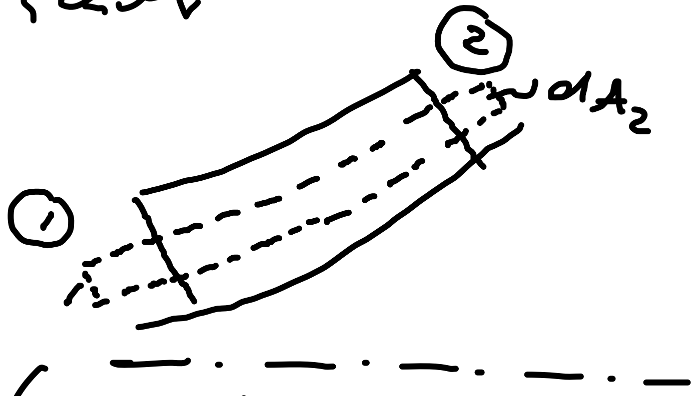
Drallsatz ist die grundlegende Gleichung für die Turbomaschine.




$$\frac{dM_z}{d\dot{m}} = r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1} = \frac{1}{2\pi}\left(\Gamma_2 - \Gamma_1\right)$$ Eulersche Turbinengl.

„$r c_u$" $\hat{=}$ Drall eines Flüssigkeitsteilchens.

$$\Gamma := \oint_C \vec{c} \cdot d\vec{x}$$ Zirkulation.

Spezialfall: Drall $r c_u$ ist konstant über die Ein- und Austrittsfläche $A_1, A_2$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 1

$$M_z = \dot{m}\left(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}\right),$$ Eulersche-Turbinengleichung. 1775

für $r_2 c_{u2} = \text{const}$ über $A_2$

$r_1 c_{u1} = \text{const}$ über $A_1$.

$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$

---

$$\dot{m} := -\int_{A_1} \rho\, \vec{c}\cdot\vec{n}\, dS = \int_{A_2} \rho\, \vec{c}\cdot\vec{n}\, dS.$$

Herleitung bisher im Absolutsystem.

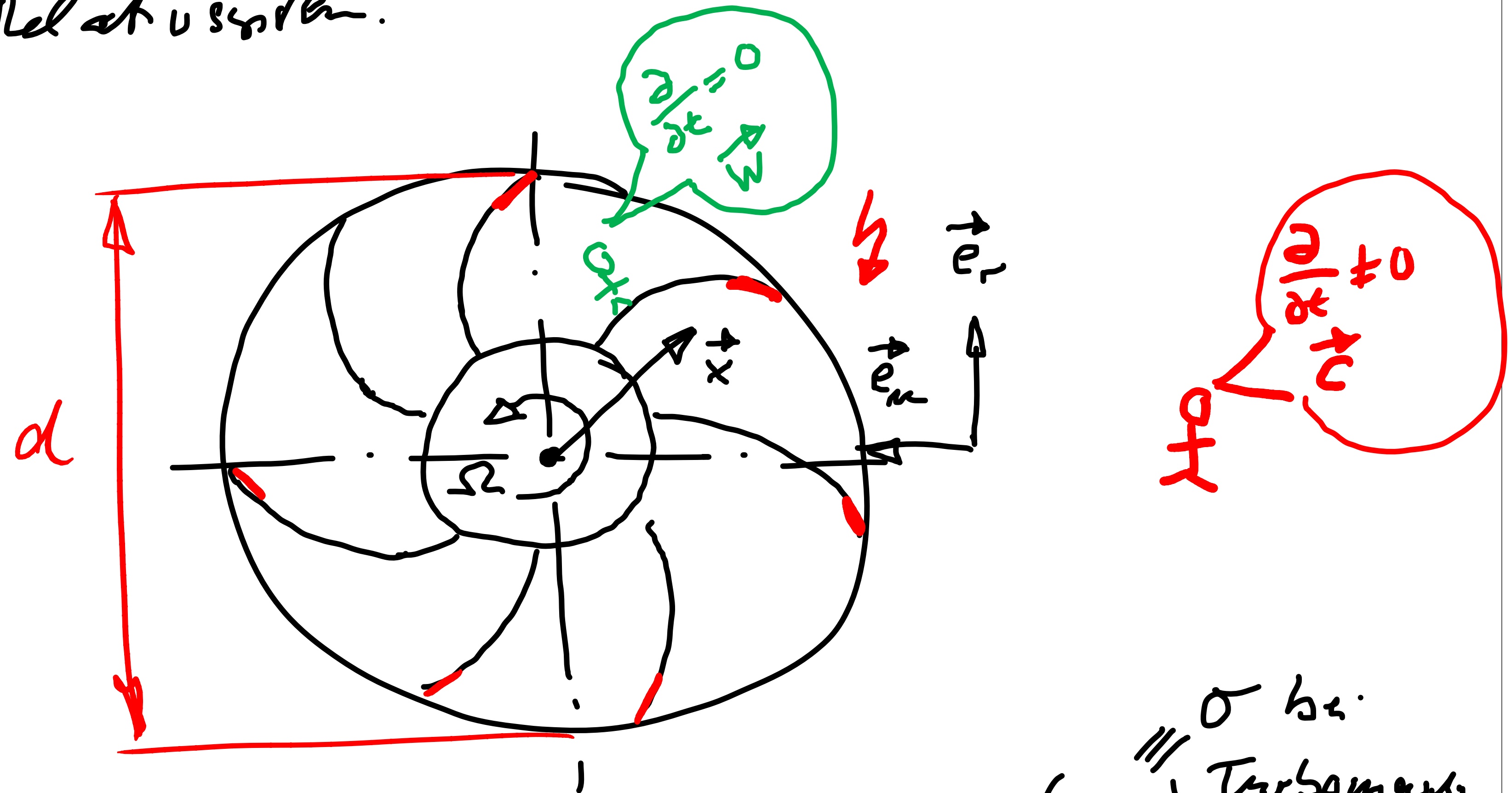



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

## 2. Herleitung der Turbinengleichung im Relativsystem.




$$\vec c = \vec w + \vec u \left( + \vec v \right)$$

$\equiv 0$ bei Turbomasch.

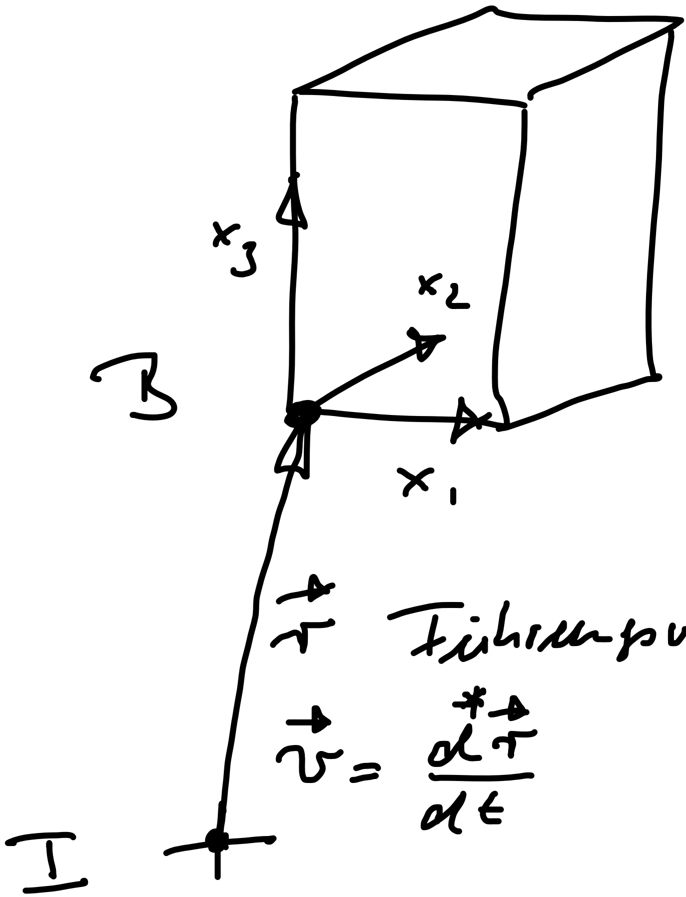
$\vec c$ Absolutgeschwindigkeit $\qquad$ $\vec v$ Führungsgeschw.

$\vec w$ relative Geschwindigkeit

$\vec u = \vec \Omega \times \vec x = \Omega r \vec e_u$ Umfangsgeschwindigkeit


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 1




$\vec{r}$ Führungsvektor

$$\vec{v} = \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

$\frac{d^*}{dt}$ zeitliche Änderung im Inertialsystem.

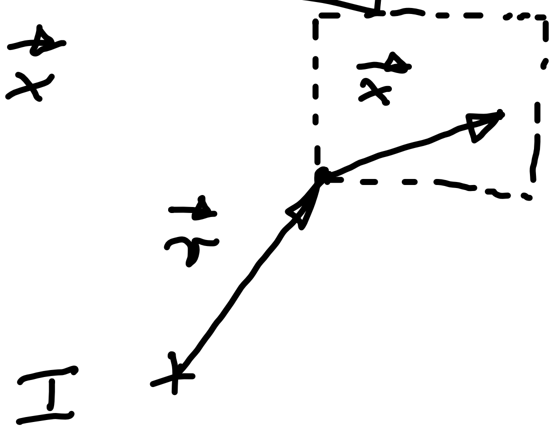
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 1

Zeitliche Änderung im Relativsystem ≠ Zeitliche Änderung im Inertial-System

$\vec{b}$ steht stellvertretend für einen beliebigen Tensor.

$$\left[\frac{D\vec{b}}{Dt}\right]_I = \left[\frac{D\vec{b}}{Dt}\right]_B + \vec{\Omega}\times\vec{b}$$

Herleitung am Beispiel des Ortsvektors $\vec{x}$




$$\left[\frac{D(\vec{r}+\vec{x})}{Dt}\right]_I = \vec{c} = \vec{w} + \vec{\Omega}\times\vec{x} + \vec{v}$$

$$= \left[\frac{D\vec{r}}{Dt}\right]_I + \left[\frac{D\vec{x}}{Dt}\right]_I = \vec{v} + \left[\frac{D\vec{x}}{Dt}\right]_I$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 1

$$\cancel{\vec v} + \left[\frac{D\vec x}{Dt}\right]_I = \vec c = \vec w + \vec \Omega \times \vec x + \cancel{\vec v}$$

$$\vec w := \left[\frac{D\vec x}{Dt}\right]_B$$

$$\left[\frac{D\vec x}{Dt}\right]_I = \left[\frac{D\vec x}{Dt}\right]_B + \vec \Omega \times \vec x \, .$$

$$\boxed{\left[\frac{D\vec b}{Dt}\right]_I = \left[\frac{D\vec b}{Dt}\right]_B + \vec \Omega \times \vec b}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 1

$$\frac{D\vec{D}}{Dt} = \vec{M}.$$

Inertialsystem, d.h. $\frac{D}{Dt} = \left[\frac{D}{Dt}\right]_I$

$$\left[\frac{D\vec{D}}{Dt}\right]_B + \underbrace{\vec{\Omega}}_{=\,\Omega\vec{e}_z} \times \vec{D} = \vec{M}. \qquad \Big|\cdot \vec{e}_z$$

$$P = \vec{M}\cdot\Omega\vec{e}_z = M_z\,\Omega$$

$$\left[\frac{DD_z}{Dt}\right]_B = M_z$$

$$D_z = \int_V \rho(\vec{x}\times\vec{c})\cdot\vec{e}_z\,dV = \int_V \rho\, r\, c_u\,dV.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 1

Reynoldssche Transporttheorem im Relativsystem

$$\left[\frac{D\Phi}{Dt}\right]_B = \left[\frac{\partial}{\partial t}\right]_B \int_V \varphi \, dV + \oint_S \varphi \, \vec{w} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\Phi = \int_V \varphi \, dV$$

Anwendung auf den Drallsatz.

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho r c_u}{\partial t}\right]_B dV + \int_{A_1, A_2} r c_u \rho \, \vec{w} \cdot \vec{n} \, dS = M_z$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Fluidenenergiemaschinen

Vorlesung 1

Im stationären Betrieb der Maschine $\Omega = \text{const}$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0 .$$

$$\int_{A_1, A_2} r c_u \, \rho \, \vec{w} \cdot \vec{n} \, dS = M_z$$

Annahme $r c_u$ ist konstant über $A_1, A_2$ und

$$\dot{m} = -\int_{A_1} \rho \, \vec{w} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{A_2} \rho \, \vec{w} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$M_z = \dot{m} \left( r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1} \right) \quad ☺ .$$

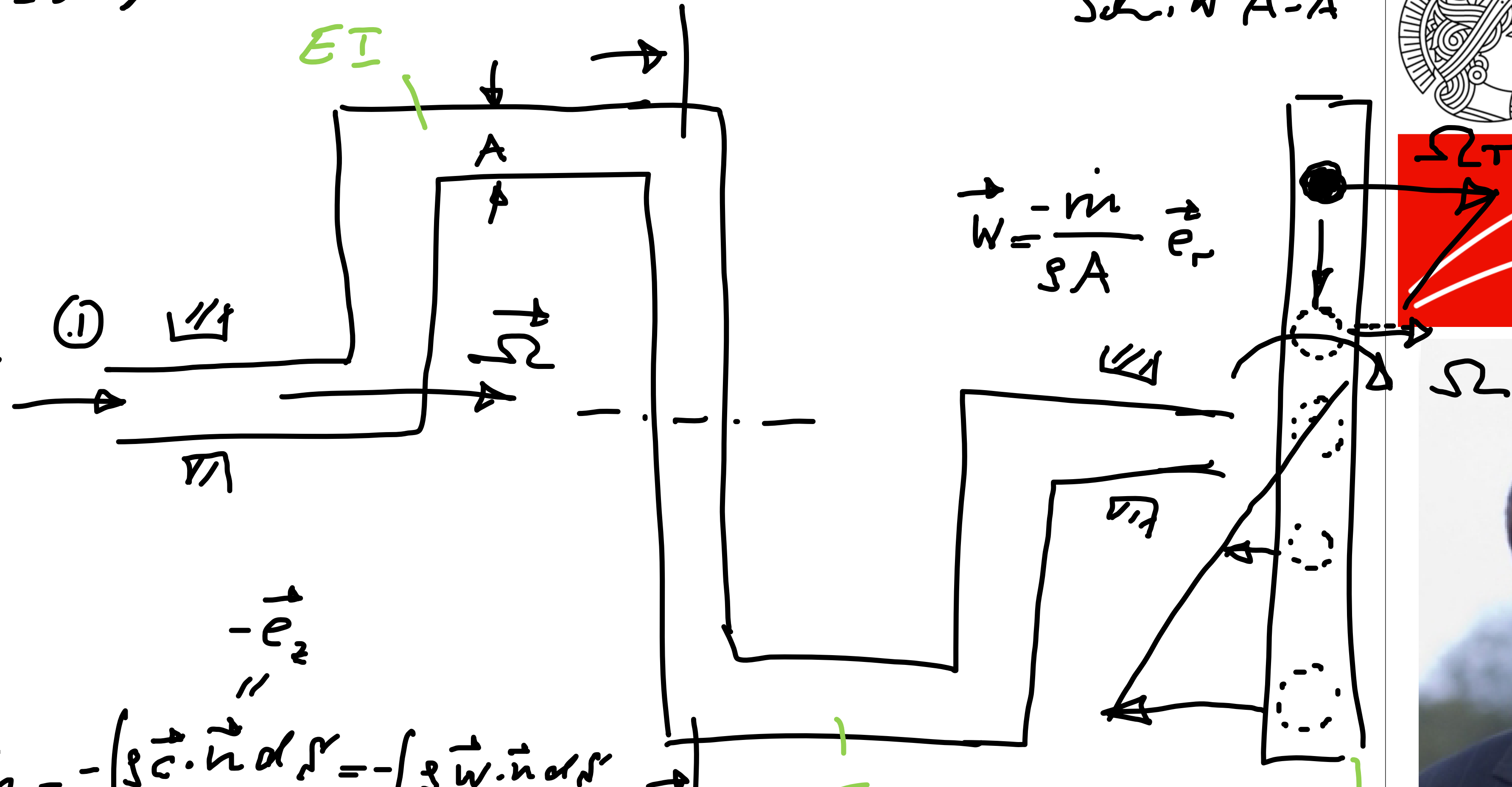
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 1

$\dot m$ soll gemessen werden

Schnitt A-A




$$\vec{w} = \frac{-\dot m}{\rho A}\,\vec{e}_r$$

$$\Omega r\,\vec{e}_u = \vec{u}$$

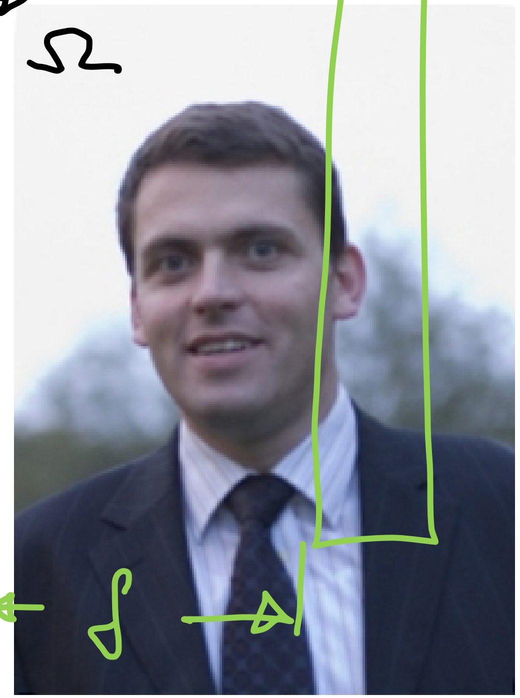
$$\dot m = -\int_{A_1} \rho\,\vec{c}\cdot\underbrace{\vec{n}}_{=\,-\vec{e}_z}\,dS = -\int_{A_1} \rho\,\vec{w}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\vec{c} = \vec{w} + \Omega r\,\vec{e}_u$$

$$\dot m = fn(EI, \ell, \delta, \Omega)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

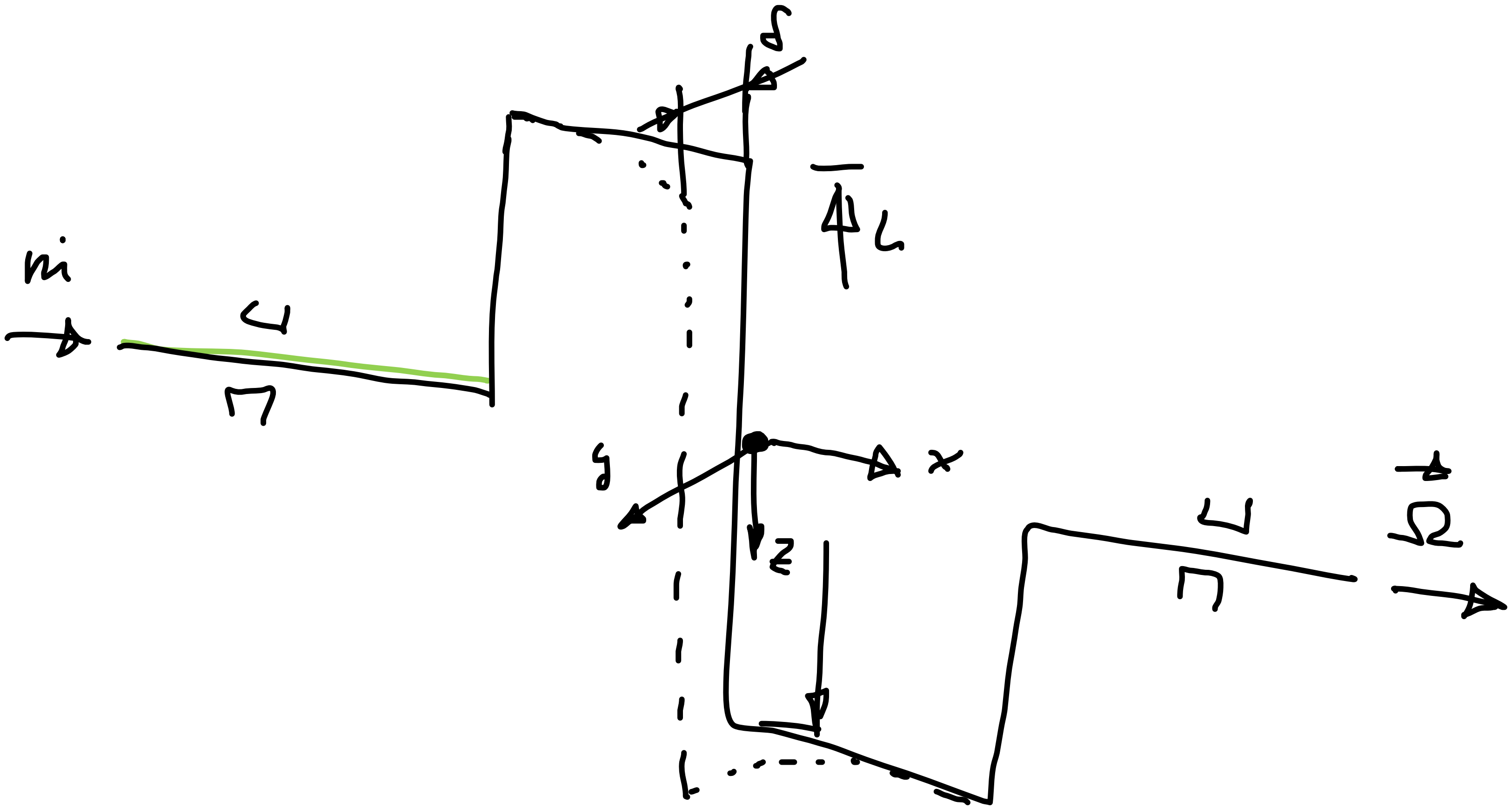
FLUID SYSTEM TECHNIK



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 1

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK




$$\left[\frac{D\vec{I}}{Dt}\right]_B + \vec{\Omega} \times \vec{I} = \vec{F}_{Rohr \to Fl} \quad \Big| \cdot \vec{e}_y$$

$$\left[\frac{D\vec{I}}{Dt}\right]_B = 0, \qquad \vec{\Omega} = \Omega\,\vec{e}_x, \qquad \vec{I} = \int_V \rho\,\vec{c}\,dV$$

........ SIE!


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 1

Anwendung der Eulerschen Turbinengleichung

und der Zusammenhang mit der Energiegleichung.

$$\frac{P_f + \dot{Q}}{\dot{m}} = h_{t2} - h_{t1} \quad \text{Energiegleichung.} \quad (1)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz\right)_1}_{C_2 - C_1 = gH} + (e_2 - e_1)$$

$$\frac{M_z}{\dot{m}} = r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1} \quad \text{Drallsatz.} \quad \Big| \cdot \Omega \quad (2)$$

$$(2) \cdot \Omega = (1) \text{ für } \dot{Q} \cong 0$$

$$h_{t2} - h_{t1} = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$$

$$\frac{C_2 - C_1}{\eta} = \frac{gH}{\eta} = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Fluidenenergiemaschinen

Vorlesung 1

Energiegleichung für eine Arbeitsmaschine $\dot{Q} = 0$.

$$\frac{P_t}{m} = \frac{1}{\eta} g H$$

Drallsatz
$$\frac{\dot{P}_t}{m} = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$$

$$\frac{1}{\eta} g H = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$$ für eine Arbeitsmaschine.

Druckziffer
$$\psi := \frac{gH}{u_2^2} \frac{2}{\pi^2}$$

$$\frac{1}{\eta} \psi = \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{c_{u2}}{u_2} - \frac{u_1}{u_2} \frac{c_{u1}}{u_2} \right)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 1

$$\underbrace{\frac{\pi^2}{2}\,\frac{1}{\xi}\,\underline{\underline{\psi}} = \frac{c_{u2}}{u_2} - \frac{r_1}{r_2}\,\frac{c_{u1}}{u_1}}$$

Durchflusszahl $\varphi := \frac{4}{\pi^2}\,\frac{Q}{n d^3}$

$$u_2 = \Omega r_2 = 2\pi n \frac{d}{2}$$

$$= \pi n d$$

$$\rightsquigarrow \varphi = \frac{4}{\pi}\,\frac{Q}{u_2 d^2}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

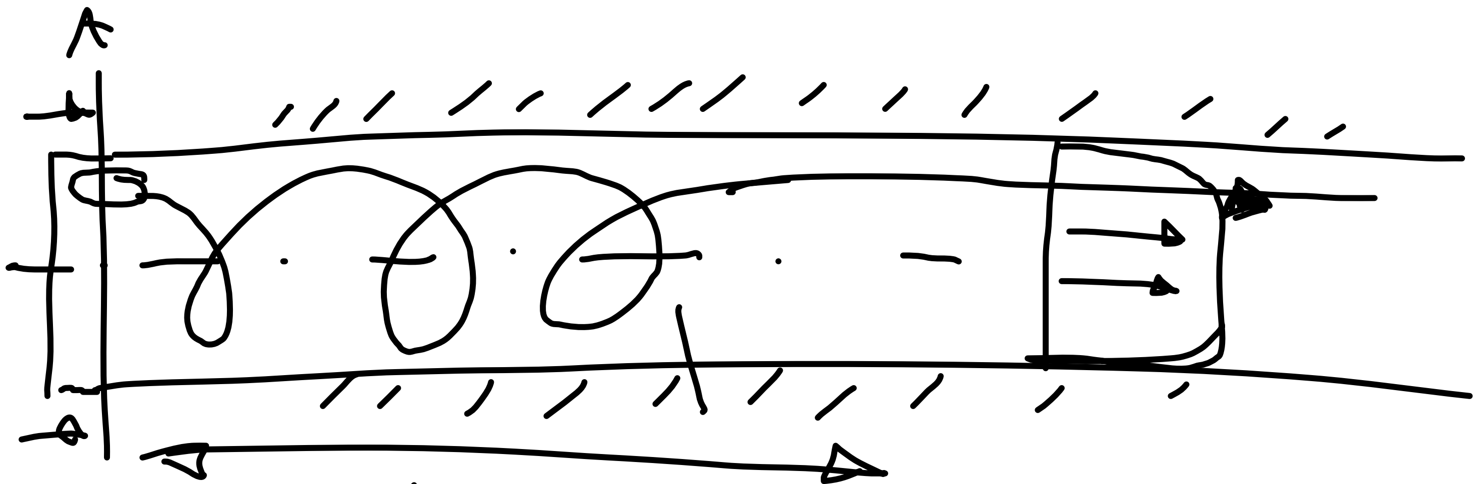

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz


Sommersemester 2010

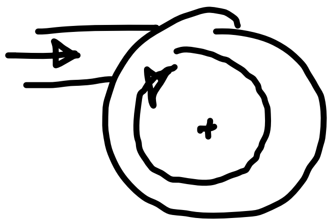
Fluidenergiemaschinen

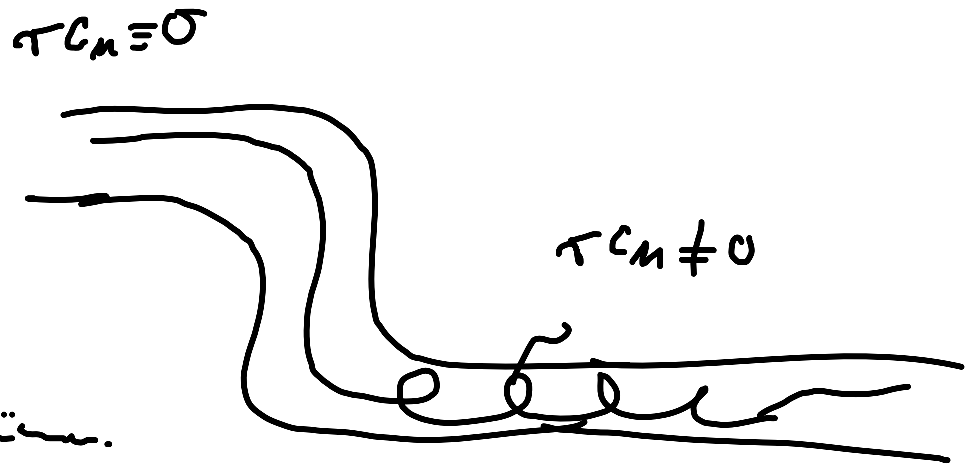
Vorlesung 1

I.d.R. sind Strömungen drallfrei.




Abbau des Dralls infolge Reibung an der Rohrwand.






Vorsicht bei Doppelkrümmern.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

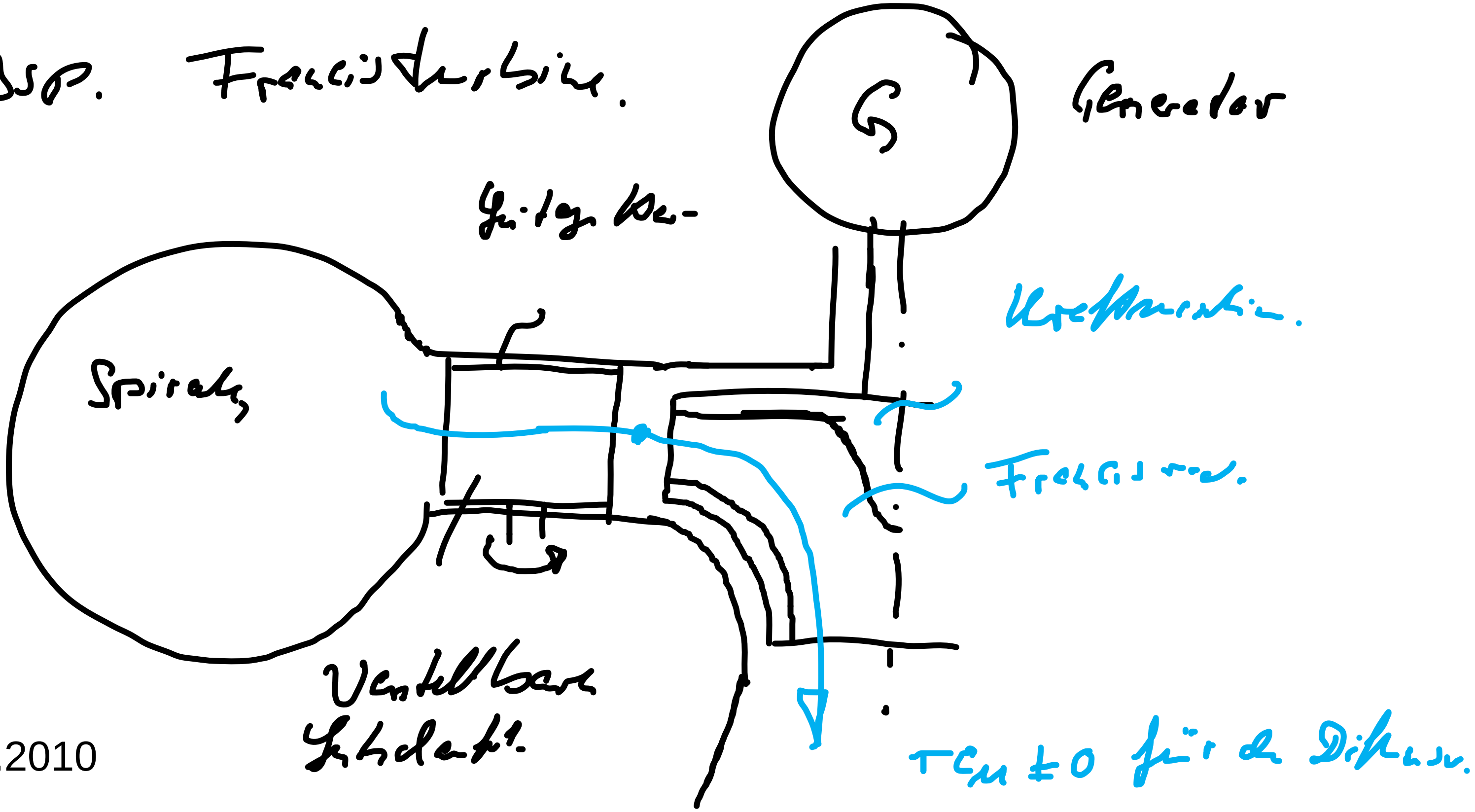
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 1

Manchmal wird gezielt ein Drall vor der Maschine erzeugt.

Bei einer Turbine wird über ein Leitgitter ein Drall erzeugt.

Bsp. Francisturbine.




TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 1

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

**Kraftmaschine**

Über eine Leitapparatur (Spirale und/oder Leitgitter) wird ein Drall erzeugt. $\rightarrow M_{z,\text{Leit}} > 0 \quad \Omega = 0$

Im Laufrad wird der Drall abgebaut $\rightarrow M_{z,\text{Lauf}} < 0 \quad \Omega > 0$

$$P_f = M_z \Omega < 0.$$

$\Rightarrow$ Leistungsabsatz.

**Arbeitsmaschine**

Über das Laufrad wird ein Drall erzeugt $M_{z,\text{Lauf}} > 0, \ \Omega > 0$

$$P_f > 0$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenergiemaschinen
Vorlesung 1

Über die Schaufeln wird bei der Arbeitsmaschine der Drall abgebaut.

$$\Omega \equiv 0 \qquad M_{z\,\mathrm{Sch}} < 0$$

Im Idealfall verlustfreie Energieumsetzung.

$$h_t = \text{const} \quad \text{für} \quad P_d = \dot{Q} = 0.$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{c_z^2 + c_u^2}{2} + gz + e = \text{const}.$$

Ziel: $c_u$ in der Schaufel der Arbeitsmaschine zu reduzieren.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Fluidenenergiemaschinen
Vorlesung 1