Thema:

Bernoulli im rotierenden System

↳ Relativgeschw. $w = |\vec{w}|$

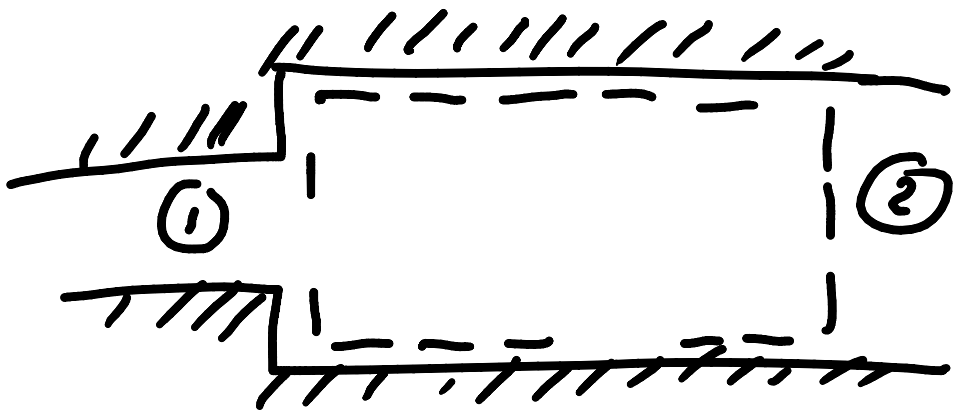
↳ Potential der Zentrifugalkraft $\frac{1}{2}(\Omega r)^2$

Carnotsch Stoßverlust ↯

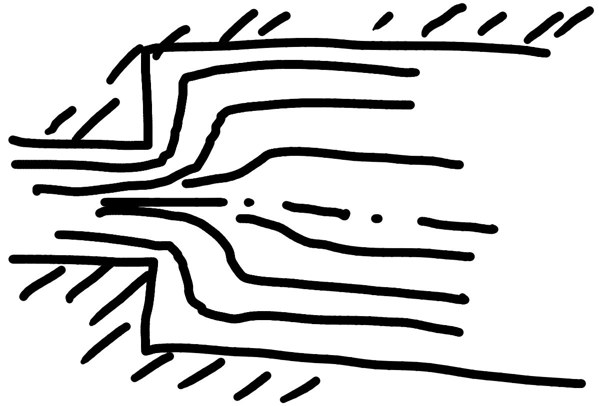
≠ Verdichtungsstoß

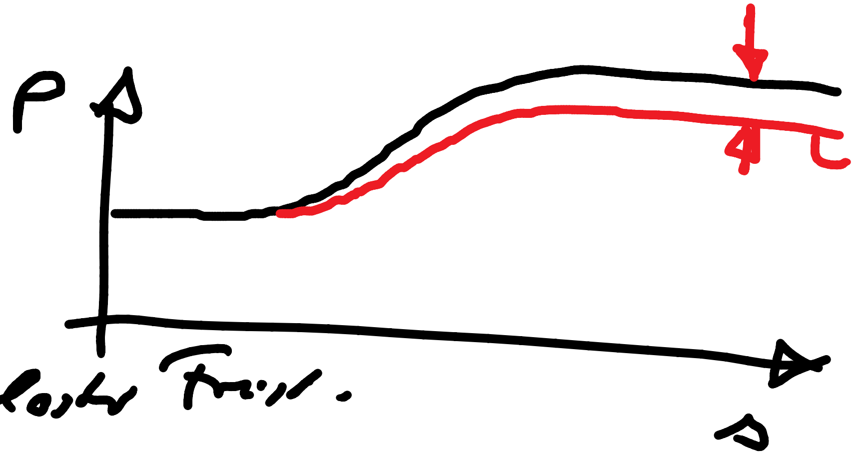
Stoßverlust = Trägheitsverlust sind vom
Betrag von der <u>Viskosität unabhängig.</u>

Viskose Druckverlust. $\sim \eta$



Ideal $(p_2 - p_1)_{ideal}$

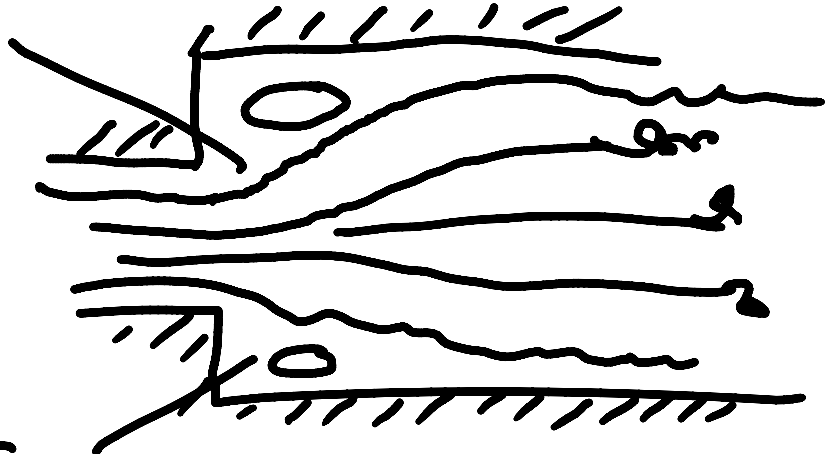




$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2}(u_1 - u_2)^2$$

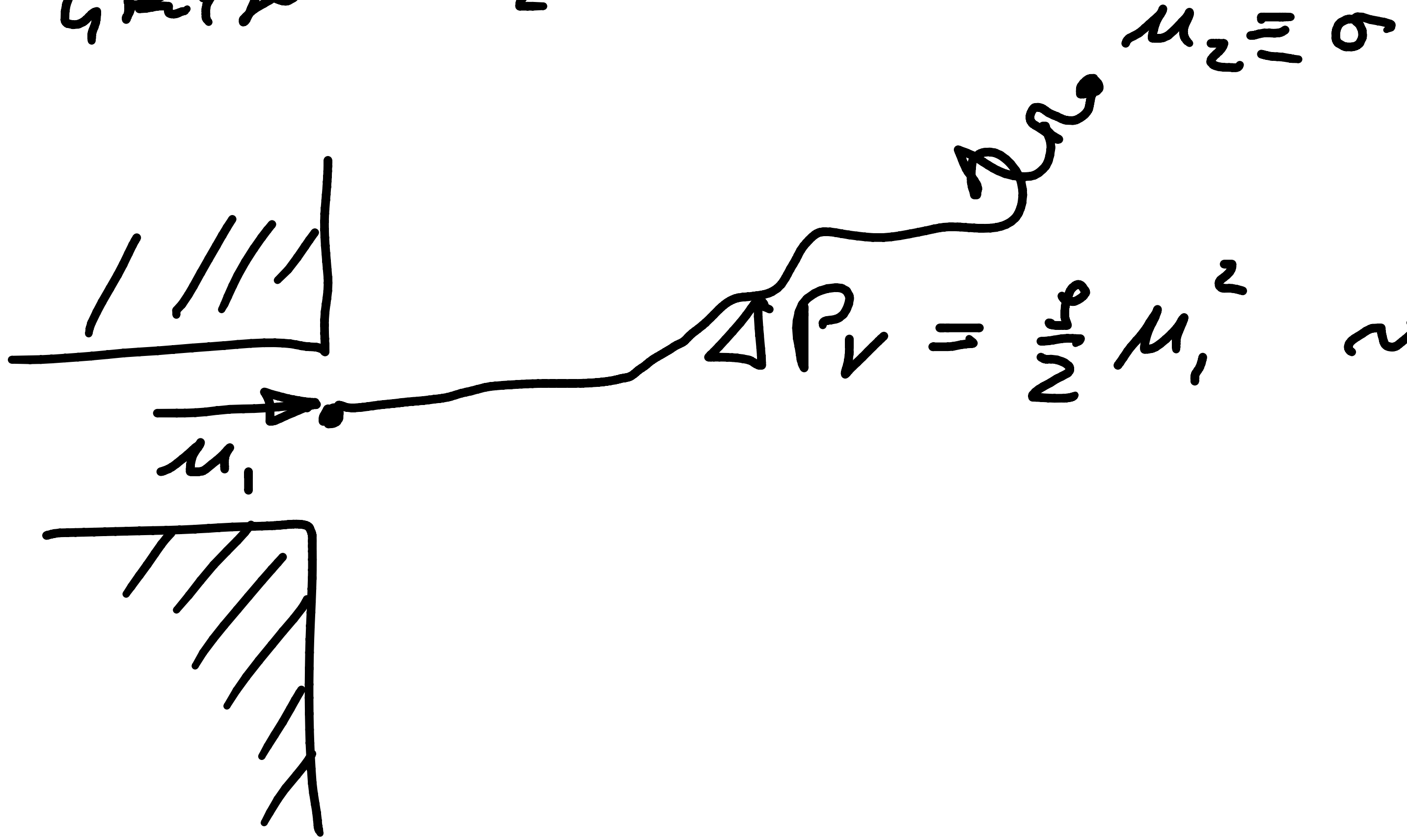
abgelöster Freistr.

Real $\underline{(p_2 - p_1)_{real}}$



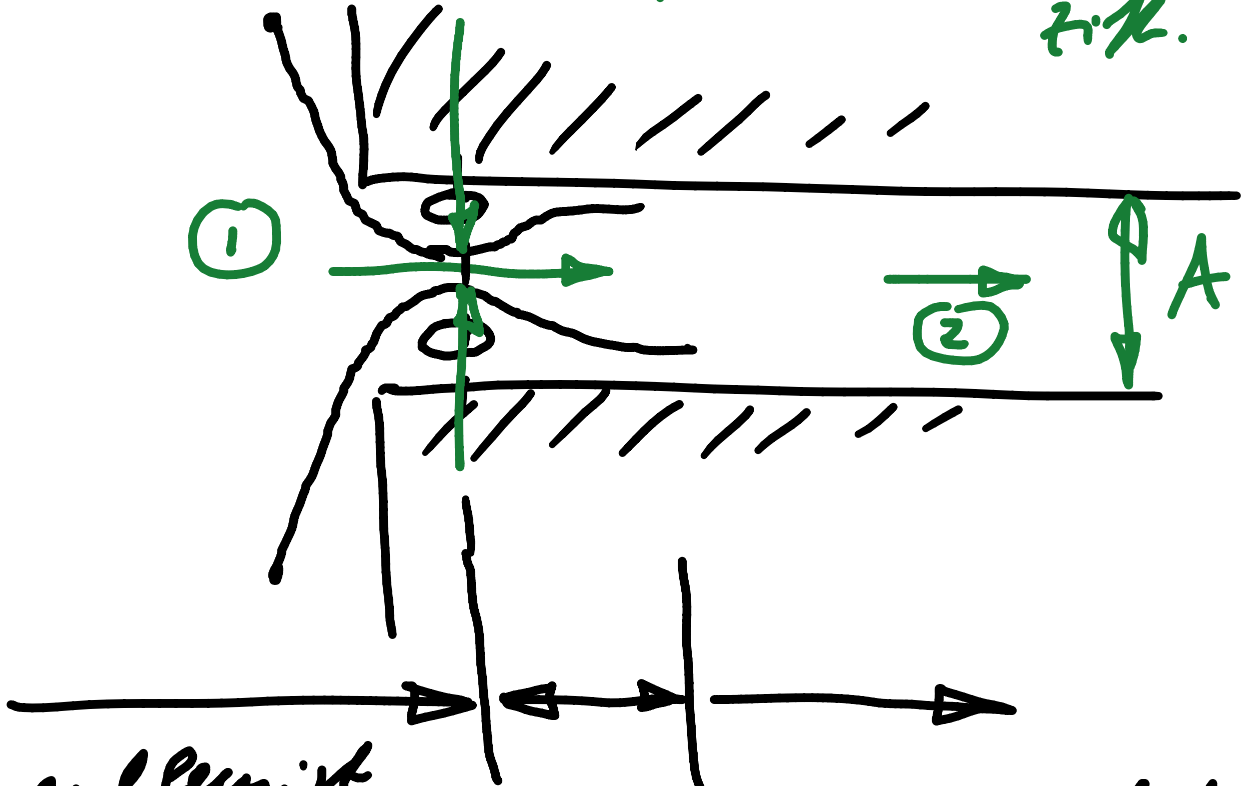
Totwasser

Grenzfall $u_2 \to 0$



$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} u_1^2 \sim \rho$

αA $\quad$ α Kontraktions-ziff.

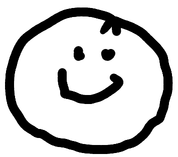


beschleunigte Ström.

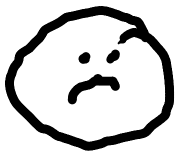
verzögerte Str.

Trägheitsdruckverl. $\sim \rho$

ausgeglich. Str. . viskoser Druckverlust $\sim \eta \sim l$

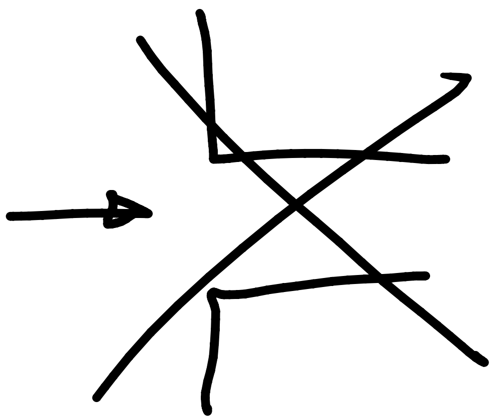


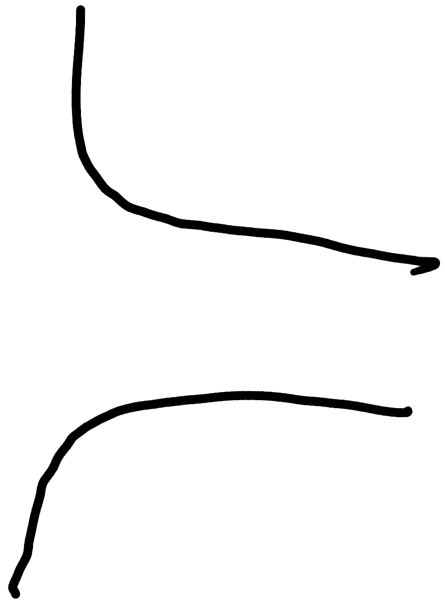
$ds' = 0$

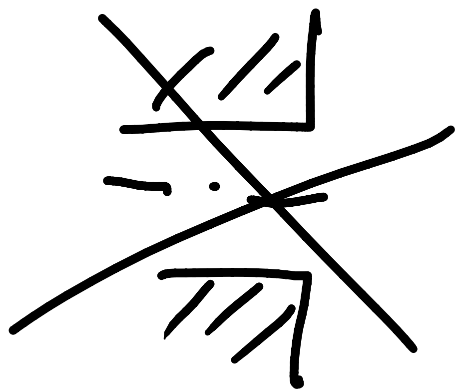


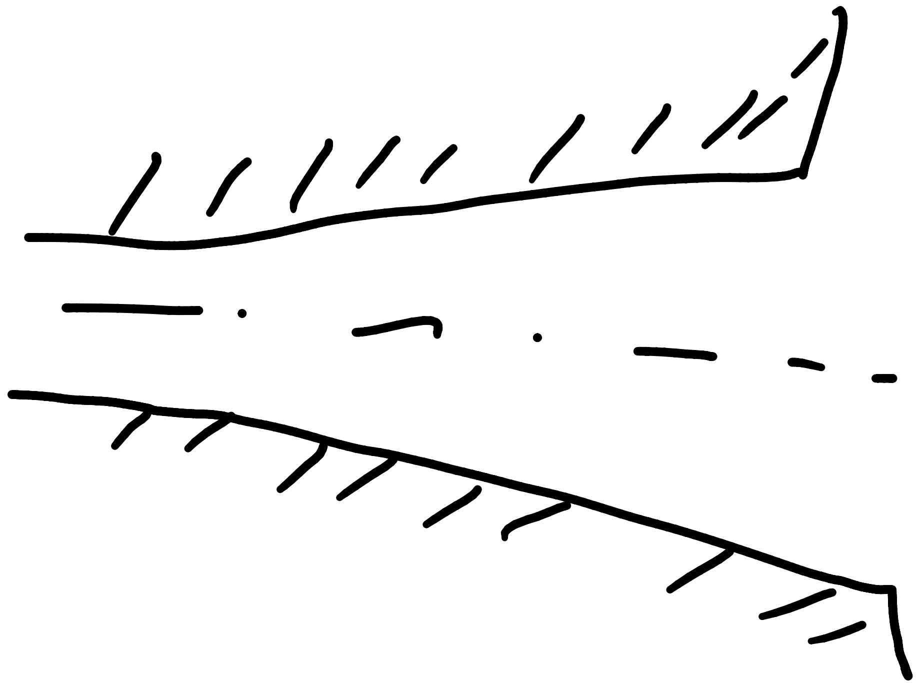
$ds' > 0$

Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz









Drallsatz und Eulersche Turbinengleichung.

Starrkörpermechanik kann der Drallsatz aus dem Impulssatz hergeleitet werd.

Bei deformierbaren Körpern ist dies nicht möglich

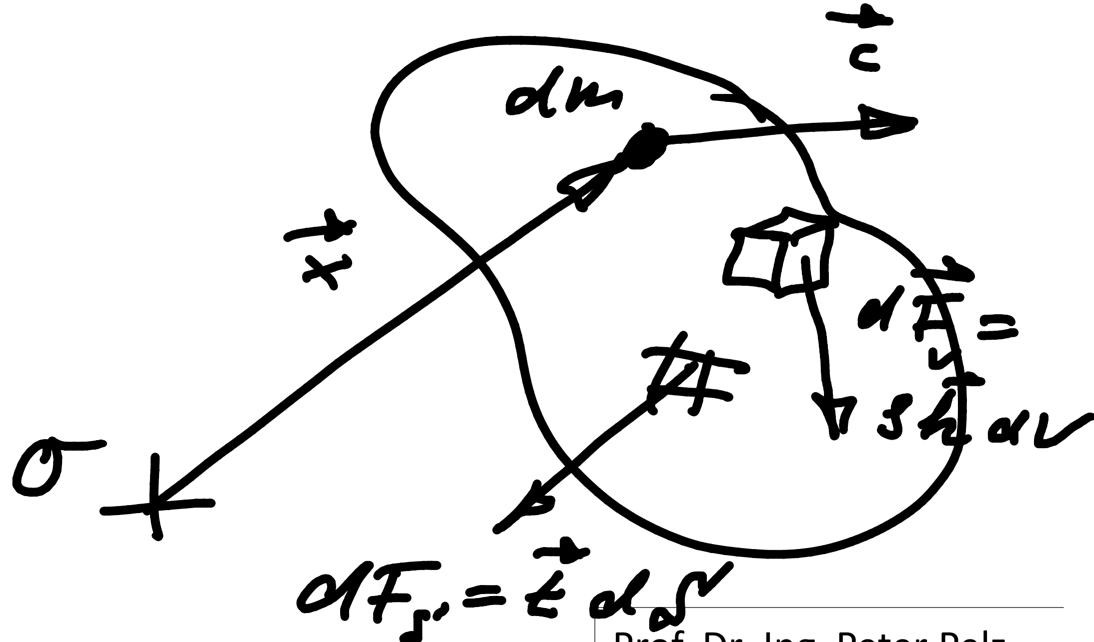
↳ unabhängiges Axiom (Erfahrungssatz)

1756 Leonard Euler.

Die zeitliche Änderung des Dralles eines materiellen Körpers ist gleich allen Momenten auf den Körper.

$$\vec{D} = \int d\vec{D} \qquad d\vec{D} = \vec{x} \times \rho \vec{c}\, dV$$

$$\vec{M} = \oint_S \vec{x} \times \vec{t}\, dS + \int_V \vec{x} \times \rho \vec{k}\, dV$$



$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \vec{x} \times \rho \vec{c} \, dV = \oint \vec{x} \times \vec{t} \, dS + \int_V \vec{x} \times \rho \vec{k} \, dV$$

$$S = S_{W} + A_1 + A_2 + S_R$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z .$$

Wellenleistung.

$$P_S = \vec{M}_{W} \cdot \vec{\Omega}$$

$\parallel$

Shaft

Für die Leistungsübertragung.

$$P_\delta = \vec{M}_\delta \cdot \Omega \vec{e}_z = M_z \Omega$$

ist nur die axiale Komponente des Momentes und damit der Drallsatz wichtig.

Axiale Komponente des Drallsatzes

↳ Eulersche Turbinengleichung..

$$(\vec{x} \times \rho \vec{c}) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{x} = \underline{r \vec{e}_r} + z \vec{e}_z$$

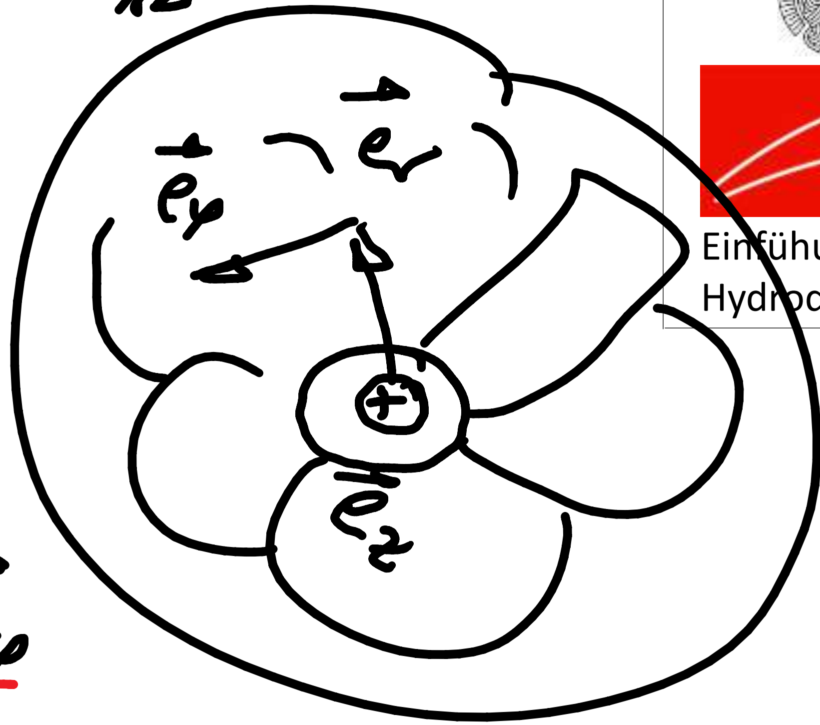
$$\vec{c} = c_z \vec{e}_z + c_r \vec{e}_r + \underline{c_\varphi \vec{e}_\varphi}$$

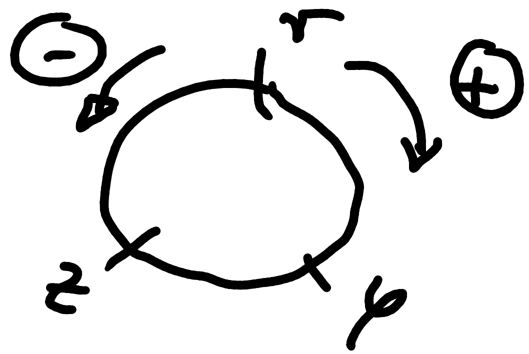
$$(\vec{x} \times \rho \vec{c}) \cdot \vec{e}_z = \underline{\underline{r c_\varphi \rho}}$$

$r c_\varphi = r c_u$ „Drall" eines Flüssigkeitsteilchens

$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_u$

$\vec{h} \equiv 0.$

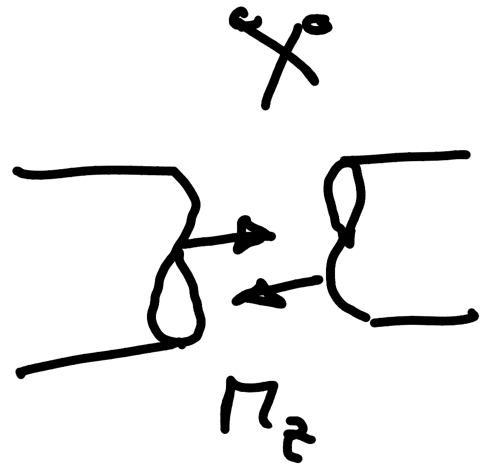




z-Komponente

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, r\, c_u \, dV = M_z + \underbrace{\int_{A_1+A_2} \left(\vec{x} \times -p\vec{n}\right)\cdot \vec{e}_z \, dS}_{\equiv 0.}$$

$$M_z = \int_{S_S} \vec{x} \times \vec{t} \, dS$$



Im zeitlichen Mittel stationäre Strömung.

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_V \frac{\partial(\varrho r c_u)}{\partial t}\, dV + \int_{A_1+A_2} \varrho r c_u \, \vec{c}\cdot\vec{n}\, dA =$$

$$= M_z .$$

Spezialfall: starrer Körper

$$c_u = \Omega r$$

$$\dot{\Omega} \underbrace{\int_V \varrho r^2 dV}_{\Theta} = M_z$$

Spezialfall

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}} \equiv 0$$

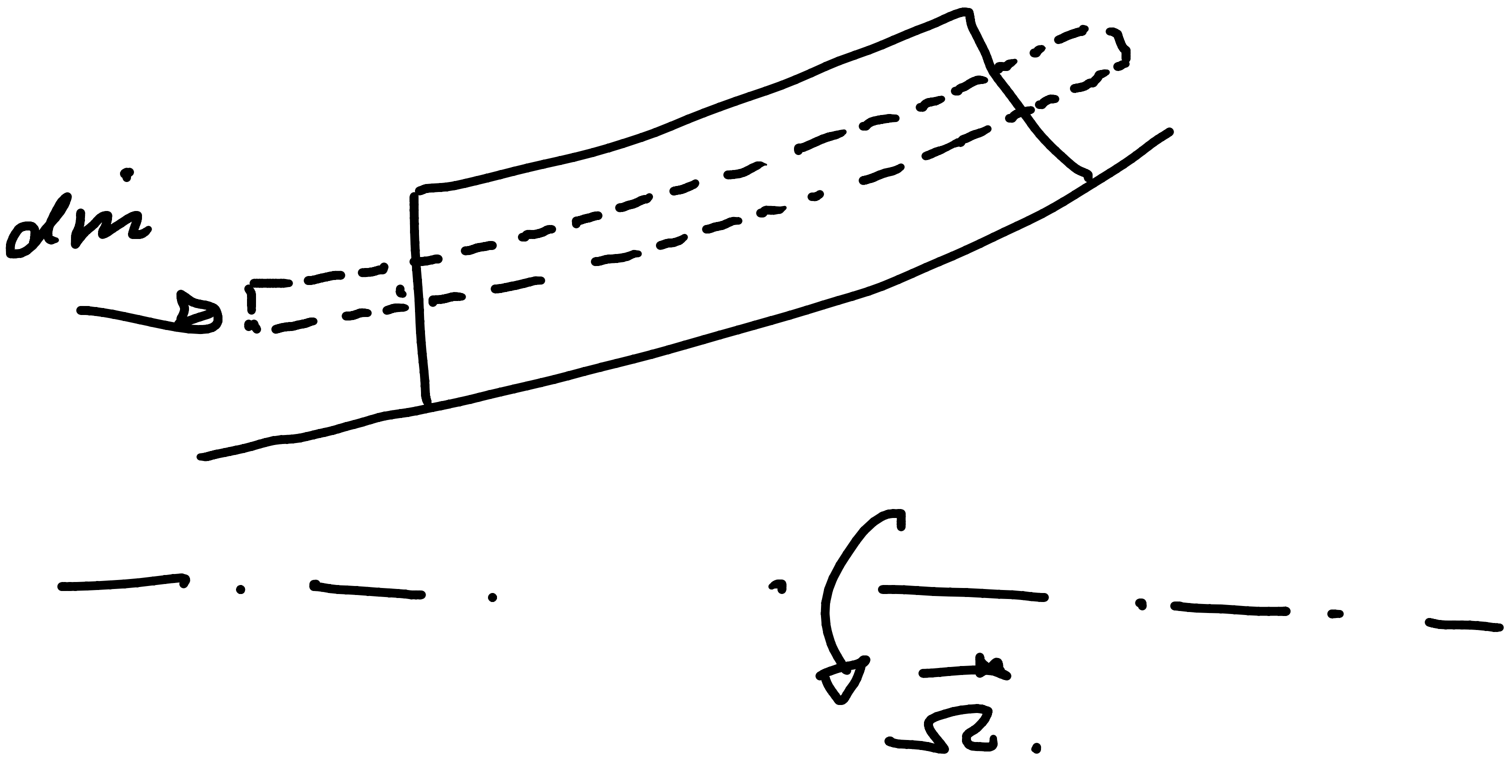
$$\int_{A_1+A_2} r c_u \, \rho \, \vec{c}\cdot\vec{n}\, dS' = M_z$$

Weiter Spezialisierung Drall $r c_u = \text{const}$ (homogen) über die Ein- und Austrittsfläche.

$$\boxed{M_z = \dot{m}\left(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}\right)}$$

Eulersche Turbinengleichung.

$$dM_z = d\dot{m}\left(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}\right)$$



Drallsatz im rotierenden System.

$$\frac{D}{Dt}\left[\vec{D}\right]_I = \frac{D}{Dt}\left[\vec{D}\right]_B + \cancel{\vec{\Omega} \times \vec{D}}$$

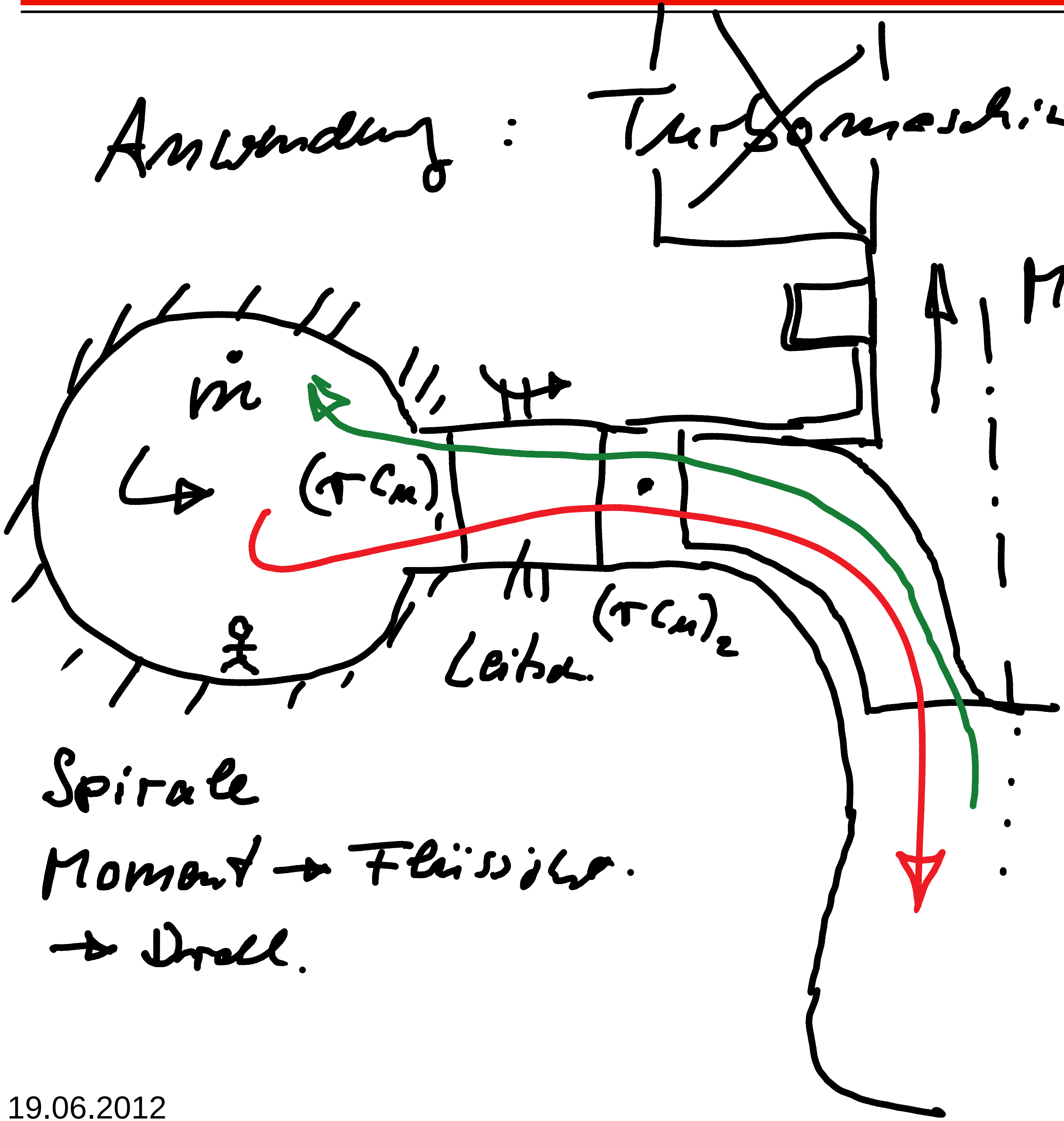
$$\vec{D} = D_z \vec{e}_z$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$$

$$\int_{A_1+A_2} r c_u \underbrace{\rho \vec{w} \cdot \vec{n} \, dA}_{d\dot{m}} = M_z$$

$$M_z = \dot{m} \left(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1} \right).$$

Anwendung: Turbomaschine.



$M_z \Omega = P_w$

Kraftmaschine.

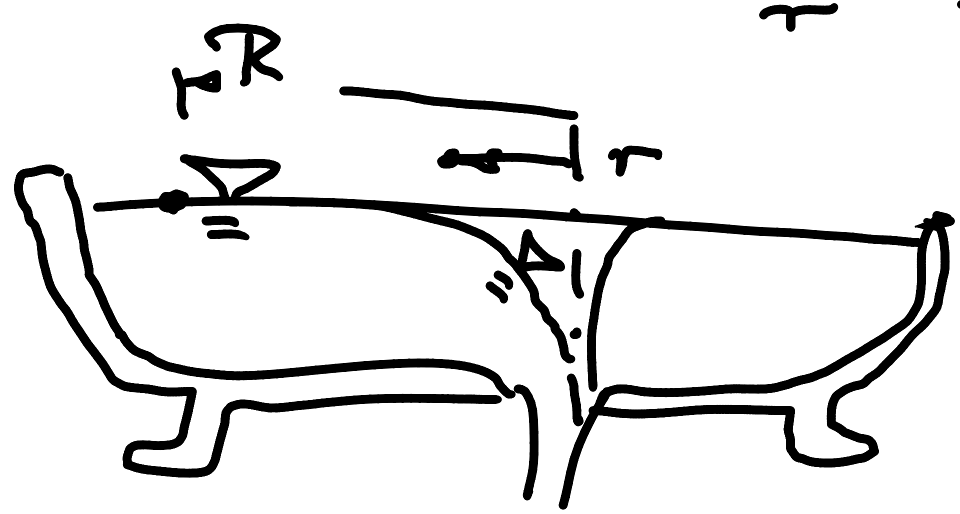
Arbeitsm.

Spirale
Moment → Flüssigkeit.
→ Drall.

Spezialfall:

Wenn kein Moment (durch Reibung od. Leitapparat) auf die Flüssigkeit ausgeübt wird, dann bleibt der Drall erhalten.

$$c_u = \frac{R}{r} c_{u0}$$



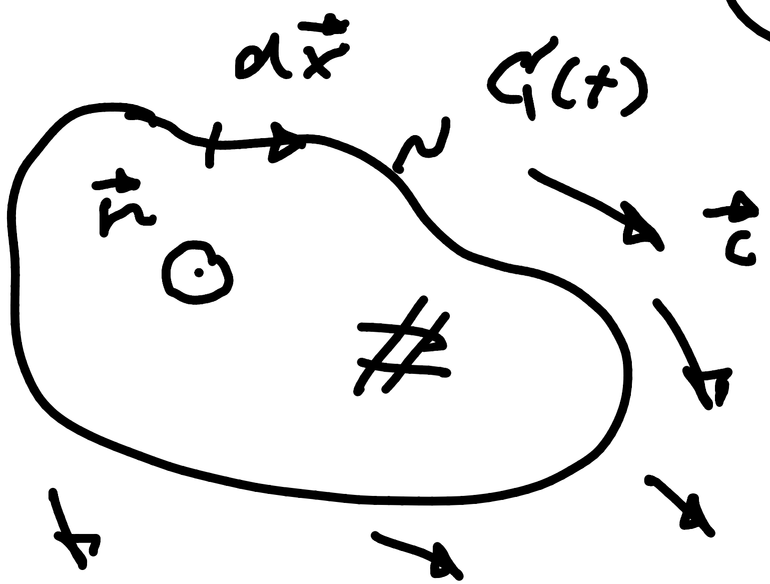
$$r_2 c_{u2} = r_1 c_{u1}$$

Maß für die Stärke des Dralles:

Zirkulation

$$\Gamma := \oint_{C(t)} \vec{c} \cdot d\vec{x} = \int_{S(t)} \mathrm{rot}\,\vec{c} \cdot \vec{n} \, dS$$

Stokesscher Integralsatz



$C(t)$ ist ein Kreis $\quad d\vec{x} = r\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi$

$$\vec{c} \cdot d\vec{x} = r\, c_u\, d\varphi$$

$$\Gamma = \oint_{C(t)} \vec{c} \cdot d\vec{x} = 2\pi\, r\, c_u$$

$$\Rightarrow \quad r\, c_u = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

$$\boxed{M_2 = \frac{\dot{m}}{2\pi}\left(\Gamma_2 - \Gamma_1\right)}$$