Wirkungsgrad und Kennlinie bei kompressiblen Strömungen.

$$\psi = \psi(\varphi, Re, Ma, \gamma) \checkmark \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \checkmark$$

$$\eta = \eta(\varphi, Re, Ma, \gamma) \checkmark \qquad Ma = \frac{nd}{a} \checkmark$$

$$\psi = \frac{2gH}{\pi^2 n^2 d^2} \checkmark$$

$$gH = \varsigma_2 - \varsigma_1 = \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + P_2 - P_1 \checkmark$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\underline{P} = \int \frac{dp}{\varrho} \checkmark$$

$$p = C \varrho^{\gamma}$$

Entropie ist konstant $\rightsquigarrow$ $\underline{P} = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \dfrac{p}{\varrho}$

$$gH = \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left[\frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1}\right].$$

Häufig ist $\dfrac{u^2}{2} \ll \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \dfrac{p}{\varrho}$

$$gH \approx \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\varrho_1}\left(\frac{p_2}{p_1} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 1\right).$$

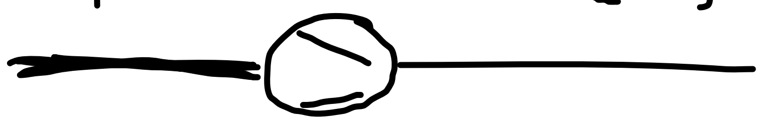
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5

Mit $p = \rho R T$ für thermisch ideales Gas

$$g H = c_p (T_2 - T_1)$$

$s = \text{const}$

T_1 ✓ $\qquad T_2 \;,\; T_2^* > T_2$ infolge Dissipation.



T_2 isentroper Vergleichsprozess

$T_2^* > T_2$ „gemessene" Temperatur.

$$(g H)^* = c_p (T_2^* - T_1) \quad ✓$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5

$$\eta = \frac{\varrho H}{(\varrho H)^*} = \frac{T_2 - T_1}{T_2^* - T_1}.$$

Zum polytropen Wirkungsgrad. $\gamma \to n$

$$(\varrho H)_{Pol} = \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

$1 \le n \le \gamma$ Polytropenexponent

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2^*}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$(gH)_{Pol} = \frac{n}{n-1} R \left(T_2^* - T_1\right) \quad \text{Polytrop}$$

$$gH = \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma-1} R}_{c_p} \left(T_2 - T_1\right) \quad \text{Isentrop.}$$

$$(gH)^* = \frac{\gamma}{\gamma-1} R \left(T_2^* - T_1\right) \quad \text{Totschlt.i.}$$

η s.o.

$$\eta_{Pol} := \frac{(gH)_{Pol}}{(gH)^*} = \frac{n}{n-1} \frac{\gamma - 1}{\gamma},$$

mit $\frac{n-1}{n} = \frac{\ln\left(T_2^*/T_1\right)}{\ln\left(p_2/p_1\right)}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5

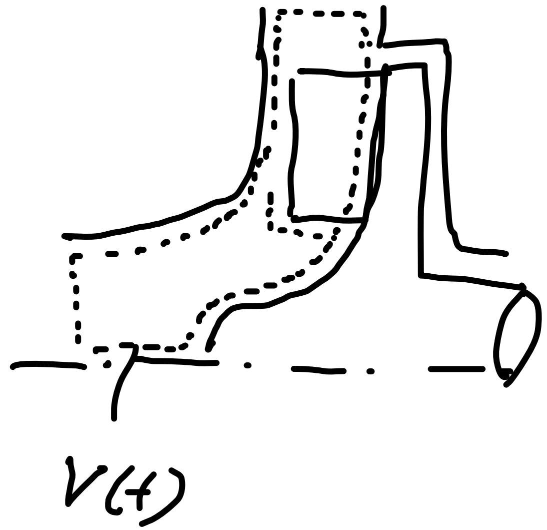
Kennlinie und Drallsatz.

Drallsatz: Die zeitliche Änderung des Dralles eines materiellen Volumens ist gleich dem Moment auf das Volumen.

Leonard Euler 1775

$$\frac{D\vec{D}}{Dt} = \vec{M}.$$

$$\vec{D} = \int_{V(t)} \vec{x} \times \rho \vec{c} \, dV$$



$\vec{x} \times \rho \vec{c} \, dV = \vec{x} \times \vec{c} \, dm$ ist der Drall $d\vec{D}$ eines Flüssigkeitsteilchens.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

$$\vec{M} = \oint_S \vec{x} \times \vec{t}\, dS + \int_V \vec{x} \times \rho \vec{k}\, dV$$

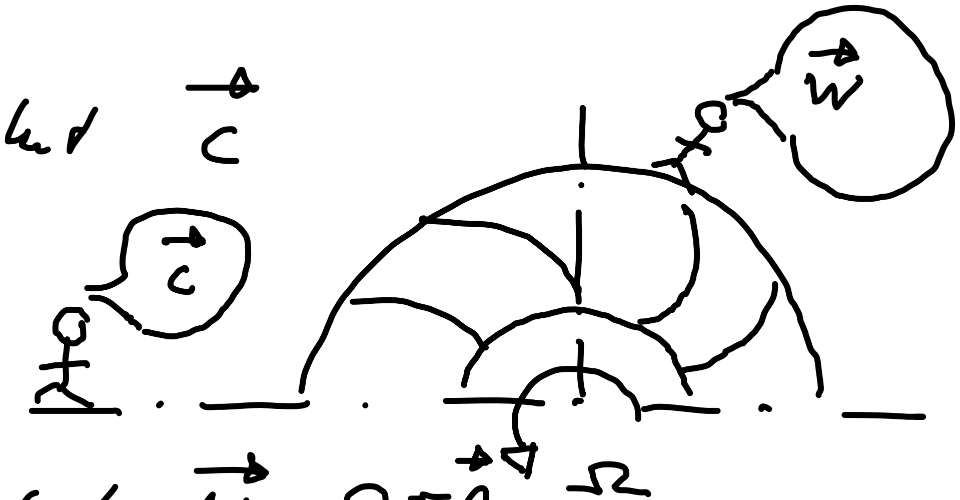
$$\vec{t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \qquad \rho \vec{k} = \vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V}$$

Spannungsvektor $\vec{t}$

Volumenkraft $\vec{f}$

Massenkraft $\vec{k}$

Absolutgeschwindigkeit $\vec{c}$



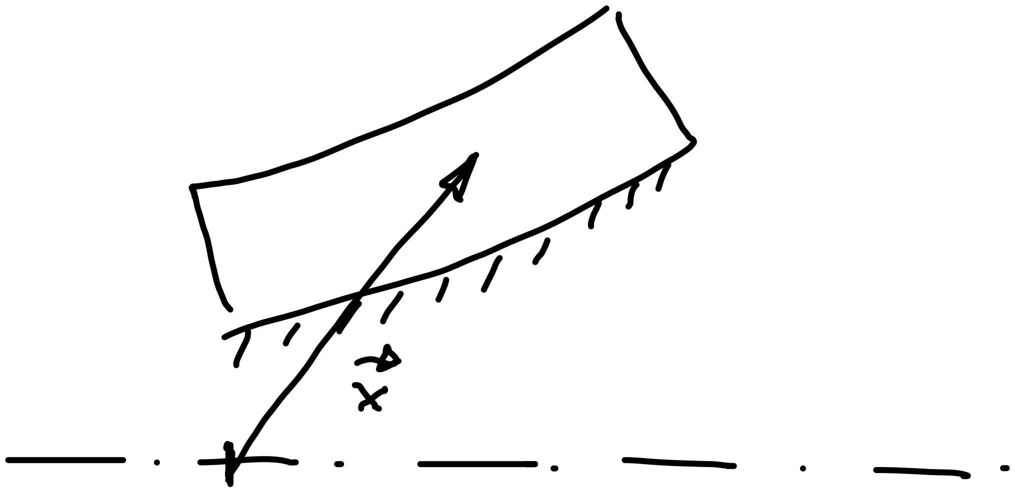
Relativgeschwindigkeit $\vec{w}$

Umfangsgeschwindigkeit $\vec{u} = \Omega r \vec{e}_\varphi$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5



i.d.R. Zylinderkoordinaten $\vec{x} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$.

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

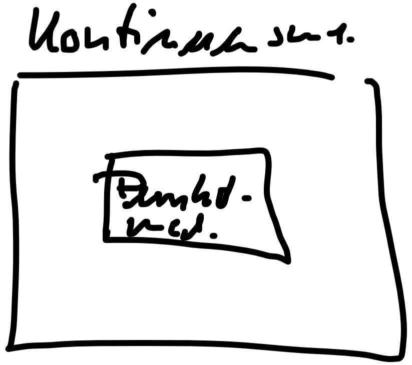
Sommersemester 2010

Fluidenenergiemaschinen

Vorlesung 5

Drallsatz ist ein Axiom der Mechanik und kann nicht aus dem Impulssatz hergeleitet werden

$$\vec{D} := \int_V \vec{x} \times \rho \vec{c} \, dV$$



$$\vec{I} = \int \rho \vec{c} \, dV$$

$$\vec{D} \overset{f}{=} \vec{x} \times \int \rho \vec{c} \, dV$$

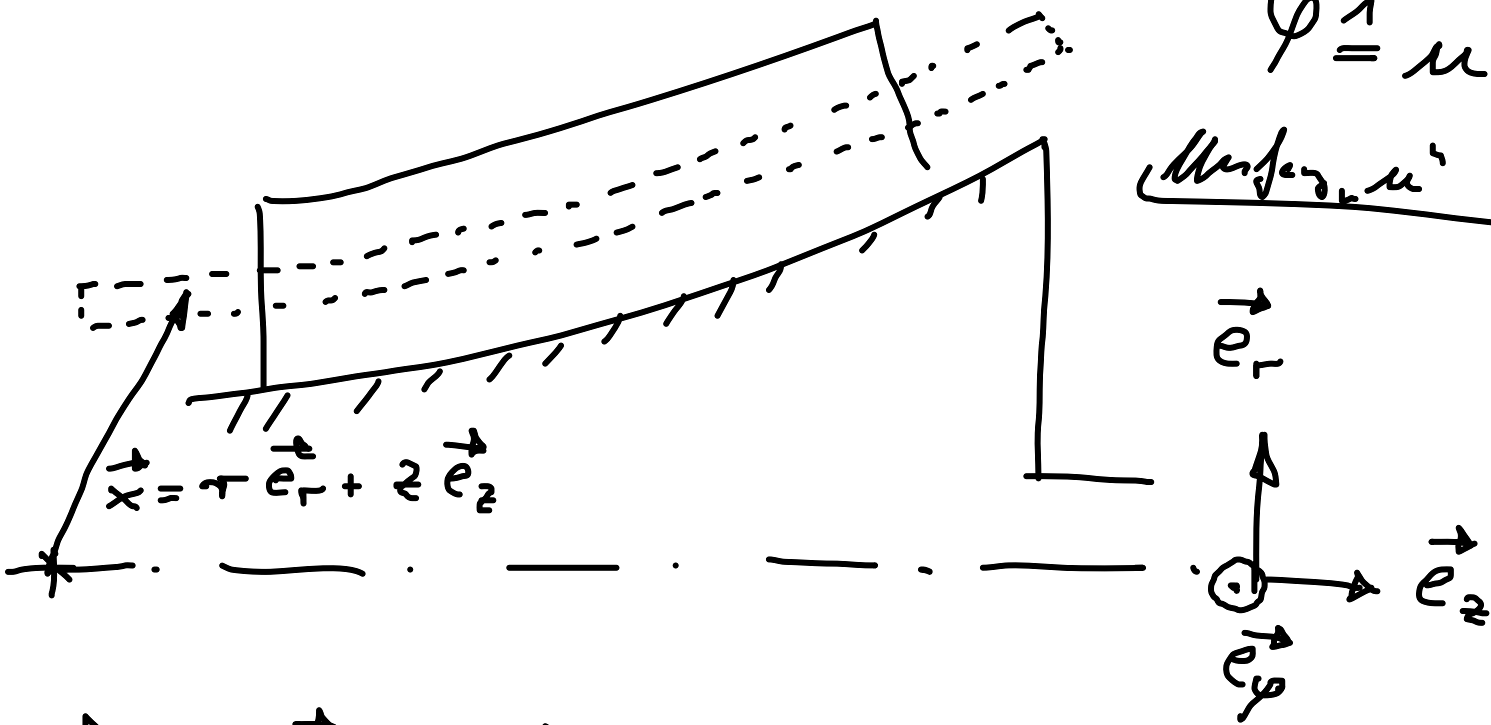
$$\int x \sin x \, dx \neq x \int \sin x \, dx .$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

Spezialfall der Eulerschen Gleichung für Turbomaschinen.

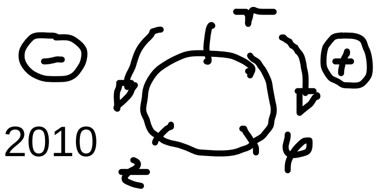
$\varphi \hat{=} u$

Umfangs-„u" Δ



$$\vec c = c_r\,\vec e_r + c_z\,\vec e_z + c_\varphi\,\vec e_\varphi$$

$$\vec x \times \vec c = \left(r\,\vec e_r + z\,\vec e_z\right) \times \left(c_r\,\vec e_r + c_z\,\vec e_z + c_\varphi\,\vec e_\varphi\right).$$



$$= -r\,c_z\,\vec e_\varphi + r\,c_\varphi\,\vec e_z + z\,c_r\,\vec e_\varphi - z\,c_\varphi\,\vec e_r$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5

Für die Leistung (zugeführt Arbeitsmaschine, abgeführt Kraftmaschine) ist nur die axiale Komponente des Dralls maßgebend

$$P = \vec{M} \cdot \vec{e}_z \, \Omega$$

Axiale Komponente des Dralls

$$(\vec{x} \times \vec{c}) \cdot \vec{e}_z = r c_\varphi = r c_u$$

Spezialfall: Konstanter Drall $r c_u$ über den Radius r:

$\rightsquigarrow$ Potentialwirbel.

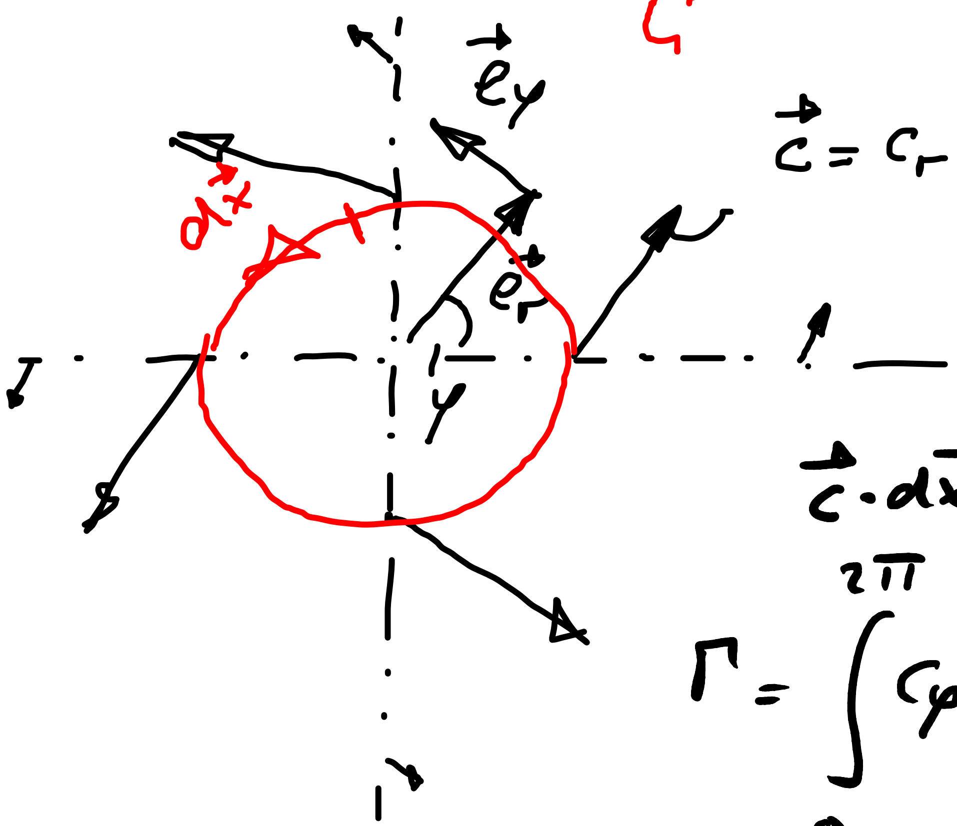
$$r c_u = const = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5

Die Stärke des Wirbels wird mit der Zirkulation $\Gamma := \oint_C \vec{c} \cdot d\vec{x}$



$$\vec{c} = c_r \vec{e}_r + c_\varphi \vec{e}_\varphi.$$

$$d\vec{x} = r\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{c} \cdot d\vec{x} = c_\varphi r\, d\varphi$$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} c_\varphi r\, d\varphi = 2\pi \underbrace{c_\varphi r}_{(\vec{x} \times \vec{c}) \cdot \vec{e}_z},$$

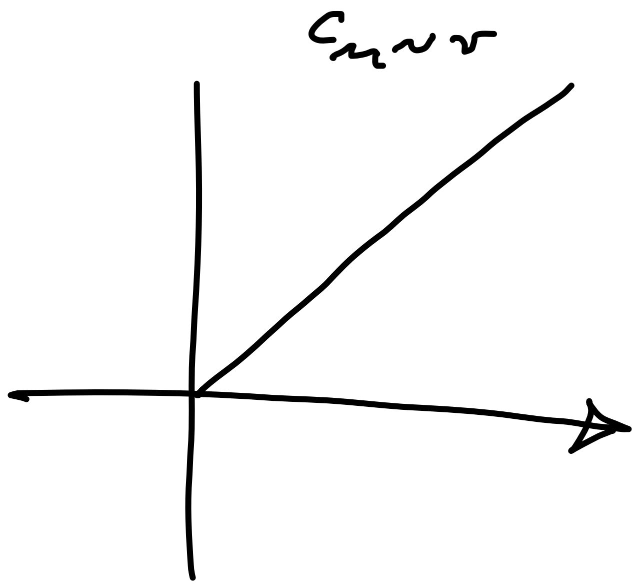
wenn $c_\varphi \neq c_\varphi(\varphi)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5

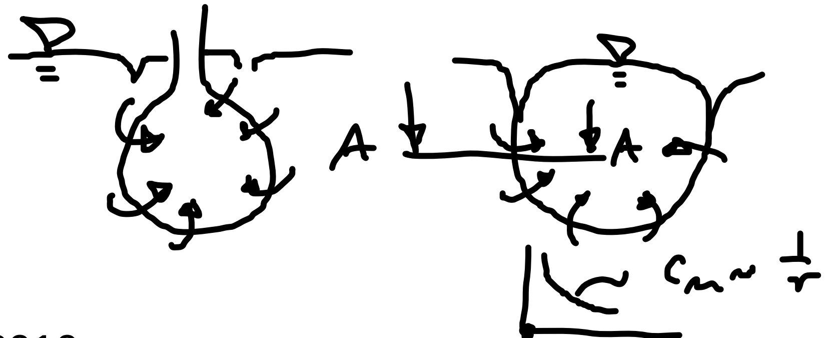
$\Gamma = \text{const}$

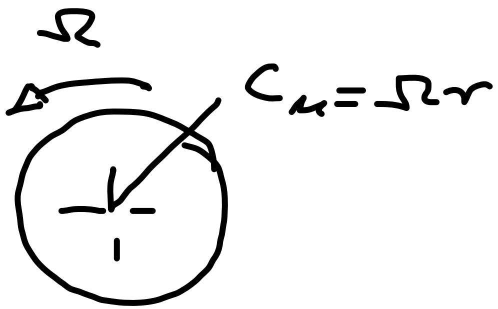


Potentialwirbel.

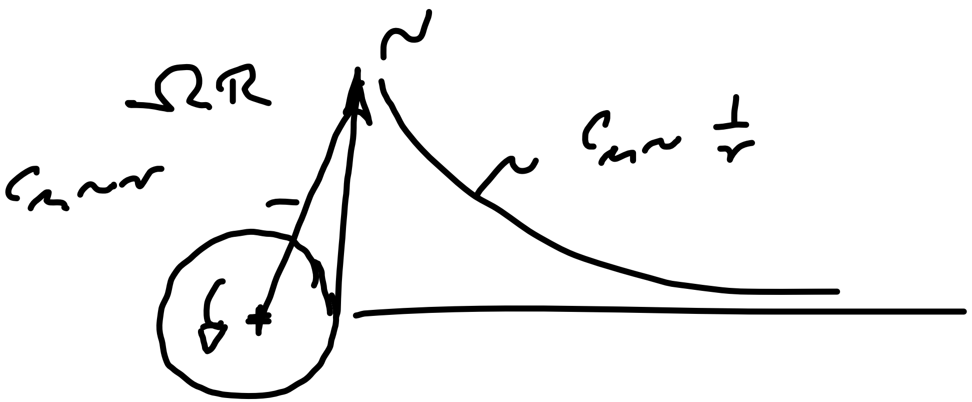
Starrkörperrotation.

z.B.:





Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5

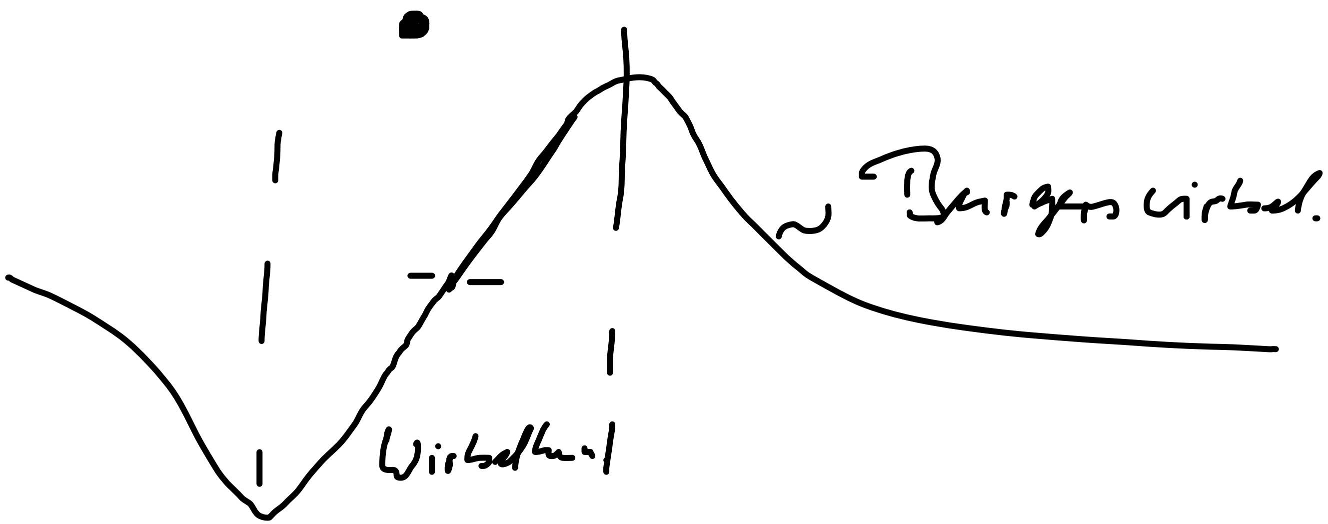


$R \to 0$ $\qquad \Omega \to \infty$

$\Omega R = \text{const}$ $\qquad c_u \to \infty$

Verdampft.

Kondensiert.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

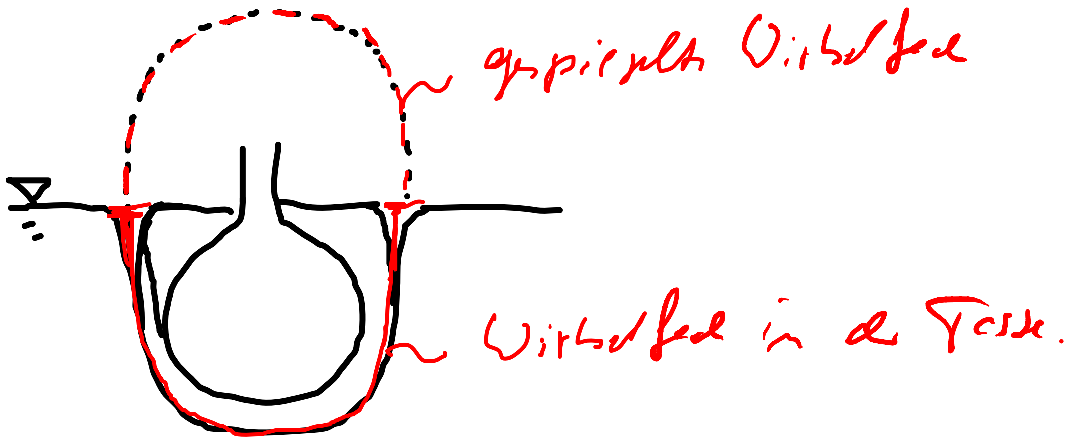
Fluidenenergiemaschinen

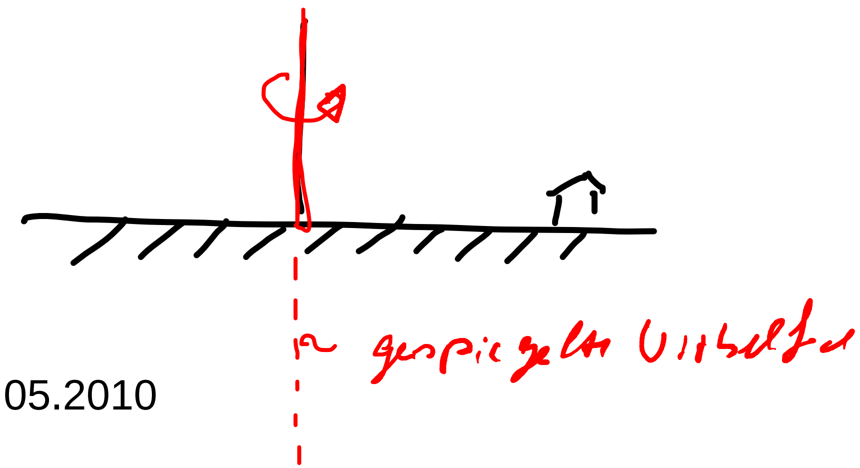
Vorlesung 5

Hinweis: $\boxed{\text{Wirbelfaden hat kein freies Ende.}}$

~~ist Ende~~

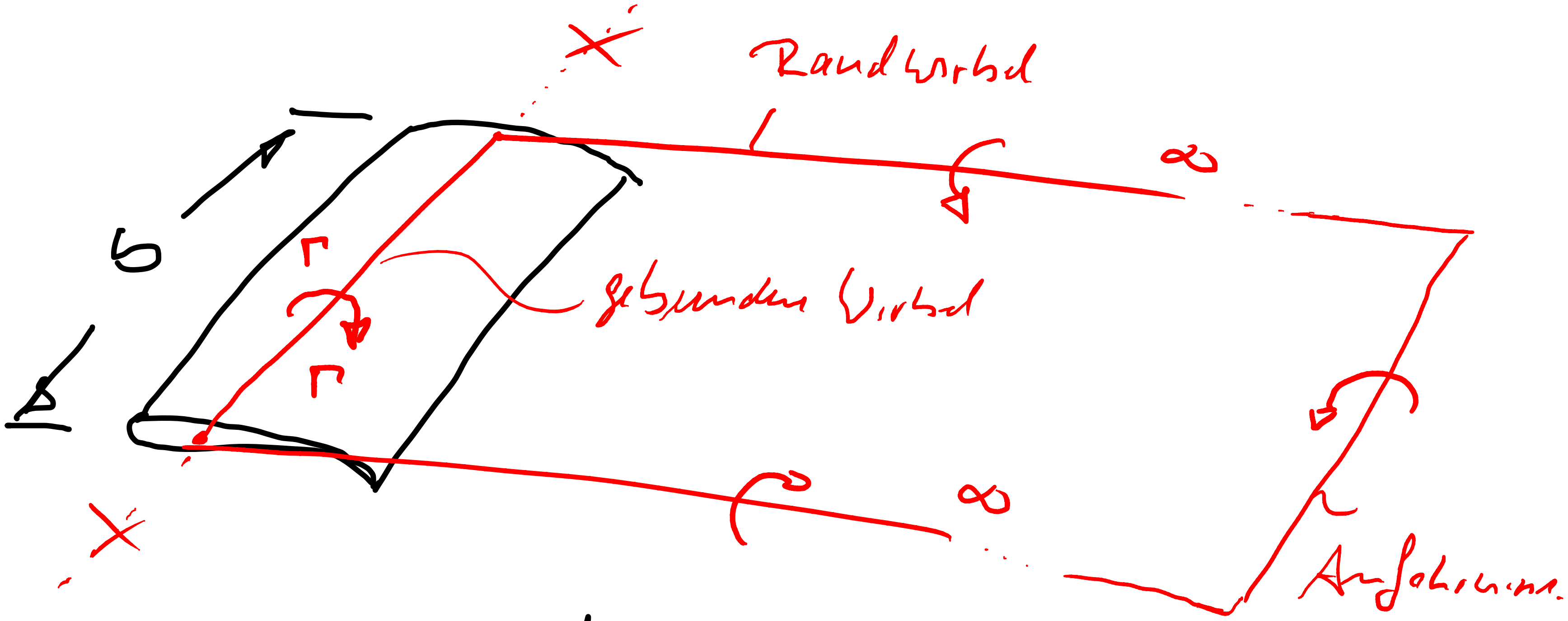
Helmholtzscher Wirbelsatz.





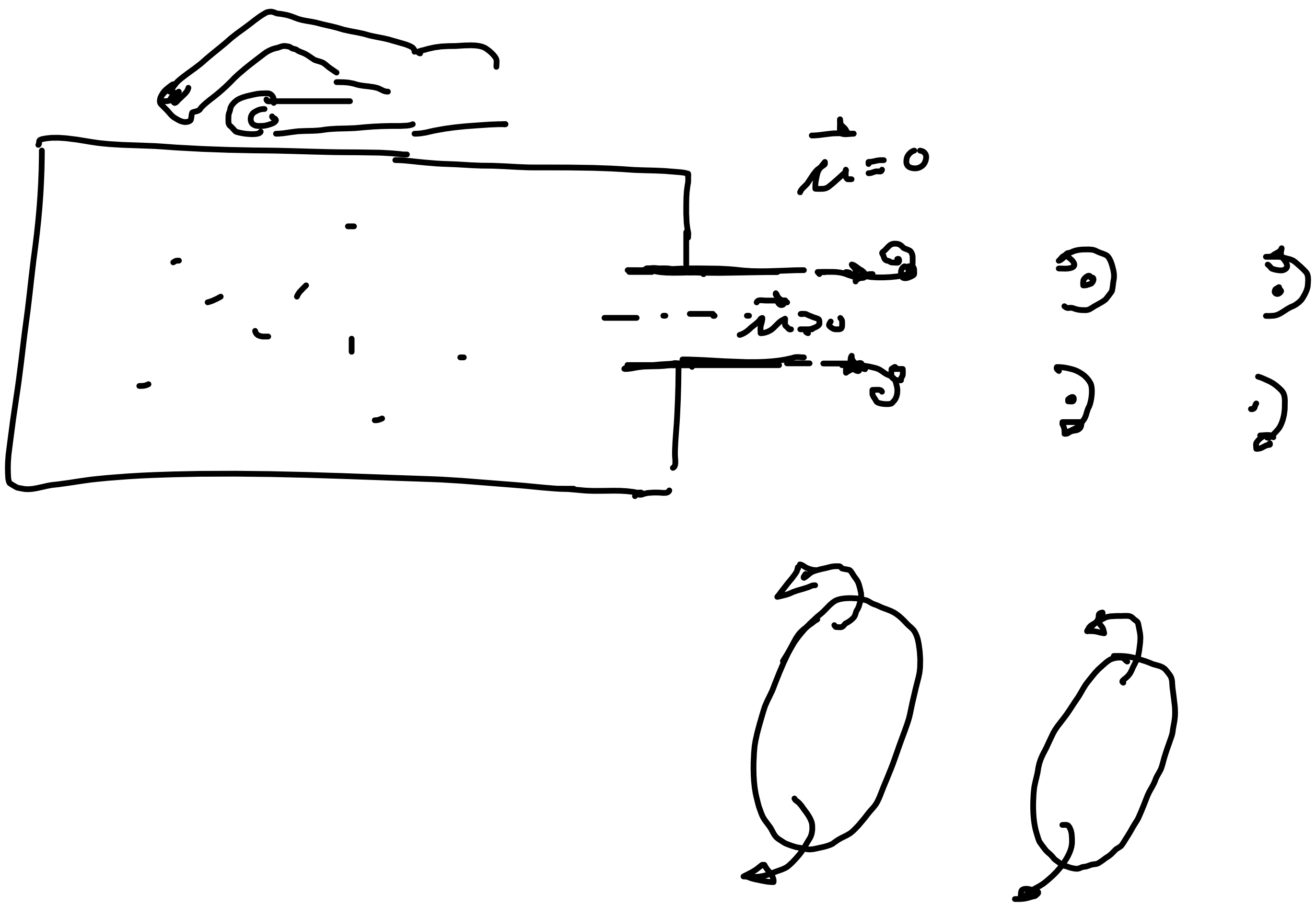
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5



Endliche Flügeltiefe b

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 5



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5

$$\vec{e}_z \cdot \frac{D\vec{D}}{Dt} = \vec{M}\cdot\vec{e}_z = M_z$$

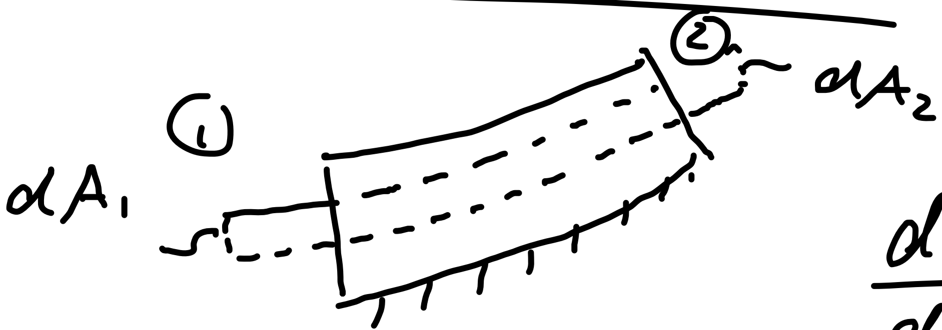
Eulersche Turbinengl.

$$\frac{DD_z}{Dt} = M_z$$

$$D_z = \int_{V(t)} \rho\, r\, c_u \, dV$$

$$\boxed{\frac{dM_z}{d\dot{m}} = r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}}$$

z-Komponente des Drallsatzes für stationäre Strömung.



$$\frac{dM_z}{d\dot{m}} = \frac{1}{2\pi}\left(\Gamma_2 - \Gamma_1\right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 5