Ab morgen:

Neue pdf-VL-Folien zur VL 7 vom 24.05.2011 auf OLW!

heute, wie auf der HP veröffentlicht,

keine VRÜ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

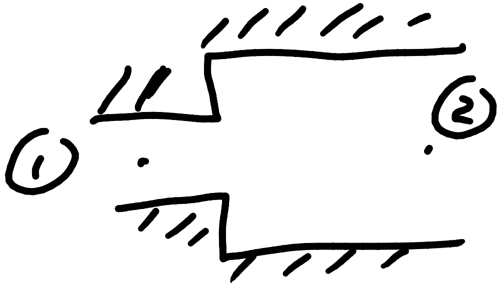
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

Verluste

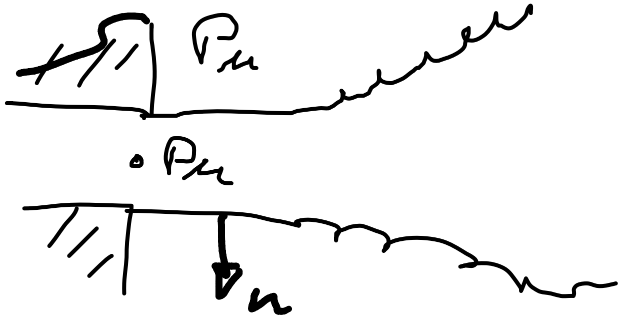
$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2}(u_1 - u_2)^2$$

Carnotscher Stoßverlust



$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} u^2$$

Austrittsverlust



$$\frac{\partial p}{\partial n} \sim \frac{u^2}{R}$$

sofern $M^2 \ll 1$

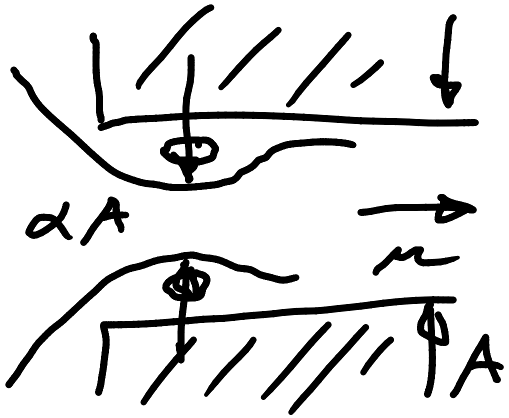
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Trägheitsverlust



ideal schlechter Einlauf

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} u^2 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 .$$

Reibungsverlust.

$$\Delta p_v := \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 \underline{\underline{\lambda}} \frac{L}{d_h}$$

λ dimensionsloser Druckverlust pro Längeneinheit.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

ψ' Potential der Massenkraft

$$\frac{\varrho}{2} u_1^2 + p_1 + \psi_1' \varrho = \frac{\varrho}{2} u_2^2 + p_2 + \psi_2' \varrho + \sum_{i=1}^{N} \Delta p_{V,i}$$

▽ Zusammenhang zur Energiegleichung

$$\frac{d}{dt} \int \frac{\varrho}{2} u^2 \, dV + \int \frac{\varrho}{2} u^2 \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \qquad \frac{\partial}{\partial t} \int \varrho e \, dV + \int \varrho e \, \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\frac{DK}{Dt} + \frac{DE}{Dt} = P + \dot{Q} \qquad 1.\ \text{H.S.}$$

Die zeitl. Änderung der kinetischen Energie

$$K = \int_{V(t)} \frac{\varrho}{2} u^2 \, dV$$ plus die Änderung der

$$u = |\vec{u}|$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

inneren Energie

$$E = \int_{V(t)} \rho e \, dV$$

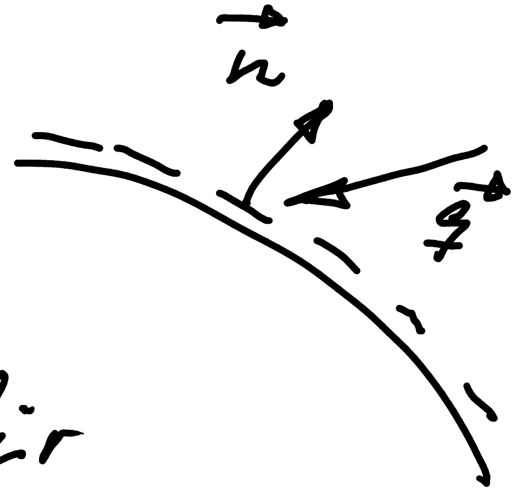
ist gleich der ~~Leist~~ Arbeit pro Zeit, die an dem Körper verrichtet wird

$$P = \oint_{S} \vec{u} \cdot \vec{t} \, dS + \int_{V} \rho \vec{k} \cdot \vec{u} \, dV$$

plus der Wärme, die dem Körper pro Zeit zugeführt wird

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\dot{Q} = -\oint_{S} \vec{q}\cdot\vec{n}\, dS$$



Umformen des 1. Hauptsatzes für eine im zeitlichen Mittel stationäre Strömung unter der Voraussetzung, daß die Volumenkraft $\vec{k} = -\nabla\psi$ ein Potential ψ hat.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

$$S = A_1 + A_2 + S_f + S_w$$

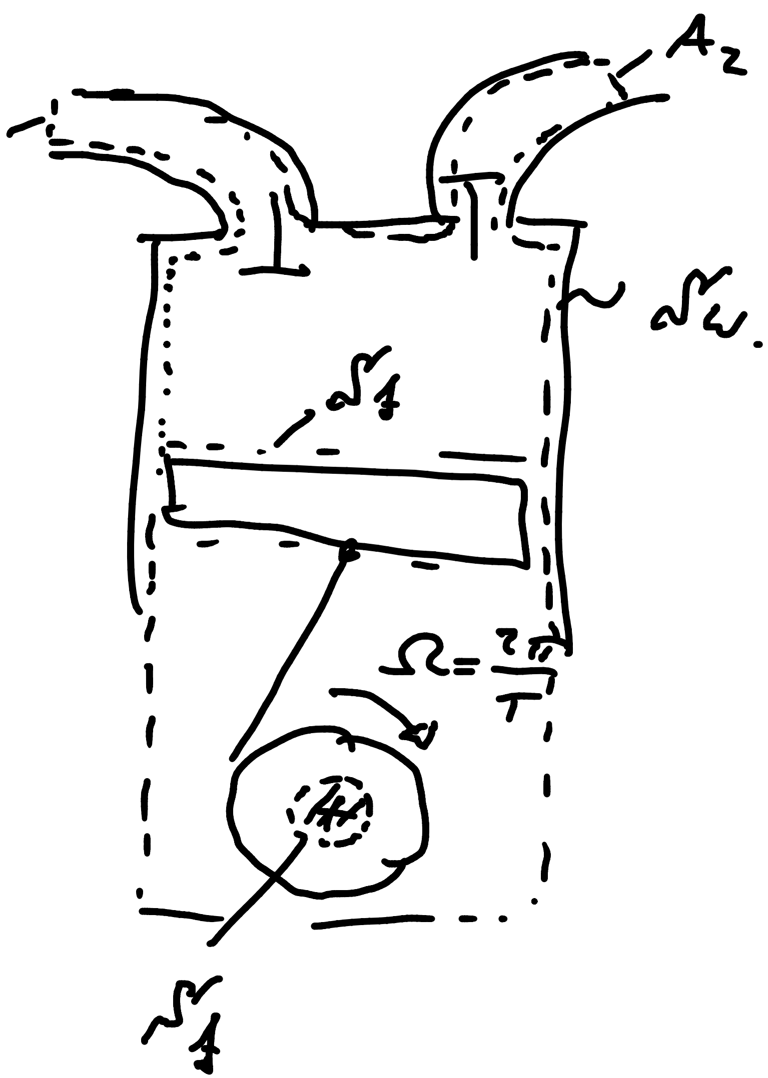
$$\bar{\phi} := \frac{1}{T}\int_0^T \phi \, dt.$$

A_1 Einlassfläche

A_2 Auslassfläche

S_f Bewegte Wände innerhalb d. KV.

S_w Wandfläche



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

$\equiv 0$ für periodisch Proz.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)dV + \oint \rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS =$$

$S = A_1 + A_2 + S_w + S_4$

$$= \underbrace{\int_{S_4} \vec{t}\cdot\vec{u}\,dS}_{P_4} + \int_{A_1+A_2} -p\vec{n}\cdot\vec{u}\,dS +$$

$$+ \underbrace{\int_V \rho\vec{k}\cdot\vec{u}\,dV}_{\text{Satz von Gauß.}} + \dot{Q}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\overline{P_1} + \overline{\dot{Q}} = \overline{\dot{m}\,(h_{t2} - h_{t1})}$$

$$h_t = h + \psi + \frac{u^2}{2} \quad \text{Totalenthalpie}$$

$$= e + \frac{p}{\varrho} + \psi + \frac{u^2}{2}$$

Wenn kein Wärme zugeführt wird und kein Arbeit verrichtet wird, dann bleibt die Totalenthalpie $h_t = \text{const}$ erhalten.

$$c_p T_t = \text{const}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

$$\nabla$$

$$\int_{A_1+A_2} \rho\left(\frac{u^2}{2}+e+\frac{p}{\rho}\right)\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = P_A + \dot{Q} + \int_V \rho\vec{k}\cdot\vec{u}\,dV$$

$$\psi$$

Zur Leistung der Massenkräfte.

$$\int_V \rho\vec{k}\cdot\vec{u}\,dV = -\int_V \nabla\psi\cdot(\rho\vec{u})\,dV$$

$$= -\int_V \nabla\cdot(\psi\rho\vec{u})\,dV + \overbrace{\int_V \underbrace{\nabla\cdot(\rho\vec{u})}_{-\frac{\partial\rho}{\partial t}}\psi\,dV}^{\equiv 0.}$$

$$= -\oint_S \rho\psi\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u})=0.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

$$\dot m \,(h_{t2} - h_{t1}) = P_f + \dot Q \qquad ↯$$

Vergleich 1. HS mit der Bernoulli-Gleichung für inkompressible Strömungen homogener Dichte $\rho \equiv \text{const}$

$$\dot m = \rho \dot V$$

Gesamt- od. Totaldr.

$$\dot V \left[\left(\rho \frac{u^2}{2} + p + \rho \psi \right)_2 - \overbrace{\left(\rho \frac{u^2}{2} + p + \rho \psi \right)_1}^{p_t} \right] +$$

$$+ \dot V \rho (e_2 - e_1) = P_f + \dot Q$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

1. keine Leistungs- und Wärmezufuhr.

$$\left(\frac{\rho}{2}u^2 + p + \rho\psi\right)_2 - \left(\frac{\rho}{2}u^2 + p + \rho\psi\right)_1 +$$

$$+ \rho\,(e_2 - e_1) = 0$$

1. HS — Erster Hauptsatz

$$\left(\frac{\rho}{2}u^2 + p + \rho\psi\right)_2 - \left(\frac{\rho}{2}u^2 + p + \rho\psi\right)_1 +$$

Bernoulli: $+ \Delta p_v$

$$\rightarrow \quad \boxed{\Delta p_v = \rho\,(e_2 - e_1) = \rho\,c\,(T_2 - T_1)}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

Leistung wird zugeführt $P_A > 0$ Arbeitsmasch.

$P_A < 0$ Kraftmaschine.

$$\dot{Q} = 0$$

$$\dot{V}\left(p_{t2} - p_{t1}\right) + \varrho \dot{V} \Delta e = P_A$$

$$\eta := \frac{\dot{V}\left(p_{t2} - p_{t1}\right)}{P_A}$$ für eine Arbeitsm.

$$\eta := \frac{P_A}{\dot{V}\left(p_{t2} - p_{t1}\right)}$$ für eine Kraftmaschine.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

$$\eta^{\pm 1} P_1 = \dot{V}\left(p_{t2} - p_{t1}\right)$$

+1 Arbeitsmaschine

−1 Kraftmaschine

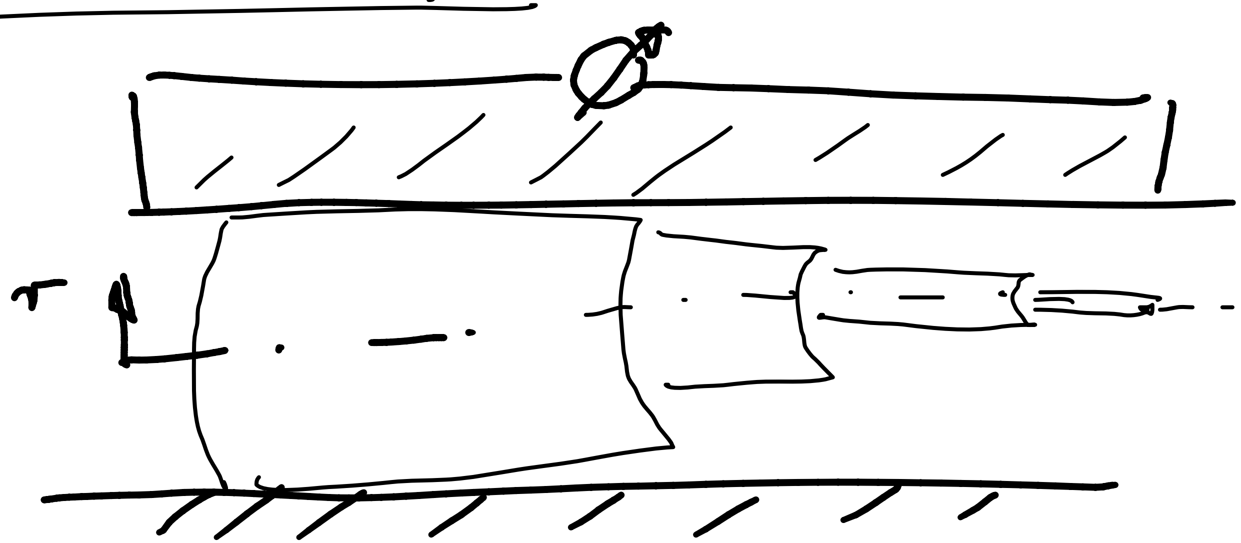
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2}\bar{u}^2 \underbrace{\lambda}_{4} \frac{L}{d_h}$$ Viskose Druckarbeit

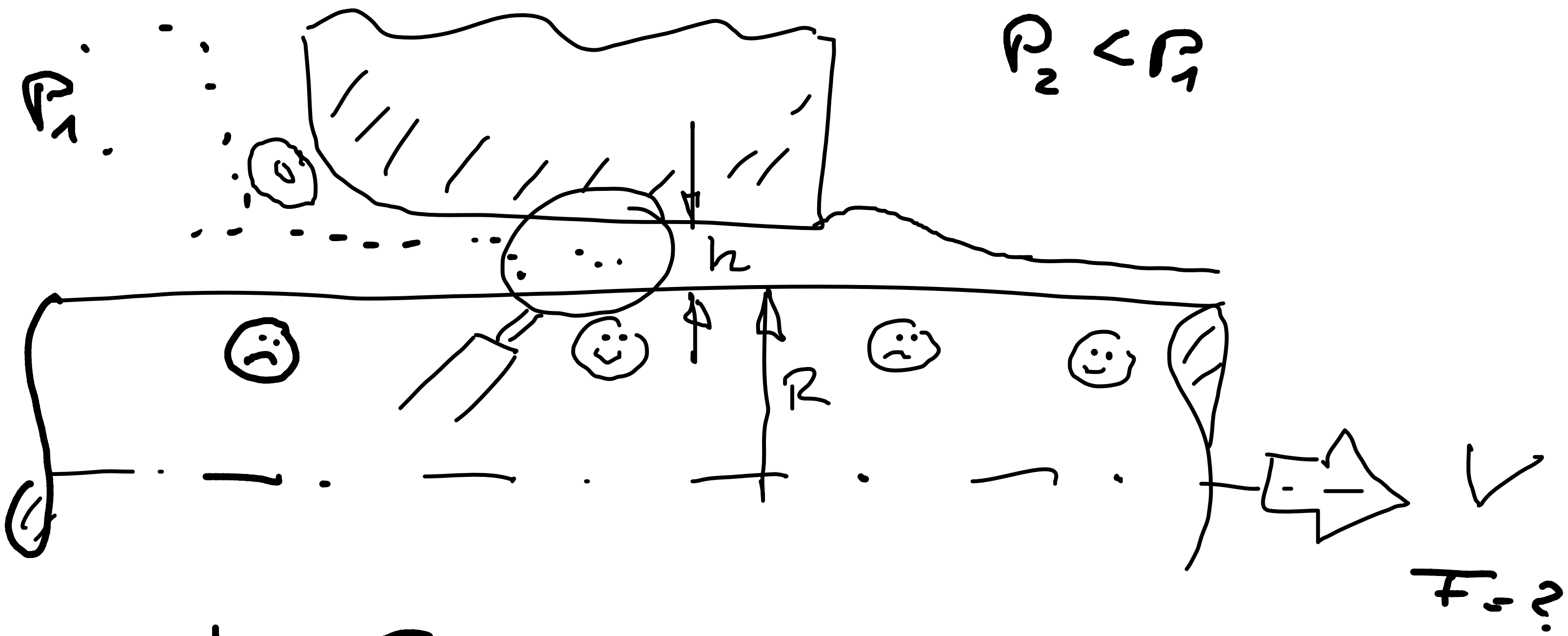
Schichtenströmungen



Rohrströmung. $u_z(r)$ bei einer stationären Rohrströmung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

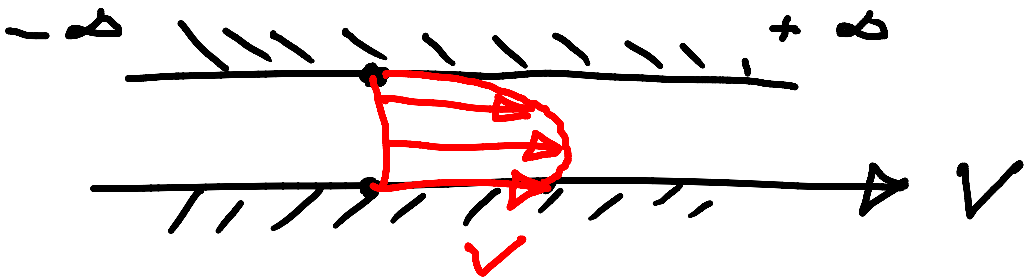
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11



$h \ll R$

Analyse der Strömung in der Absicht
⇝ ebene Strömung.

Druck-Schlepp-Strömung.



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

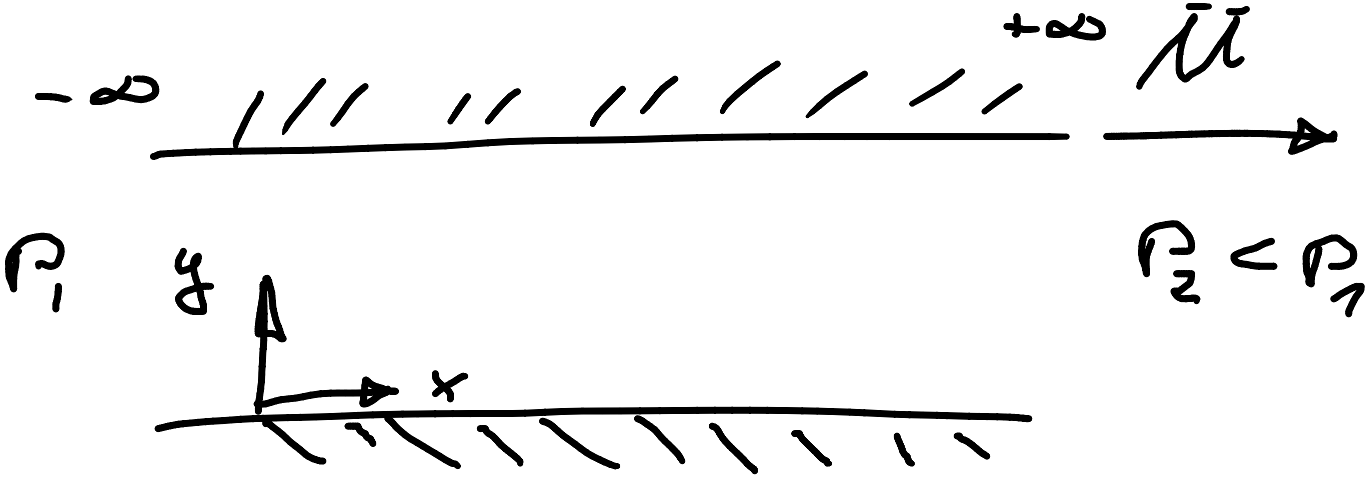
Cauchy-Gleichung

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \underbrace{\rho \vec{k}}_{\overset{!!!}{\sigma.}} \underbrace{- \nabla p + \nabla \cdot \underset{\sim}{P}}_{\nabla \cdot \underset{\sim}{T}} \quad \Big| \cdot \vec{e}_x$$

$$\underset{\sim}{T} = - p \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

Vereinfachung für eine ebene Strömung



$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + \underbrace{\cancel{u_y \vec{e}_y}}_{=0} + \underbrace{\cancel{u_z \vec{e}_z}}_{=0} = u \, \vec{e}_x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \not\equiv 0.$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} < 0.$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

$$\underbrace{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right.} + \underbrace{u}_{\substack{\text{Konvektive}\\ \text{Beschl.}\\ \equiv 0}}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{dp}{dx} + \underbrace{\frac{d}{dy}(\tau_{xy})}_{(\nabla\cdot\underset{\sim}{P})\cdot\vec{e}_x}$$

$\equiv 0 \longrightarrow$ für stationäre Strömung

Transformation in den Frequenzraum

$$u(r,t) = \hat{u}(r)\, e^{i\Omega t} \quad \Big| \quad p(t) = \hat{p}\, e^{i\Omega t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Omega\, \hat{u}(r)\, e^{i\Omega t}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

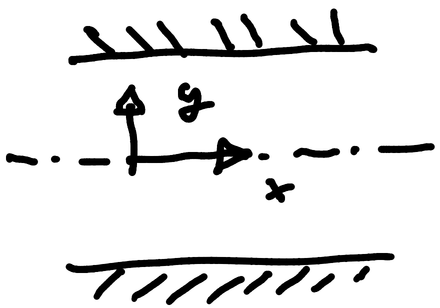
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

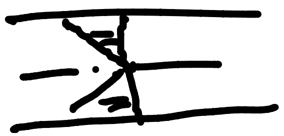
$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{d}{dy}(\tau_{xy}).$$

$$\tau_{xy} = \frac{dP}{dx}\, y + C_1$$

Spezialfall Druckgetriebene Strömung



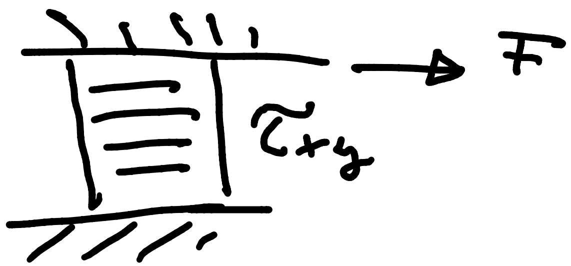
$$\tau_{xy} = \frac{dP}{dx}\, y$$



Infolge Symmetrie muß τ_{xy} in der Symmetrieebene verschwinden.

Spezialfall Schleppströmung

$$\tau_{xy} = C_1 = \tau_w$$

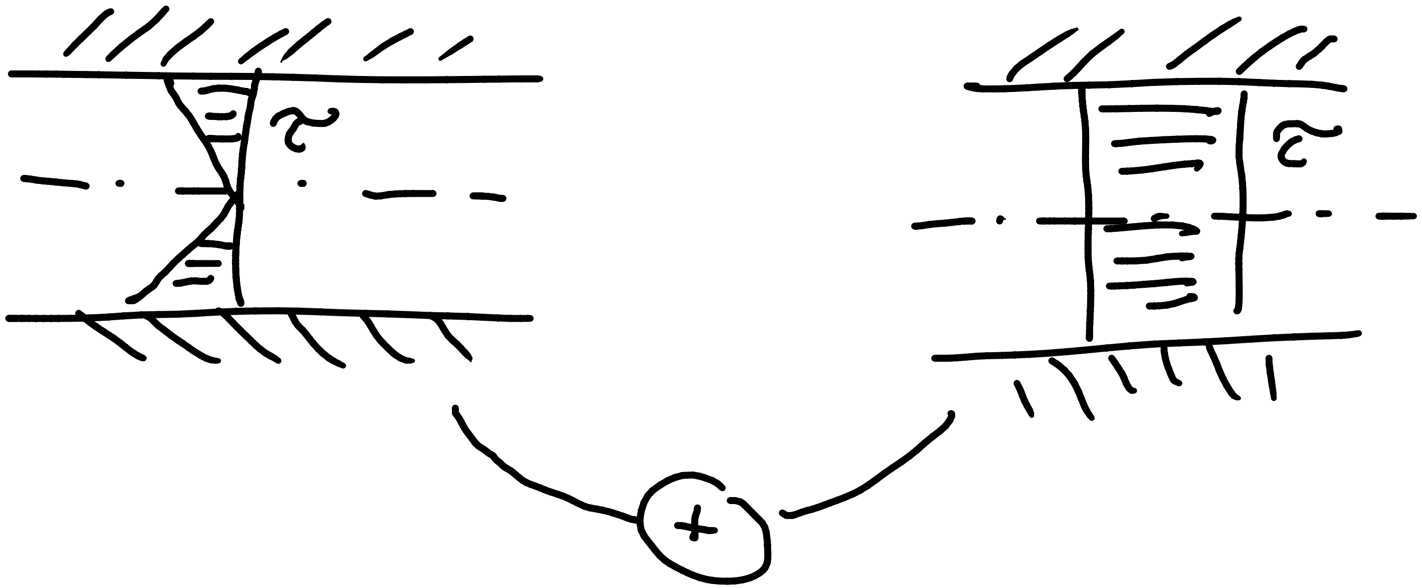


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

Druckströmung

Schleppströmung



Superposition ist möglich

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho k_x - \frac{dp}{dx} + \frac{d}{dy}(\tau)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

Einsetzen des Materialgesetzes

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$ für ein Newtonsches Medium.

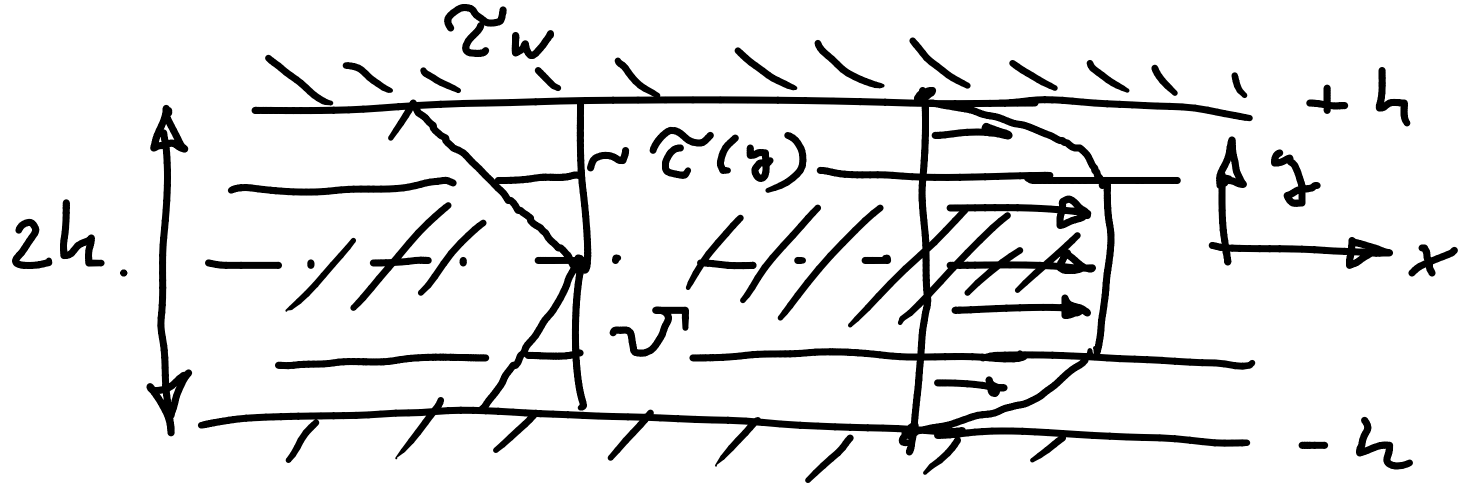
$$\tau = \begin{cases} \eta \frac{du}{dy} + \vartheta & \text{für } \tau \geq \vartheta \\ G\gamma & \text{für } \tau < \vartheta \end{cases}$$

für ein Binghammedium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11



$$\frac{dp}{dx}\,y = \tau$$

Wandschubspannung $-\tau(y=\pm h) = \underbrace{\tau_w = -\frac{dp}{dx}\,h}_{\text{Kräftegleichgewicht}}$.

$$-\frac{\tau_w}{h}\, y = \eta \frac{du}{dy}$$

$$C_2 - \frac{\tau_w}{2 h \eta}\, y^2 = u(y).$$

$u(h) = 0$ Haftbedingung $\rightarrow C_2$

$\left.\frac{du}{dy}\right|_0 = 0$ Symmetriebed.

$\rightarrow C_1$

$$C_2 = \frac{\tau_w}{\eta\, 2}\, h$$

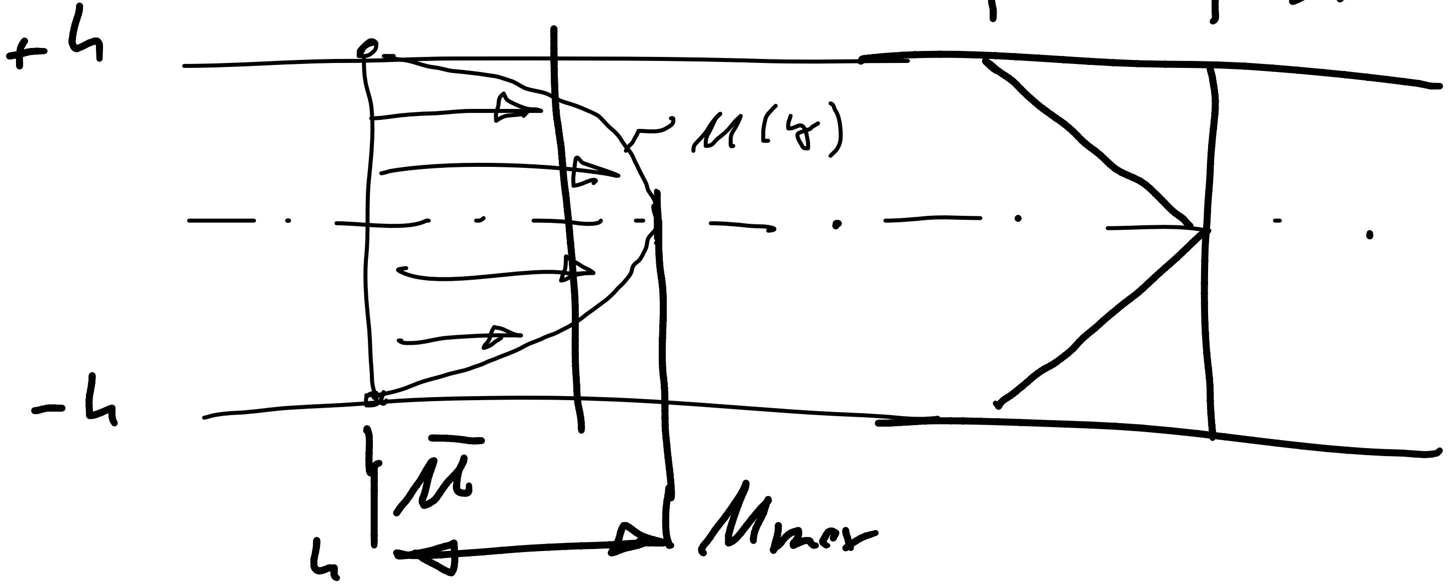
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11

$$u(y) = \frac{\tau_w}{2\eta} h \left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right).$$

$$\tau_w = -\frac{dp}{dx} h.$$



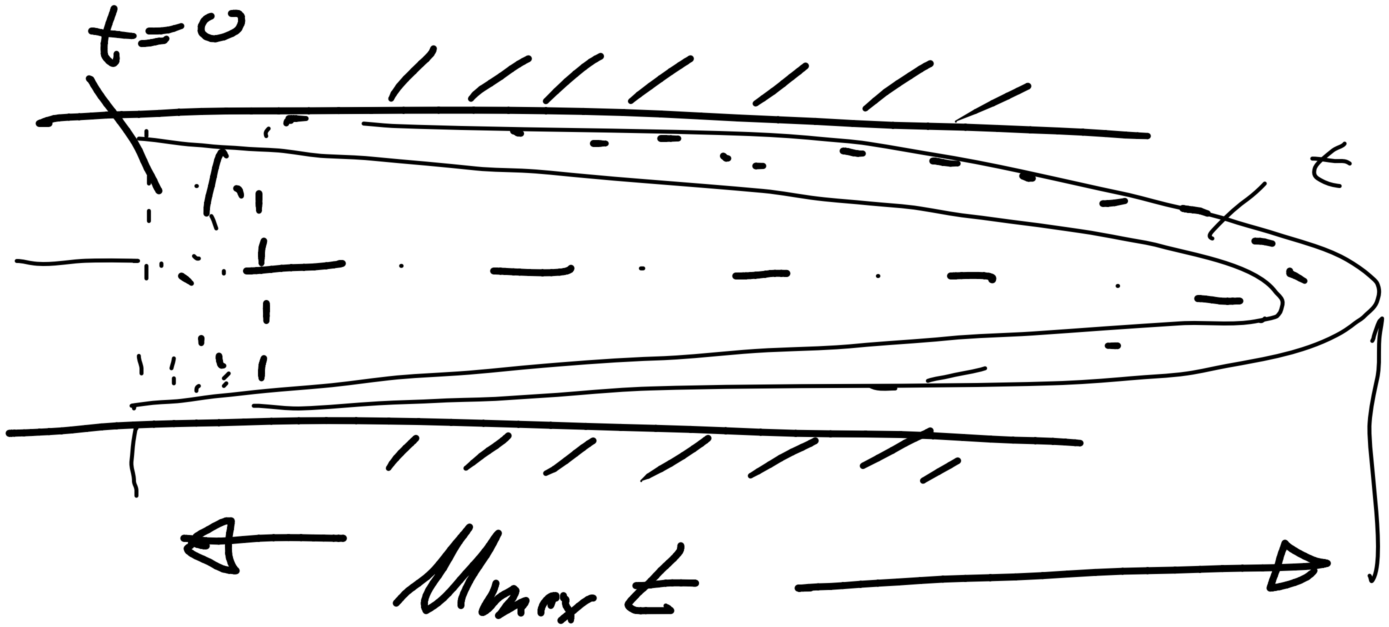
$$\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u(y)\,dy = \frac{\tau_w}{2\eta} h \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\tau_w h}{12\eta}.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2011
Einführung in die Hydrodynamik
Vorlesung 11