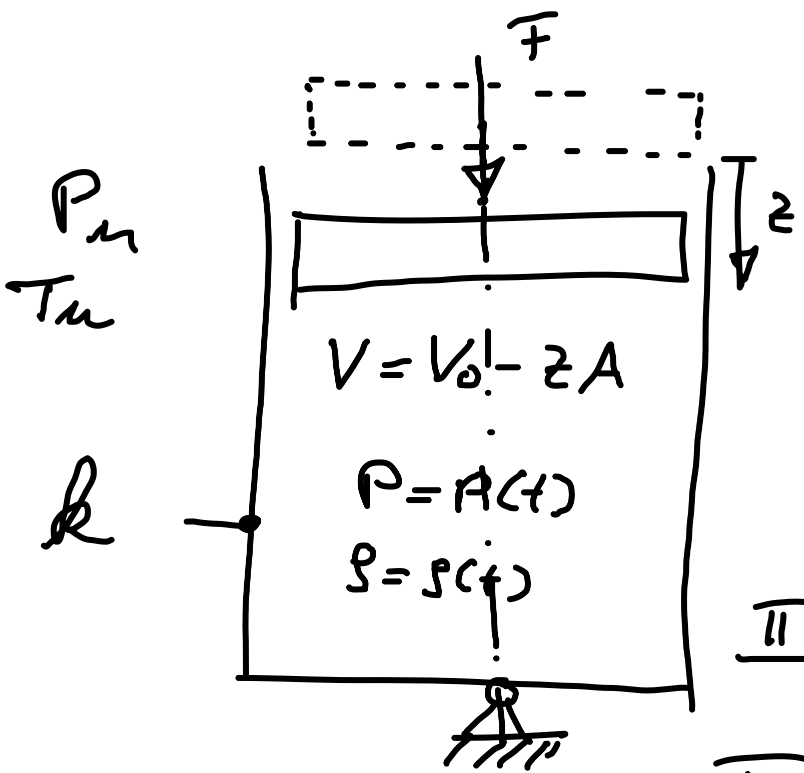
Anwendungsbeispiel für Konti + Energie

Modell eines Druckspeichers

① Abstraktion, Skizze im ausgelenkten Zustand (nicht im Gleichgewicht)



I. Annahme $A = A_T$

Verdrängerfläche $A := -\frac{dV}{dz} = \text{const.}$

Tragfläche $A_T := \frac{F}{p - p_u}$

II. Hydrostatik $\qquad$ V $\quad \frac{u^2}{2} \ll c_p T, c_v T$

III $\quad z = \hat{z} \sin \Omega t \qquad u \sim \hat{z}\,\Omega$

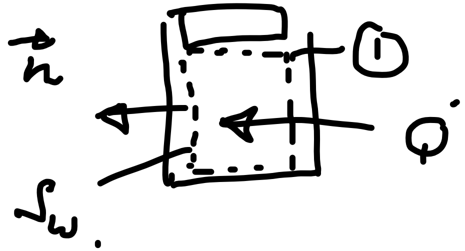
IV Kraftelement.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 13

Instationär $p(t)$, $\rho(t)$, $T(t)$



Energiegleichung

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\rho\right] A\,ds - \dot m_1 h_{t_1} + \dot m_2 h_{t_2} = P_1 + \dot Q$$

Kontigleichung

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\,ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0.$$

[illegible]

$\rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\right](V_0 - zA) - \rho \dot z A h_t = -q_n S_W,$$

mit $q_n = \vec q \cdot \vec n$

$A_1 = A \qquad A_2 = 0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 13

$$\frac{d\rho}{dt}(V_0 - zA) - \rho \dot{z} A = 0. \qquad (1)$$

$$\frac{d(\rho e)}{dt}(V_0 - zA) - \rho h \dot{z} A = - q_n S_W \qquad (2)$$

Anfangsbedingungen $\quad p(t=0) = p_0 = p_u + \frac{mg}{A_T}.$

$$T(t=0) = T_0 = T_u.$$

$\rho e = \rho c_v T$ (kalorisch ideal)

$= p \frac{c_v}{R}$ (thermisch ideal $p = \rho R T \Rightarrow \rho T = \frac{p}{R}$)

$= p \frac{1}{\gamma - 1}$ $\quad R := c_p - c_v \quad \gamma := \frac{c_p}{c_v}$

$\Rightarrow R = (\gamma - 1) c_v \Rightarrow c_v / R = \frac{1}{\gamma - 1}$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 13

$$\rho h = \frac{\gamma}{\gamma-1} p$$ für thermisch und kalorisch ideales Gas.

Kontinuität $\dot{\rho}(V_0 - zA) - \dot{z} A \rho = 0$ lin (1)

lin

$$\frac{1}{\gamma-1}\dot{p}(V_0 - zA) - \frac{\gamma}{\gamma-1}\dot{z} A p = -k S_W (T - T_0)$$ (2)

$p(0) = p_0$ $\qquad \rho(0) = \frac{p_0}{R T_0}$ $\qquad$ AB 1 ... AB 3

$T(0) = T_u = T_0$

$p = \rho R T$ nichtlinear. (3)

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

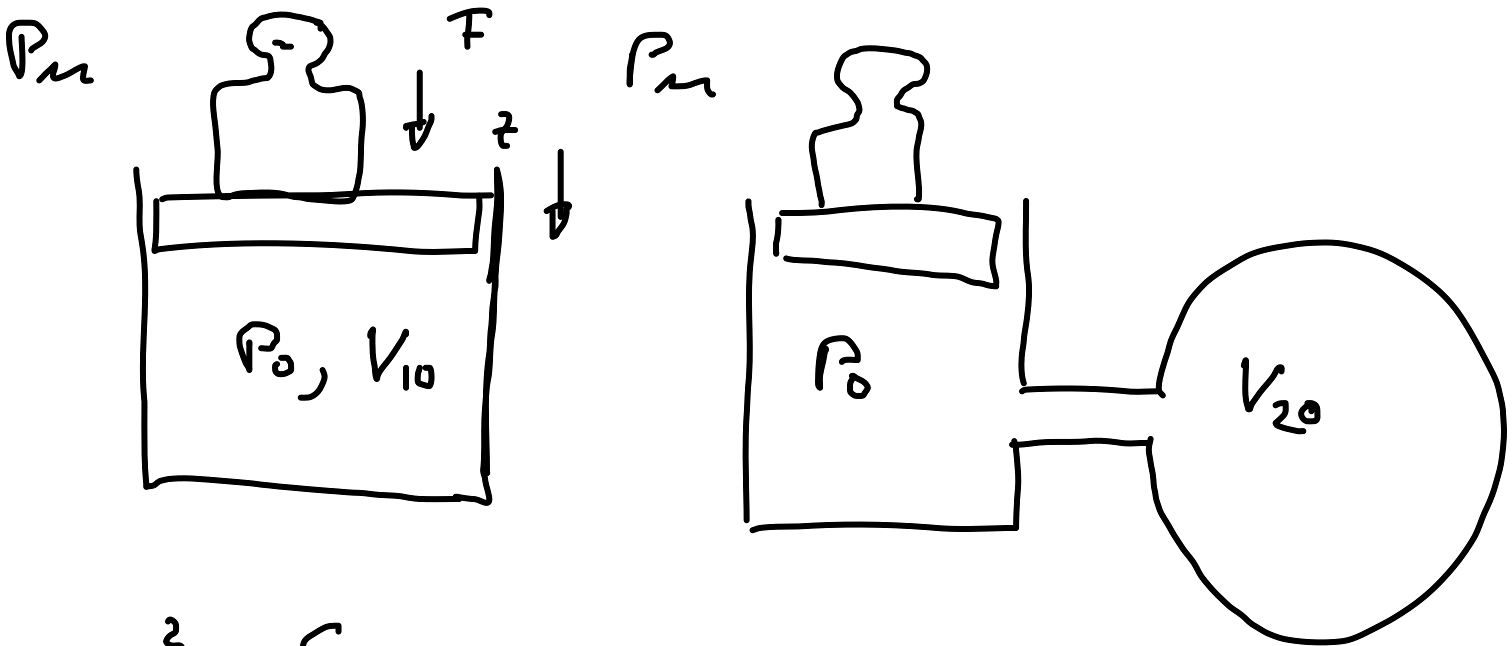
Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 13

Warum Luftfeder?

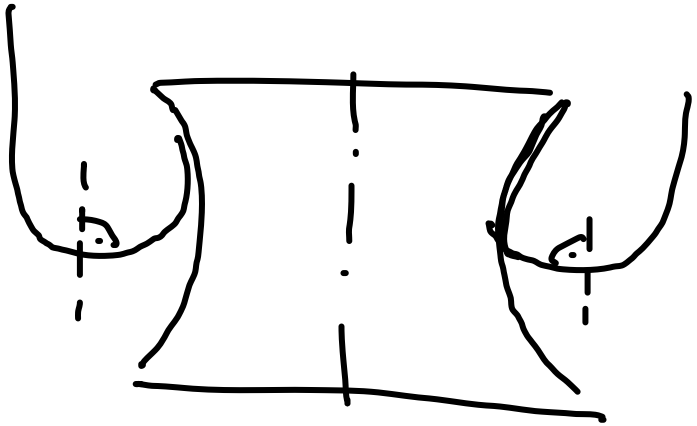
1. Funktionstrennung „Tragen“, „Energie Speichern“.



$$\omega^2 = \frac{c}{m}$$

$$c = \frac{dF}{dz} = \frac{d\left(A_T(p-p_u)\right)}{dz} = (p-p_u)\frac{dA_T}{dz} + A_T\frac{dp}{dz}.$$

$$A_T := \frac{F}{p - p_u}$$



$$A_T = A_z(z).$$

Annahme $A_T = \text{const} \rightsquigarrow \frac{dA_T}{dz} = 0$

$$c = A_T \frac{dp}{dV}\frac{dV}{dz}$$ Polytrope Zustandsänd.

$$= -A_T A \frac{dp}{dV} \overset{!}{=} + \frac{A_T A}{V_0} n p_0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 13

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{n\, p_0 \frac{A \cancel{A}}{V_0}\, g}{(p_0 - p_u)\, \cancel{A}}$$

$$= \frac{A}{V_0}\, g\, \frac{n}{1 - p_u/p_0} \approx \frac{A}{V_0}\, g\, n.$$

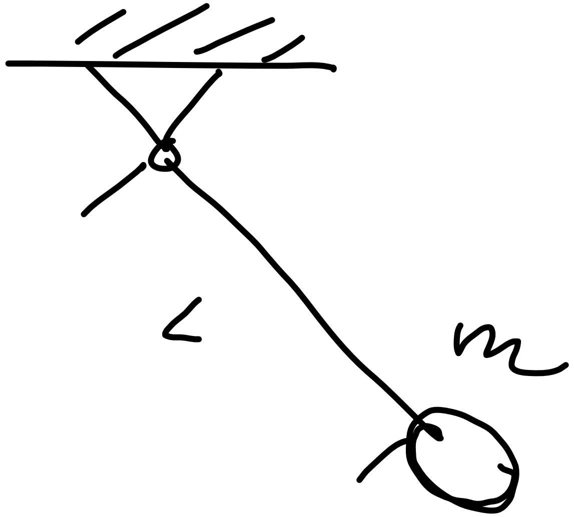
i.d.R. $p_0 \gg p_u$

$\frac{A}{V_0}$ = spezifische Oberfläche eines Beh.

$$\left[\frac{A}{V_0}\right] = \frac{1}{L}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}\, n \quad , \text{ mit } L := V_0/A .$$

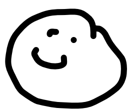
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbo-maschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 13



$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\omega^2 = n\,\frac{g}{L}$$

$$\omega \neq fn(m)$$



Beispiel für die Linearisierung von Systemen.

1. Annahme kleiner Amplituden $\frac{zA}{V_0} \ll 1.$

2. Störansatz (Perturbation) um den Betriebspunkt.

$$\rho(t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(t) \qquad \tilde{\rho} \ll \rho_0$$

$$p(t) = p_0 + \tilde{p}(t) \qquad \tilde{p} \ll p_0$$

$$T(t) = T_0 + \tilde{T}(t) \qquad \tilde{T} \ll T_0$$

$$V(t) = V_0 + zA \qquad zA \ll V_0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 13

3) Einsetzen der Störansätze in die Erhaltungsgleich. + Zustandsgleich.

$$p = \rho R T$$

$$p_0 + \tilde{p} = (\rho_0 + \tilde{\rho}) R (T_0 + \tilde{T})$$

$$= \underset{\text{lin}}{\rho_0 R T_0} + \underset{\text{lin}}{\tilde{\rho} R T_0} + \underset{\text{lin}}{\rho_0 R \tilde{T}} + \underset{\text{nichtlin.}}{\tilde{\rho} \tilde{T} R}$$

mit $p_0 = \rho_0 R T_0$ und $\cancel{\tilde{\phi}^2} \ll \tilde{\phi}$

$$\tilde{p} \approx \tilde{\rho} R T_0 + \rho_0 R \tilde{T} + O(\tilde{\phi}^2).$$

4) ~~Elim~~ Vernachlässigen aller Terme, die quadratisch oder höher Potenz der Störgröße sind.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 13

$$\dot{\tilde{\varrho}} V_0 + A \dot{z} \varrho_0 = 0$$

$$\dot{\tilde{p}} V_0 + A \dot{z} \gamma p_0 + (\gamma - 1) S_w k \tilde{T} = 0$$

$$\tilde{p} = \tilde{\varrho} R T_0 + \varrho_0 R \tilde{T}$$

lineare Syst.

Ansatz

$$\tilde{p} = p_0 \, p_+ \, e^{i \Omega t}$$

$$\tilde{\varrho} = \varrho_0 \, \varrho_+ \, e^{i \Omega t}$$

$$\tilde{T} = T_0 \, T_+ \, e^{i \Omega t}$$

$$\hat{z} A = \tilde{V} = V_0 \, V_+ \, e^{i \Omega t}$$

p_+ dimensionslose Druckamplitude

⋮

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 13

$$\varrho_+ + V_+ = \sigma$$ Konti:

$$P_+ + \gamma V_+ - i(\gamma - 1)\frac{S_w k T_0}{\Omega V_0 P_0} T_+ = 0$$ Energie

Π_2 $\quad$ Π_1 siehe vorher.

$$P_+ = \varrho_+ + T_+$$

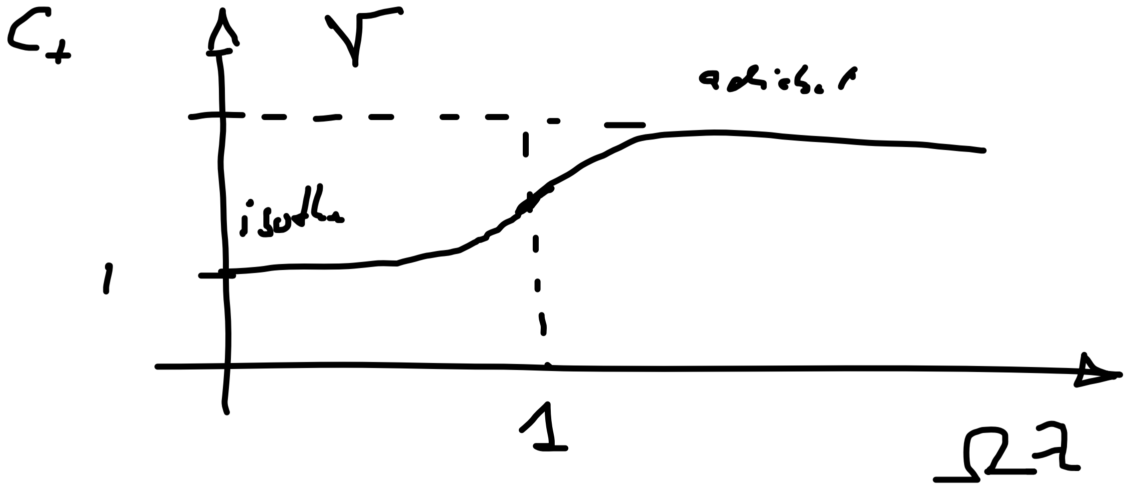
typisch Zeit: Relaxationszeit $\lambda = \dfrac{V_0 \varrho_0 c_p}{S_w k} = \dfrac{m_0 c_p}{S_w k}$.

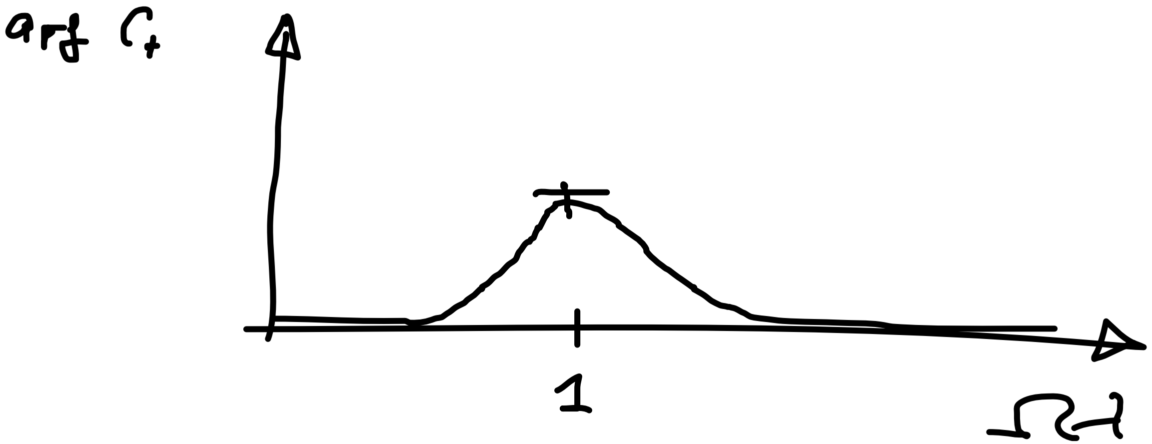
$$\Pi := \frac{S_w k T_0}{\Omega V_0 P_0} = \frac{S_w k}{\Omega V_0 \varrho_0 c_p}\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{1}{\Omega \lambda}\frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

λ

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme
Vorlesung 13

$$\frac{p_+}{V_+} = - \frac{1 + i\Omega\lambda}{1 + \frac{1}{\gamma} i\Omega\lambda} \qquad c_+ := \left| \frac{p_+}{V_+} \right|$$





TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Vorlesung 13