Bernoullische Gleichung

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k}$$ Eulergleichung

Impulsbilanz für ein Flüssigkeitsteilchen der Dichte ρ

$\rho \mathrel{\hat{=}}$ Masse

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\text{lokale Änderung}} + \underbrace{\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}}_{\text{konvektive Beschl.}}$$ Beschleunigung.

$-\nabla p + \rho \vec{k}$ „Nettokraft" auf das Teilchen.

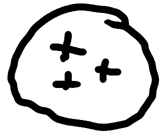
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi$$



$$\phi(t, \vec{x})$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad \Big| \; \frac{1}{dt}$$

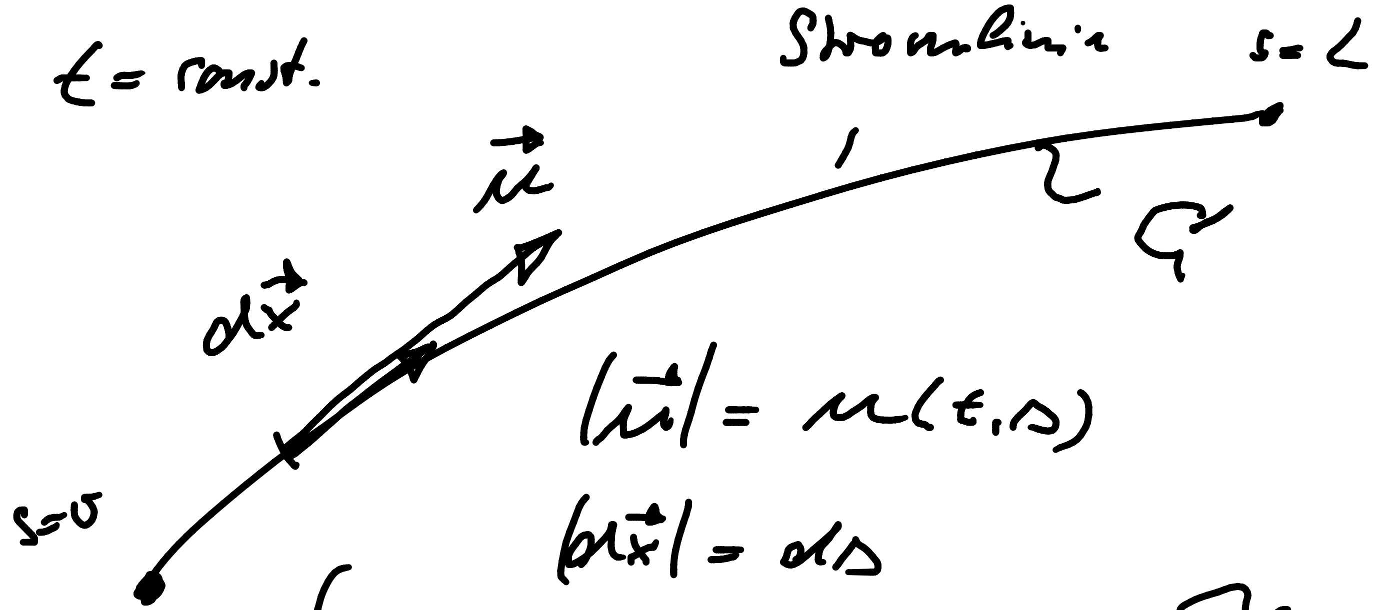
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u}_B \cdot \nabla \phi \quad \text{allgemein Zeitableitung}$$

Für den Spezialfall $\vec{u}_B = \vec{u}$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi \quad \text{materielle Zeitableitung}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$t = \text{const.}$



$$|\vec{u}| = u(t,s)$$

$$|d\vec{x}| = ds$$

$$\int \text{Euler} \cdot d\vec{x}$$

Bernoulli-Konstante

$$\int \frac{\partial u}{\partial t}\, ds + \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \psi = G$$

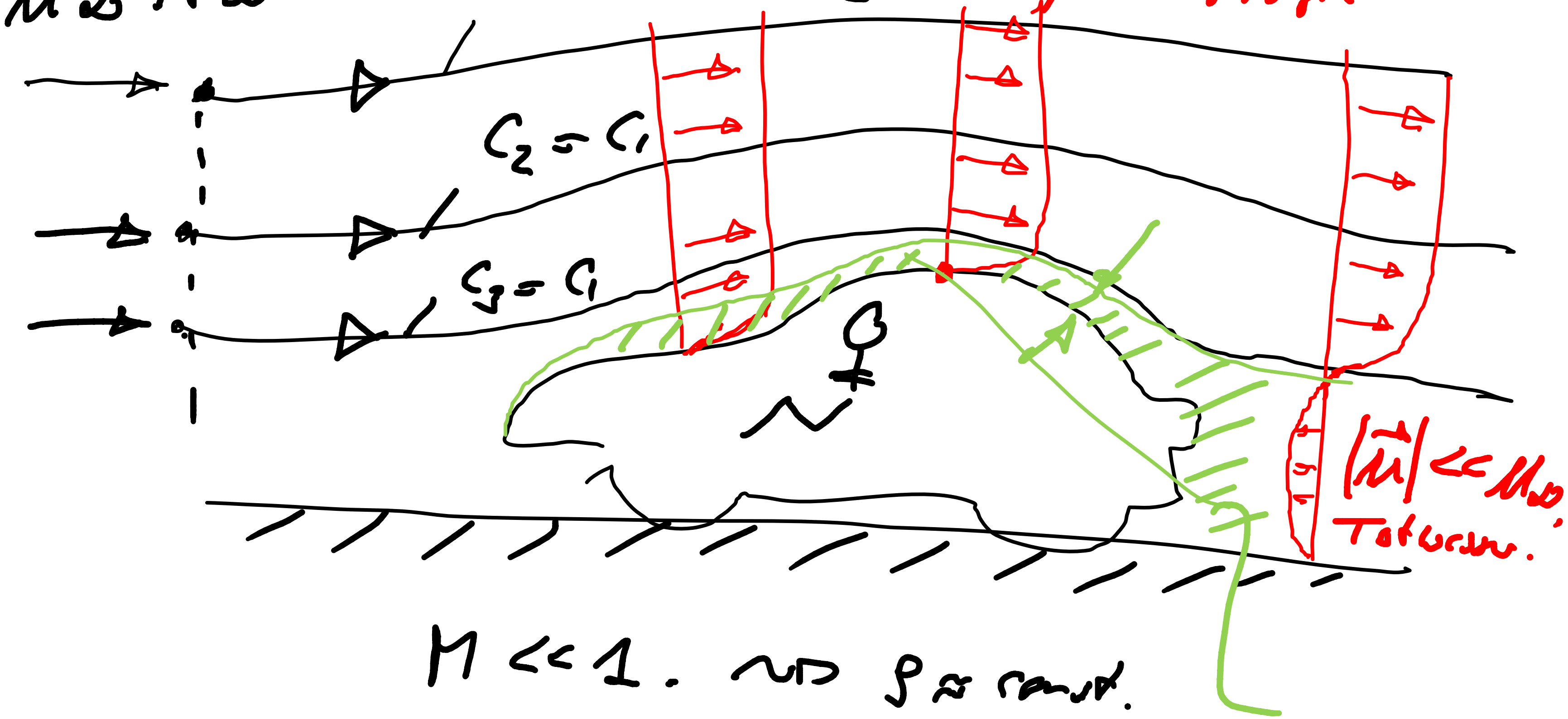
$\vec{k} = -\nabla \psi$, d.h. die Massenkraft hat ein Potential.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

im Allgemeinen hat jede Stromlinie eine eigene Konstante C

$$C_1 = \frac{u_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}$$



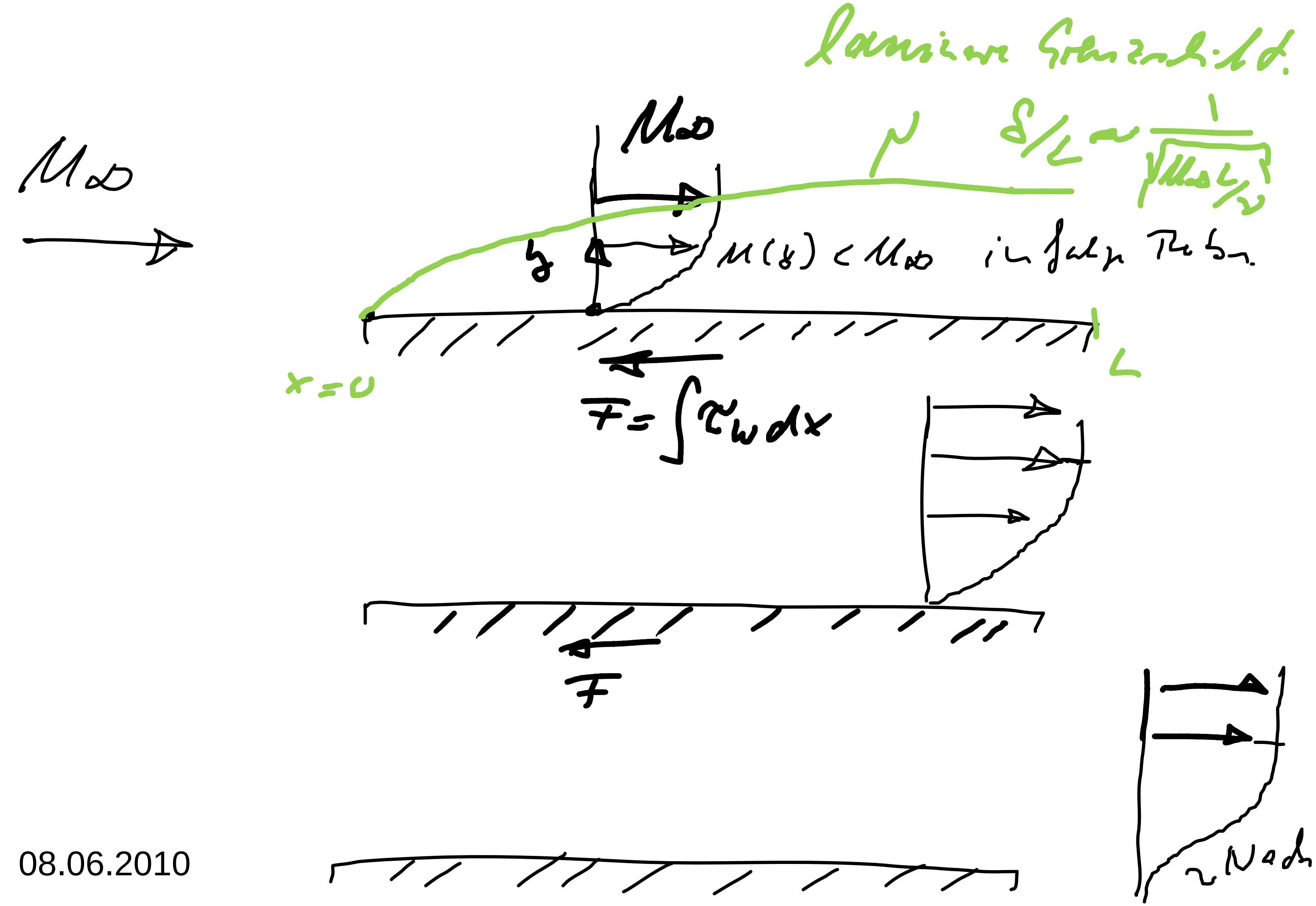
$M \ll 1. \Rightarrow \rho \approx \text{const.}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

Reibung macht sich bei Strömungsvorgängen i.d.R. nur in der Grenzschicht bemerkbar.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

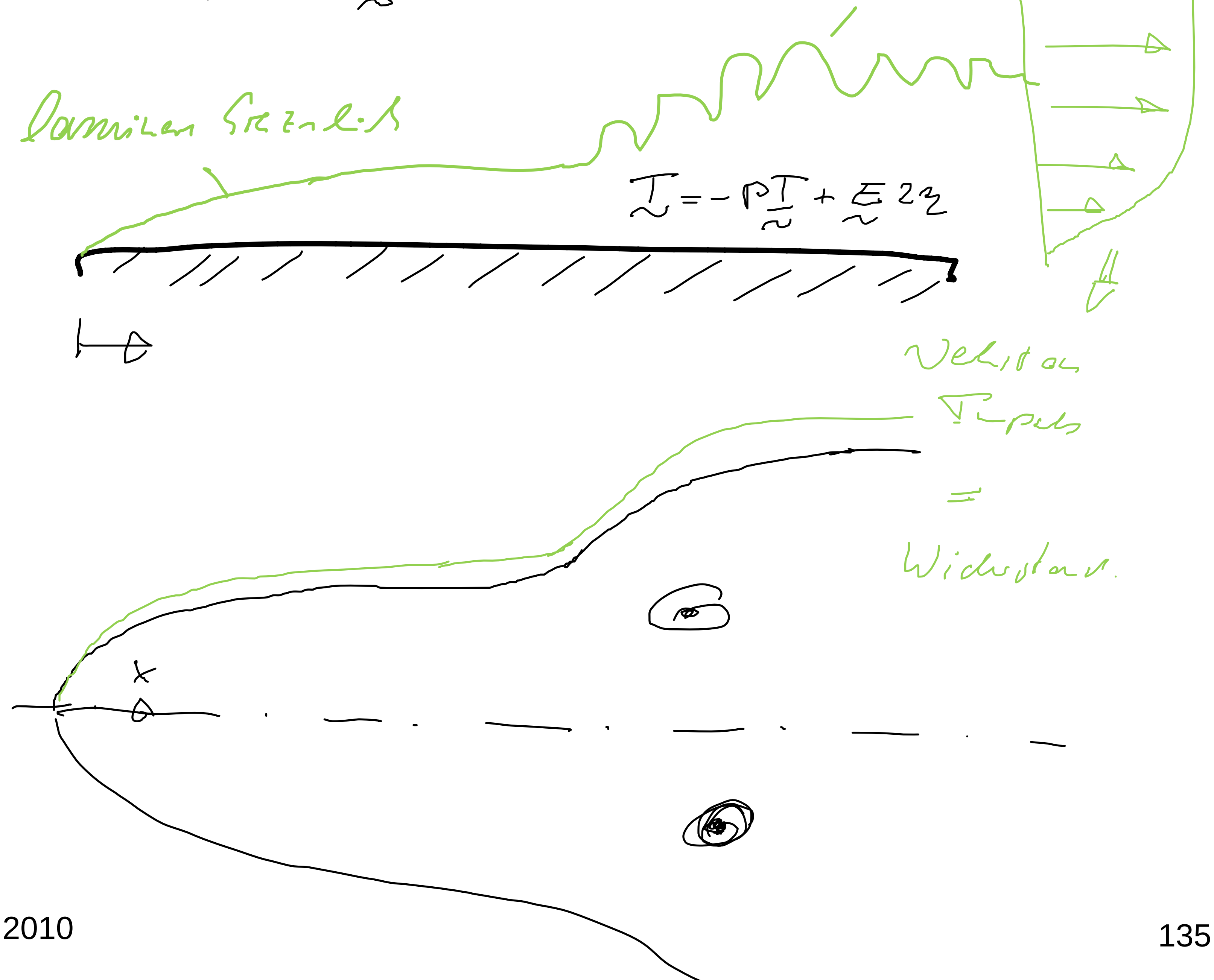
Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 8

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I}$$

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{E}\,2\eta$$



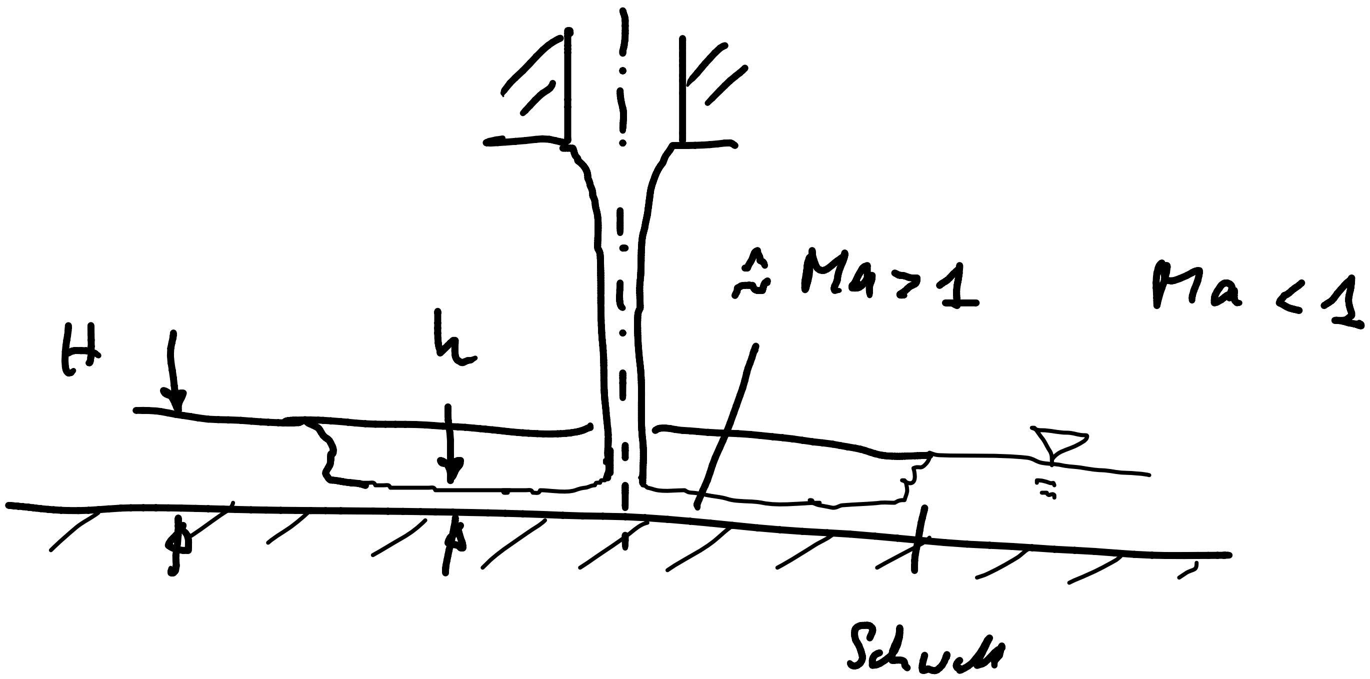
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

Außerhalb der dünnen Grenzschicht spielt Reibung keine Rolle (Ausnahme Verdichtungsstöße, Hydraulic Jump (Schwall)).



Machzahl $\quad Ma := \frac{u}{a}$

Froudezahl. $\quad Fr := \frac{u}{\sqrt{gh}}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

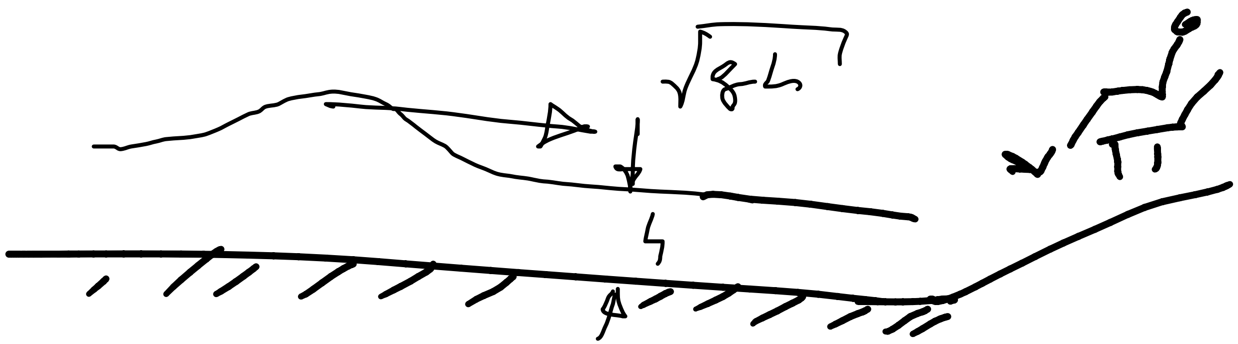
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

$$a = \sqrt{\gamma R T} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Schallgeschwindigkeit

$\sqrt{gh}$ ~~Wellen~~ Ausbreitungsgeschw. von Schwerewelle in flach Wasser.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

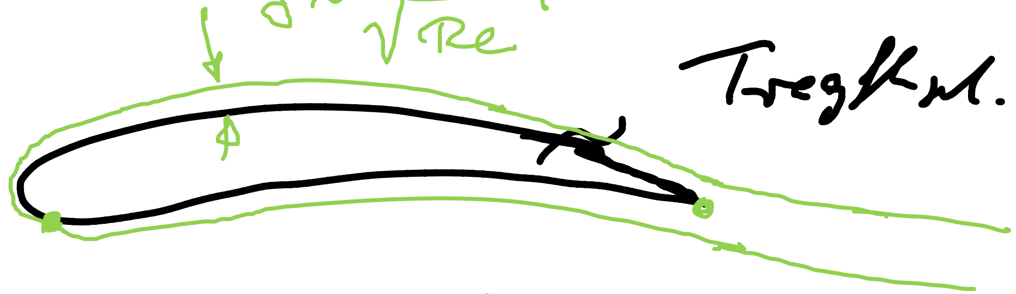
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

Außenströmung.

u_∞

$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}$

Tragflügel.



$Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$

$\delta \ll L$ für hohe Reynoldszahl.

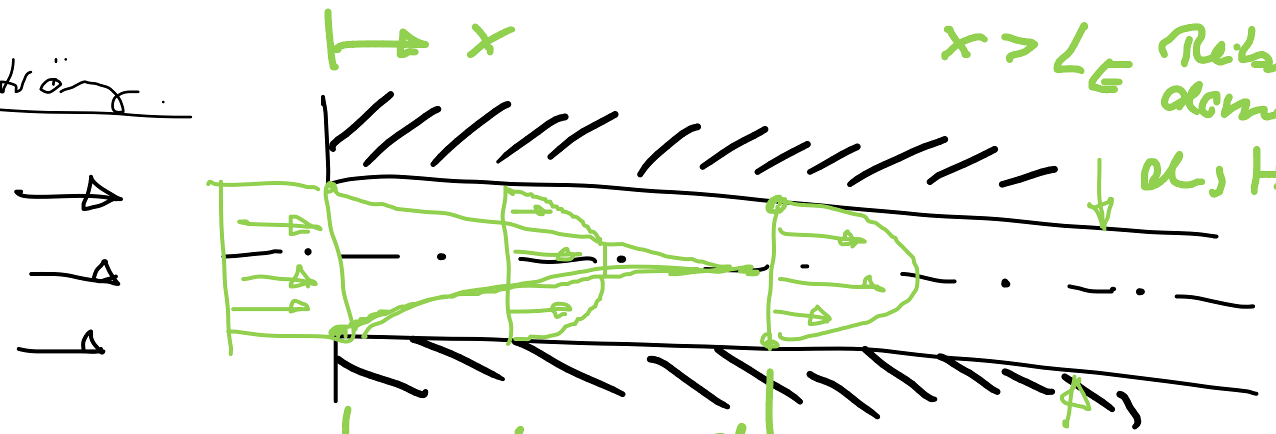
Innenströmung.

x

$x > L_E$ Reibung in ∇ dominant.

d, H

u_∞



$L_E \sim \frac{d}{\sqrt{Re}}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

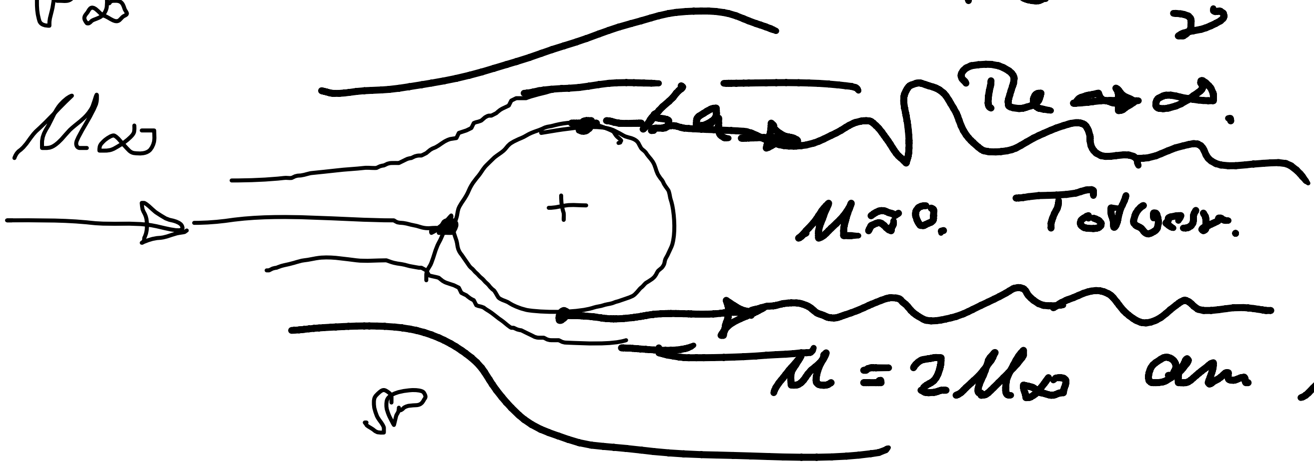
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Beispiel Zylinder: $\rho = \text{const.}$, $\Psi = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$Re = \frac{u_\infty a}{\nu} \ggg 1$$

p_∞

u_∞



$Re \to \infty$.

$u \approx 0$. Totwasser.

$u = 2u_\infty$ am Ablösepunkt.

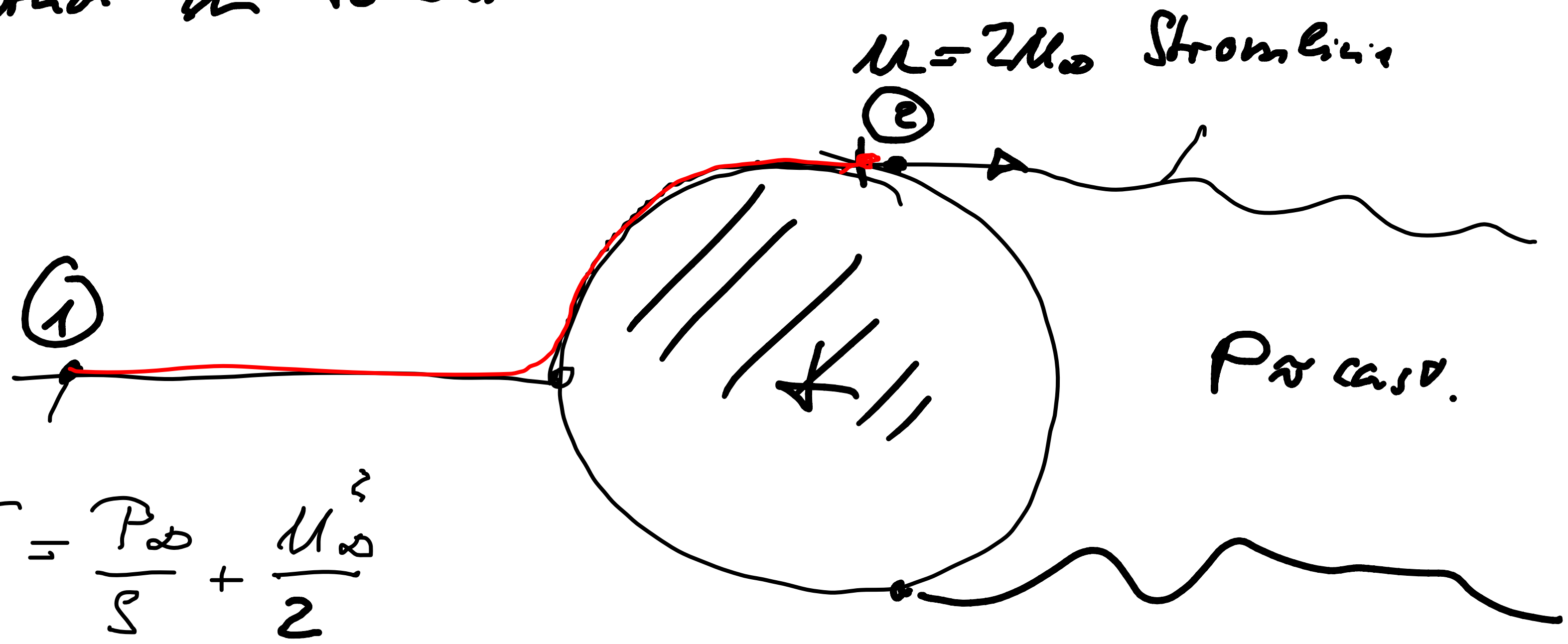
Druck im Staupunkt $\underbrace{p_\infty} + \underbrace{\frac{\rho}{2} u_\infty} = p_{SP}$

„Druckenergie" Kinetik Energie.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

Druck im Totwasser



$$C = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{u_\infty^2}{2}$$

$$= \frac{p}{\rho} + 2u_\infty^2 \quad \rightsquigarrow \quad p = p_\infty - \frac{3}{2}\rho u_\infty^2 < p_\infty .$$

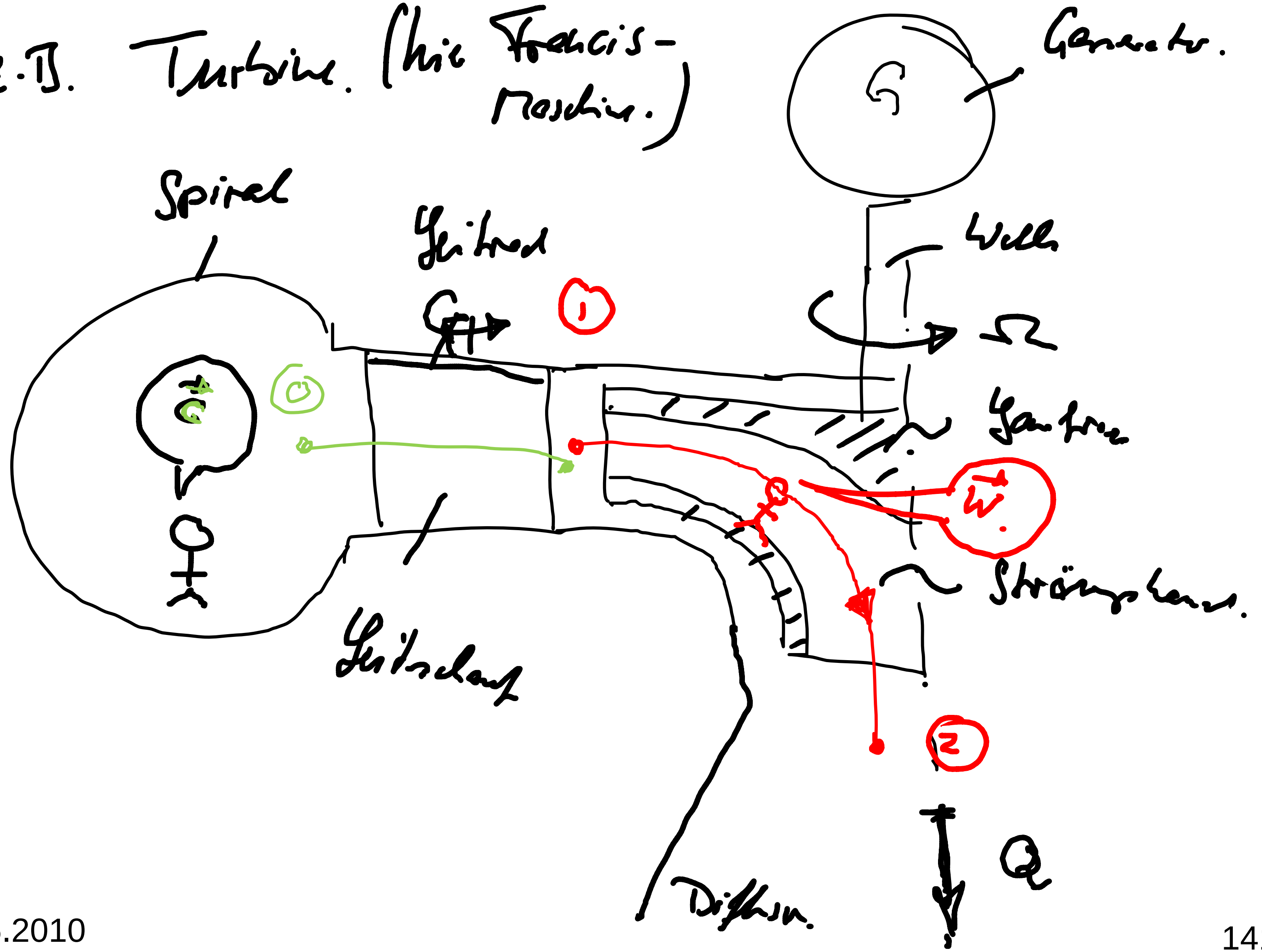
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

Bernoullische Gleichung im rotierenden System

z.B. Turbine. (hier Francis-Maschine.)



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

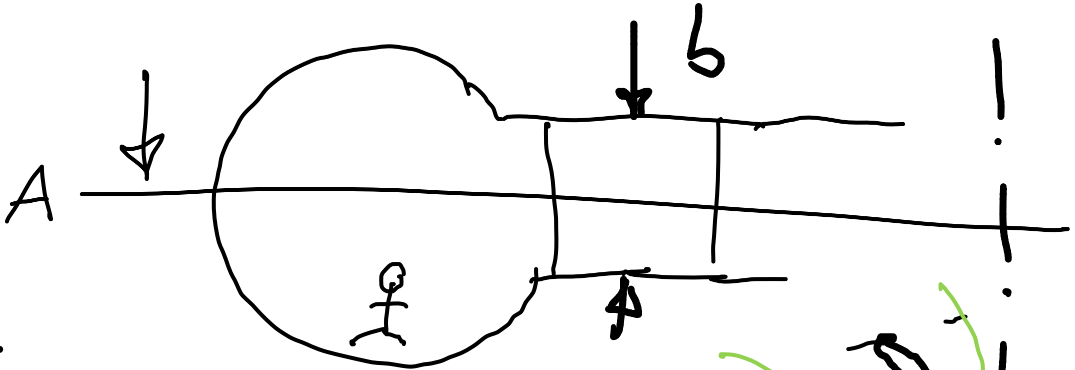
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

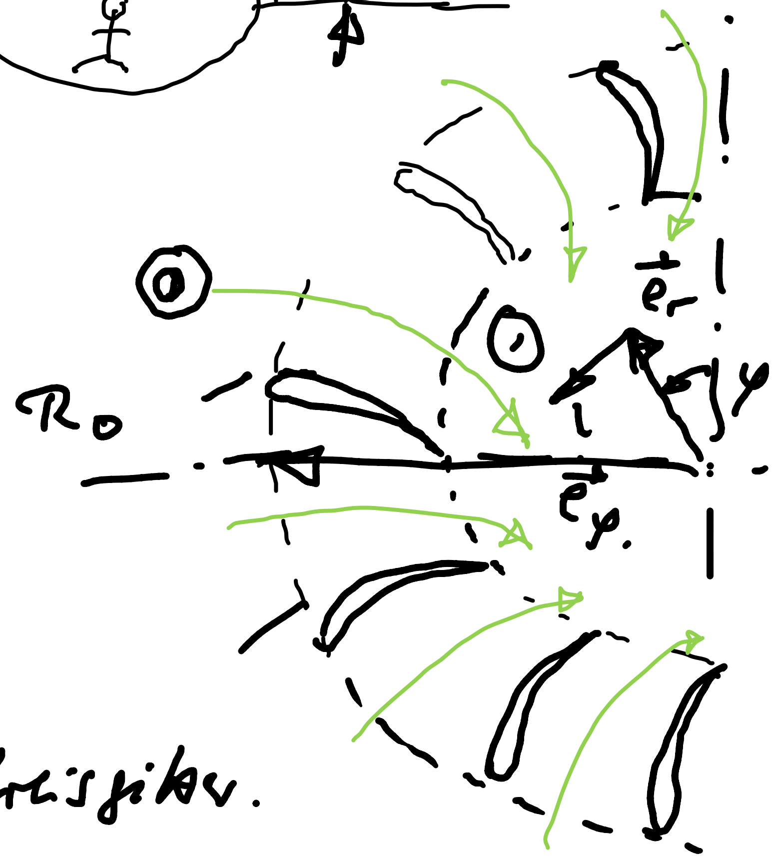
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

Absolutsystem



$\vec{c}$ Absolutgeschwindigkeit.



$$p_0 + \frac{\rho}{2}|\vec{c}_0|^2 = p_1 + \frac{\rho}{2}|\vec{c}_1|^2$$

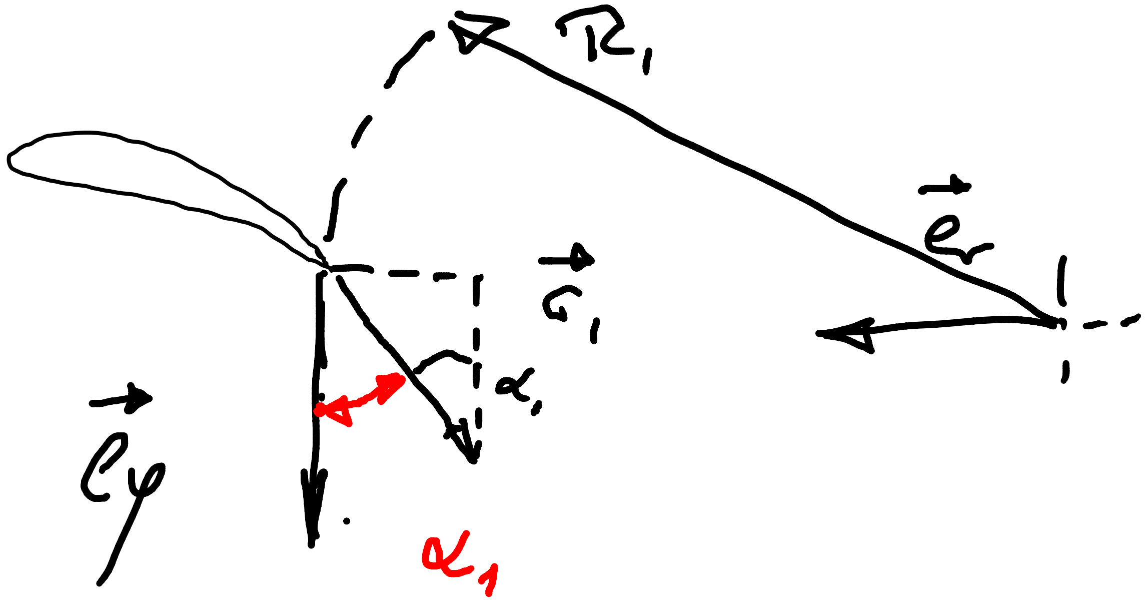
$$\vec{c}_0 = c_{0r}\,\vec{e}_r + c_{0\varphi}\,\vec{e}_\varphi .$$

Drallfreie Strömung

Kreisgitter.

$$c_{0\varphi} \equiv 0.$$

$$\leadsto |\vec{c}_0|^2 = c_{0r}^2 = \left(\frac{Q}{2\pi R_0 b}\right)^2 .$$



$$\vec{c}_1 = c_{r1}\,\vec{e}_r + c_{\varphi 1}\,\vec{e}_\varphi$$

$$c_{r1} = -\frac{Q}{2\pi R_1 b}$$

$$c_{\varphi 1} = -c_{r1}\,\mathrm{tg}\,\alpha_1$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$p_0 + \left(\frac{Q}{2\pi R_0 b}\right)^2 \frac{\rho}{2} = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(c_{r1}^2 + c_{\varphi 1}^2\right)$$

$$= p_1 + \frac{\rho}{2} c_{r1}^2 \left(1 + \left(\frac{c_{\varphi 1}}{c_{r1}}\right)^2\right)$$

$$= p_1 + \frac{\rho}{2}\left(\frac{Q}{2\pi R_1 b}\right)^2 \left(1 + \tan^2\alpha_1\right).$$

$$p_1 = p_0 - \left(\frac{Q}{2\pi R_1 b}\right)^2 \frac{\rho}{2}\left[1 + \tan^2\alpha_1 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right].$$

$$p_1 \neq p_0$$

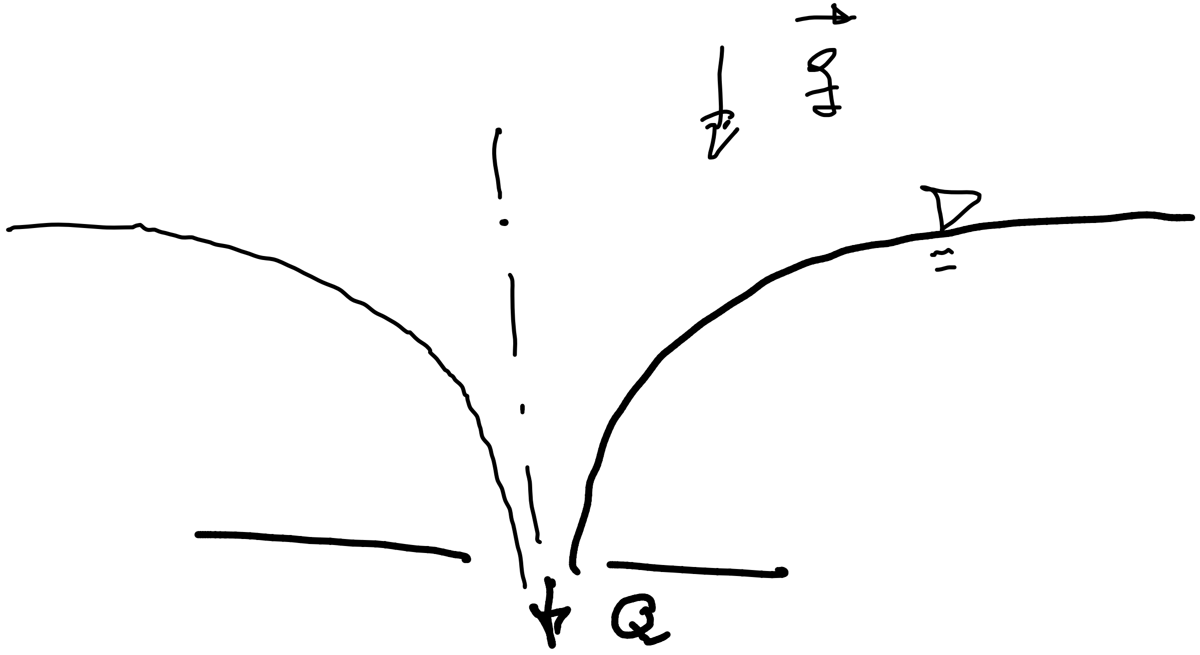
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK



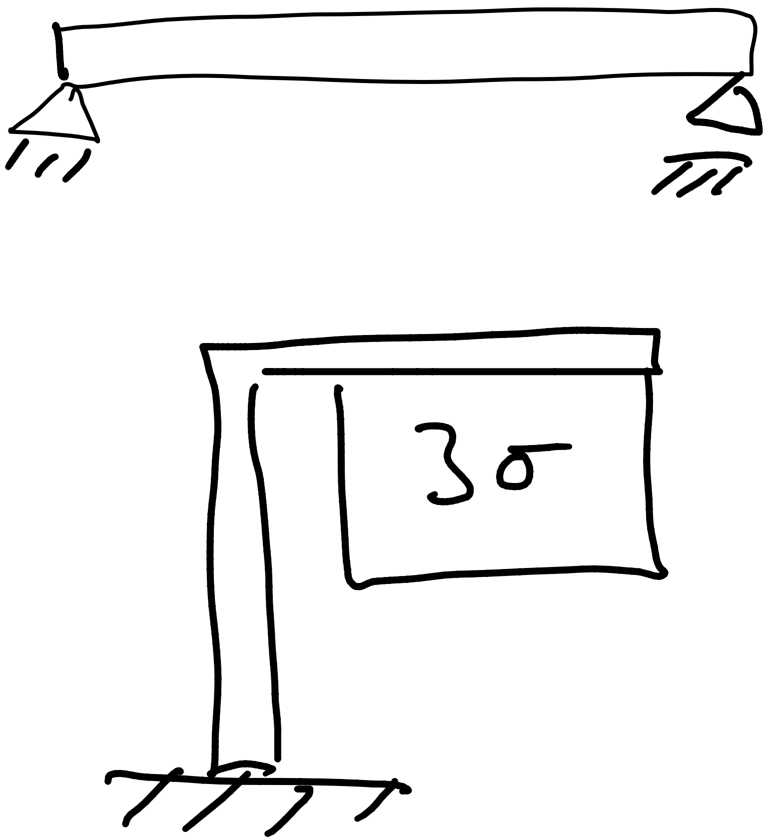
$$p + \frac{\rho}{2} c^2 + \rho g z = \text{const.}$$

$$c = |\vec{c}| \; \dots$$

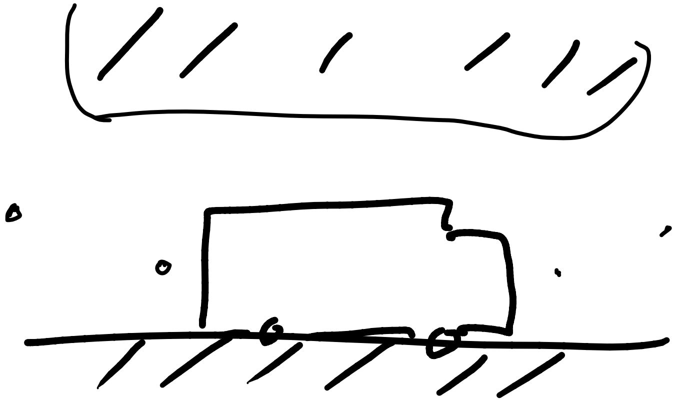
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

TM



Sch.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatroniker
Vorlesung 8

Spezialfall inkompressible Strömung $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

1. $\rightsquigarrow$ $\rho = \text{const}$ längs der Bahnlinie.

2. Stationäre Strömung (im fahrzeugfesten Sinn)

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$\int \frac{dp}{\rho}$ $\rightsquigarrow$ Bahnlinie = Stromlinie

$\|$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C_1 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{u_\infty^2}{2}.$$

3. $\psi \ll \frac{p}{\rho}$

$\|$

$g z$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Strömungslehre für Mechatroniker

Vorlesung 8