{Gl. 9}$$

Die Gesamtkraft F auf die Dichtkante beträgt nun:

Prof. Dr.-Ing. P. Pelz
Fachgebiet
Fluidsystemtechnik
Fachbereich 16 · Maschinenbau

Magdalenenstr.4
64289 Darmstadt
Telefon (0 61 51) 16 - 6554
Telefax (0 61 51) 16 - 2453
E-Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\begin{aligned} F &= G - \left(F_a - F_{theo)}\right) \\ &= G - \rho g \frac{\pi}{3} h_0^2 \left(3r_0 - h_0\right) + \rho g h A \end{aligned}$$ Gl. 10

Die Fläche A kann über geometrische Beziehungen mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden:

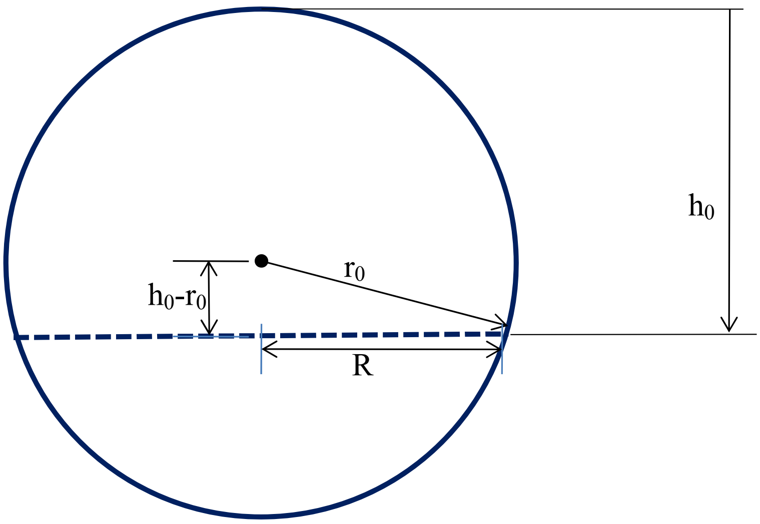

Abbildung 2: Berechnung der Querschnittsfläche A

$$\begin{aligned} R^2 &= r_0^2 - \left(h_0 - r_0\right)^2 \\ A = \pi R^2 &= \pi h_0 \left(2r_0 - h_0\right) \end{aligned}$$ Gl. 11

Dies führt auf die Kraft F:

$$F = G - \rho g h_0^2 \frac{\pi}{3}\left(3r_0 - h_0\right) + \rho g h h_0 \pi \left(2r_0 - h_0\right)$$ Gl. 12

b)

Wir gehen von Gl. 12 für die Kraft F aus und setzen $h = h_0$. Mit $F = G$ folgt unmittelbar:

$$\rho g h_0^2 \frac{\pi}{3}\left(3r_0 - h_0\right) = \rho g h h_0 \pi \left(2r_0 - h_0\right)$$ Gl. 13

Aufgelöst nach h_0/r_0 ergibt sich:

$$\frac{h_0}{r_0} = \frac{3}{2}$$ Gl. 14

Prof. Dr.-Ing. P. Pelz
Fachgebiet
Fluidsystemtechnik
Fachbereich 16 · Maschinenbau

Magdalenenstr.4
64289 Darmstadt
Telefon (0 61 51) 16 - 6554
Telefax (0 61 51) 16 - 2453
E-Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lösung Aufgabe 1.3 – Hydraulische Sicherheitskupplung

a) Grenzdrehzahl

Die Druckverteilung im rotierenden Bezugssystem lautet (vergleiche auch Vorlesung vom 12.05.2009):

$$p = p_0 - \rho g z + \frac{\rho}{2}\Omega^2 r^2 \qquad \text{Gl. } 15$$

ausgehend von der freien Oberfläche der Flüssigkeit

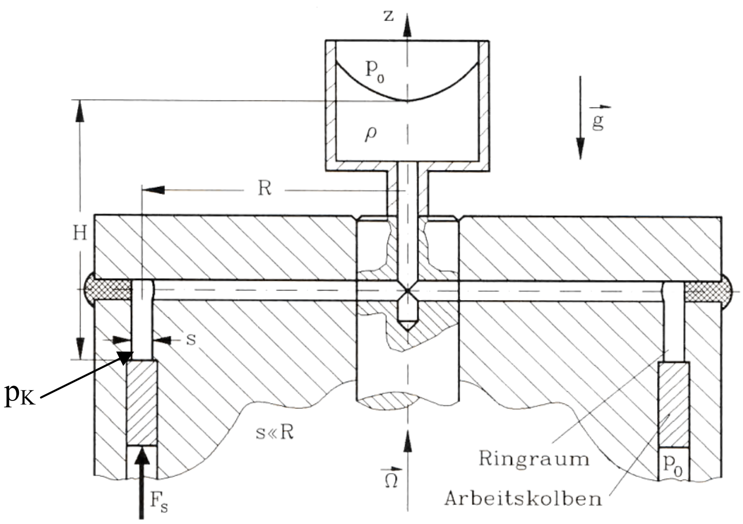

Abbildung 3

Damit berechnet sich der Druck p_k am Arbeitskolben im Ringraum wie folgt:

$$p_K = p_0 + \frac{\rho}{2}\Omega^2 R^2 + \rho g H \qquad \text{Gl. } 16$$

Unterhalb des Arbeitskolbens wirken die Schaltkraft F_S und der Umgebungsdruck p_0. Es lässt sich folgendes Gleichgewicht am Arbeitskolben aufstellen:

$$F_S + p_0 A = p_k A \qquad \text{Gl. } 17$$

$$\frac{F_S}{2\pi R s} + p_0 = p_0 + \frac{\rho}{2}\Omega^2 R^2 + \rho g H$$

mit

Prof. Dr.-Ing. P. Pelz
Fachgebiet
Fluidsystemtechnik
Fachbereich 16 · Maschinenbau

Magdalenenstr.4
64289 Darmstadt
Telefon (0 61 51) 16 - 6554
Telefax (0 61 51) 16 - 2453
E-Mail: thomas.bedarff@fst.tu-darmstadt.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$A = 2\pi R s$$ Gl. 18

Nach der Grenzdrehzahl umgestellt ergibt sich

$$\underline{\Omega = \left(\frac{F_S}{\rho \pi R^3 s} - \frac{2gH}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$ Gl. 19

a) Veränderung der Füllhöhe

Schreiben wir $H^{'}$ für die Füllhöhe bei doppelter Schaltdrehzahl $\Omega^{'} = 2\Omega$, so gilt:

$$\left(\frac{F_S}{\rho \pi R^3 s} - \frac{2gH^{'}}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{F_S}{\rho \pi R^3 s} - \frac{2gH}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$ Gl. 20

$$\Rightarrow H^{'} = 4H - \frac{3}{2}\frac{F_S}{\rho g \pi R s}$$