TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Einfühung in die Hydrodynamik

Literatur zur Vorlesung

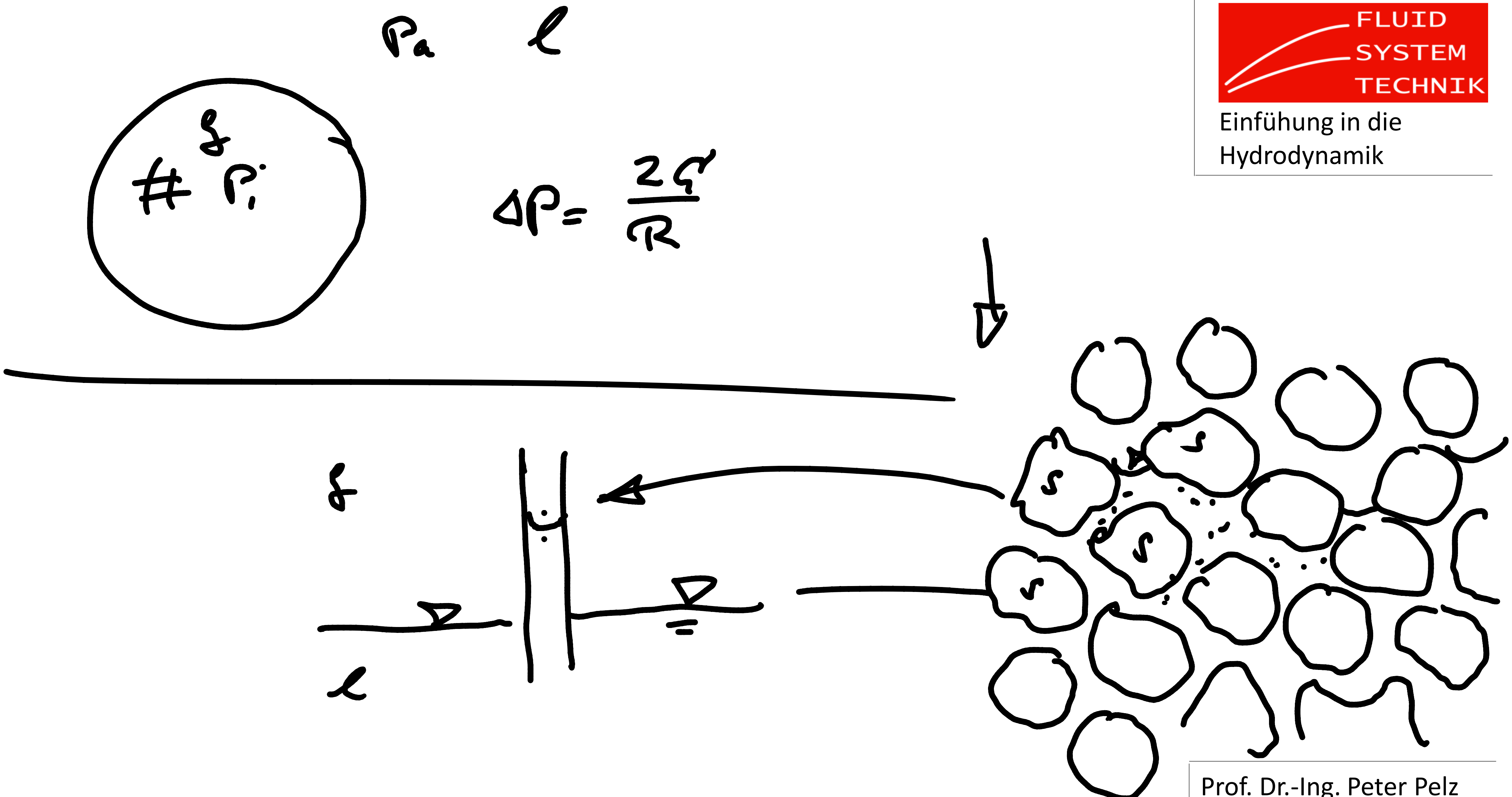
Spurk: Strömungslehre.

Fluid Mechanics

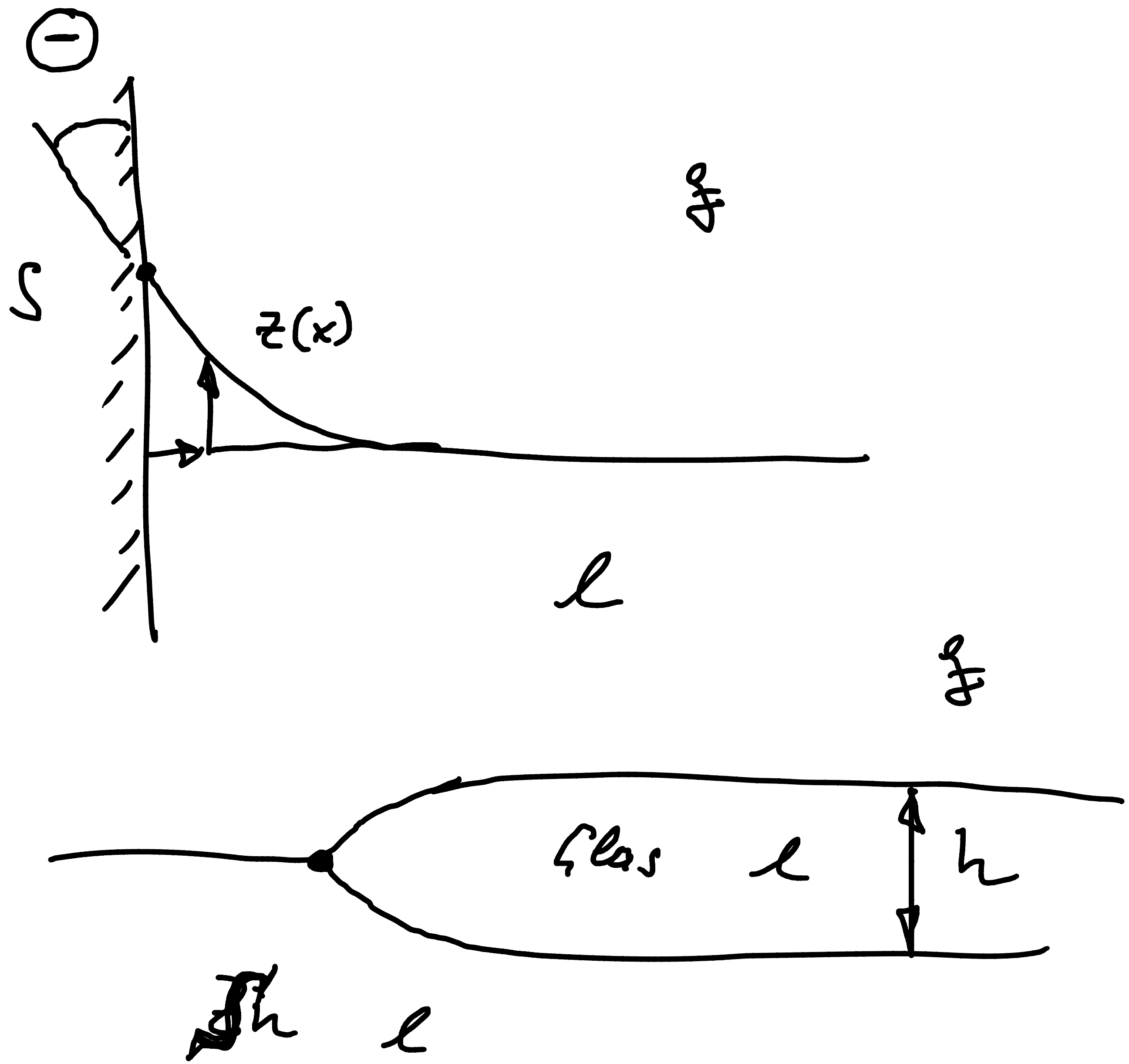
" Problems & Solutions

Becker: Technische Strömungslehre.

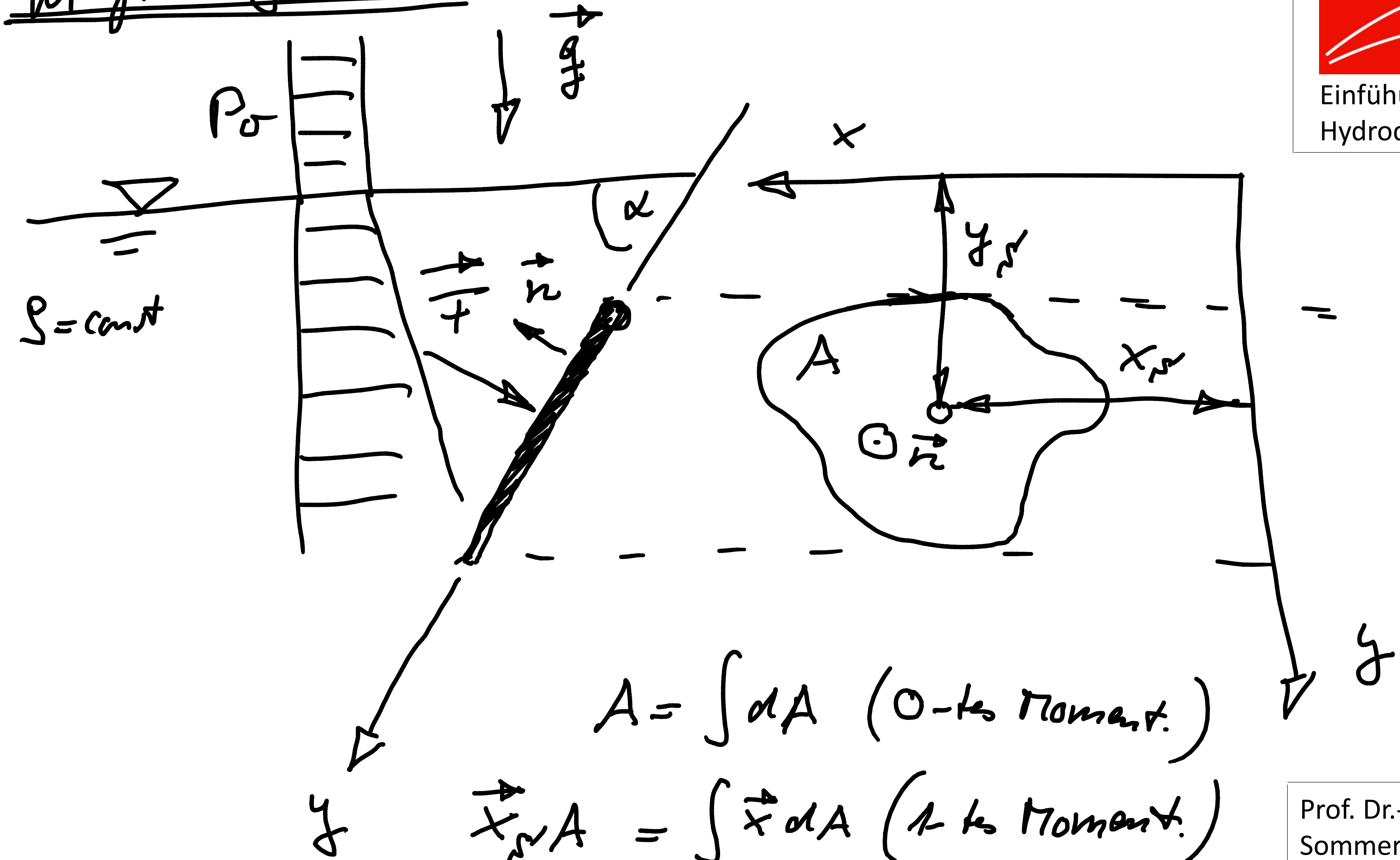
Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz



$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

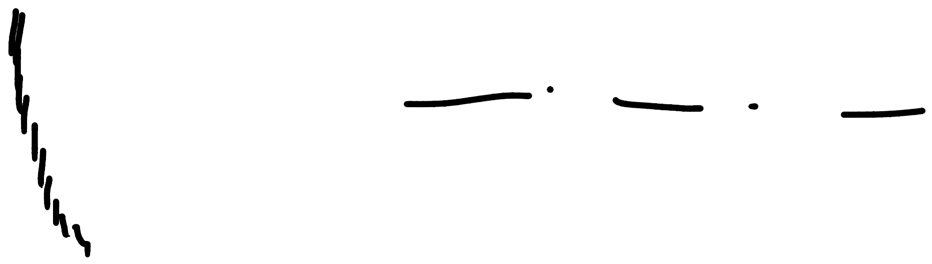

z(x)
Glas

Kraft auf Wände

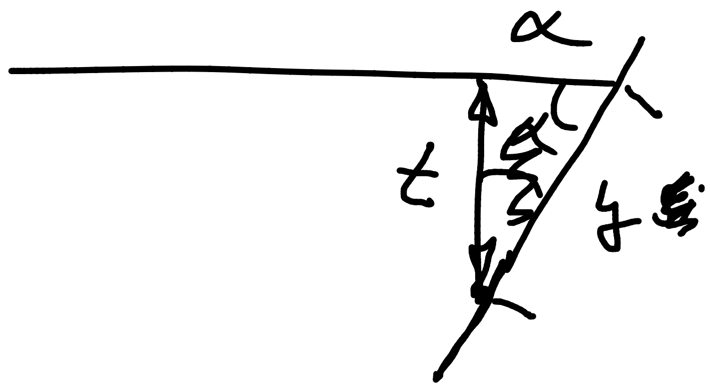


$$A = \int dA \quad \text{(0-tes Moment)}$$

$$\vec{x}_S A = \int \vec{x}\, dA \quad \text{(1-tes Moment)}$$



$$\vec{F} := \int_A \vec{t}\, dA = \int_A -p\,\vec{n}\, dA = (-\vec{n}) \underbrace{\int +p\, dA}_{F}$$



$$p = p_0 + \rho g t$$

$$= p_0 + \rho g y \sin\alpha$$

$$F = \int_A p_0 + \rho g y \sin\alpha \; dA = p_0 A + \rho g \sin\alpha \underbrace{\int_A y\, dA}_{y_S A}$$

Betrag der Kraft:

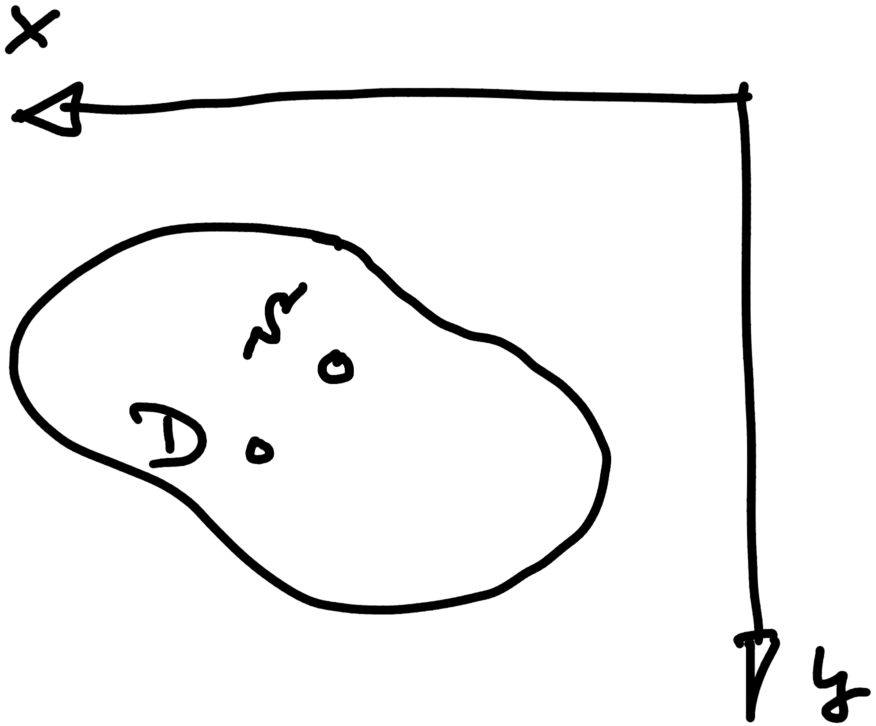
Nimm den Druck im Flächenschwerpunkt und multipliziere mit der Fläche

$$F = p_s A$$

$$p_s = p_0 + \rho g z_s$$

Achtung: Die Kraft greift nicht im Flächenschwerpunkt an?

Kraftangriffspunkt = Druckpunkt.



S Flächenschwerpunkt

D Druckpunkt

Druckpunkt wird über die Momentenbilanz bestimmt (Umgebungsdruck $p_0 \equiv 0$)

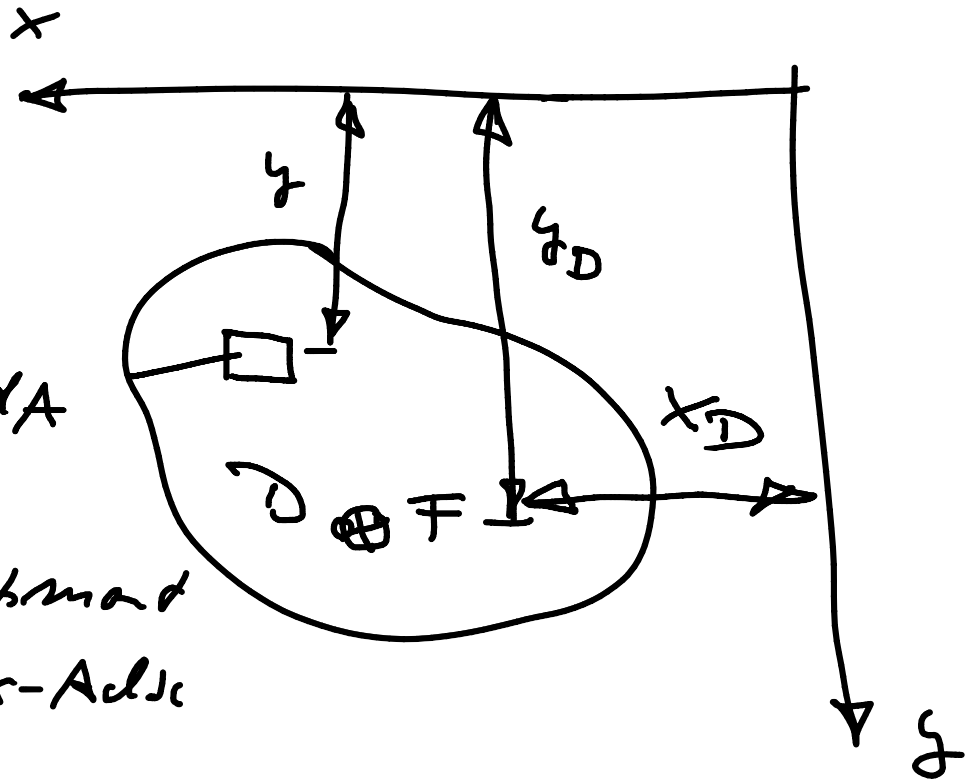
$$F y_D = \int p\, y\, dA$$

$$\cancel{\sin\alpha}\, y_S A \cancel{\rho g}\, y_D = \underbrace{\int \cancel{\rho g}\, y^2 \cancel{\sin\alpha}\, dA}$$

$$\boxed{y_D = \frac{1}{A y_S} I_{xx}}$$

I_{xx} Flächenträgheitsmoment bezüglich der x-Achse

I_{yy} $\quad I_{xy} = I_{yx}$



Analog

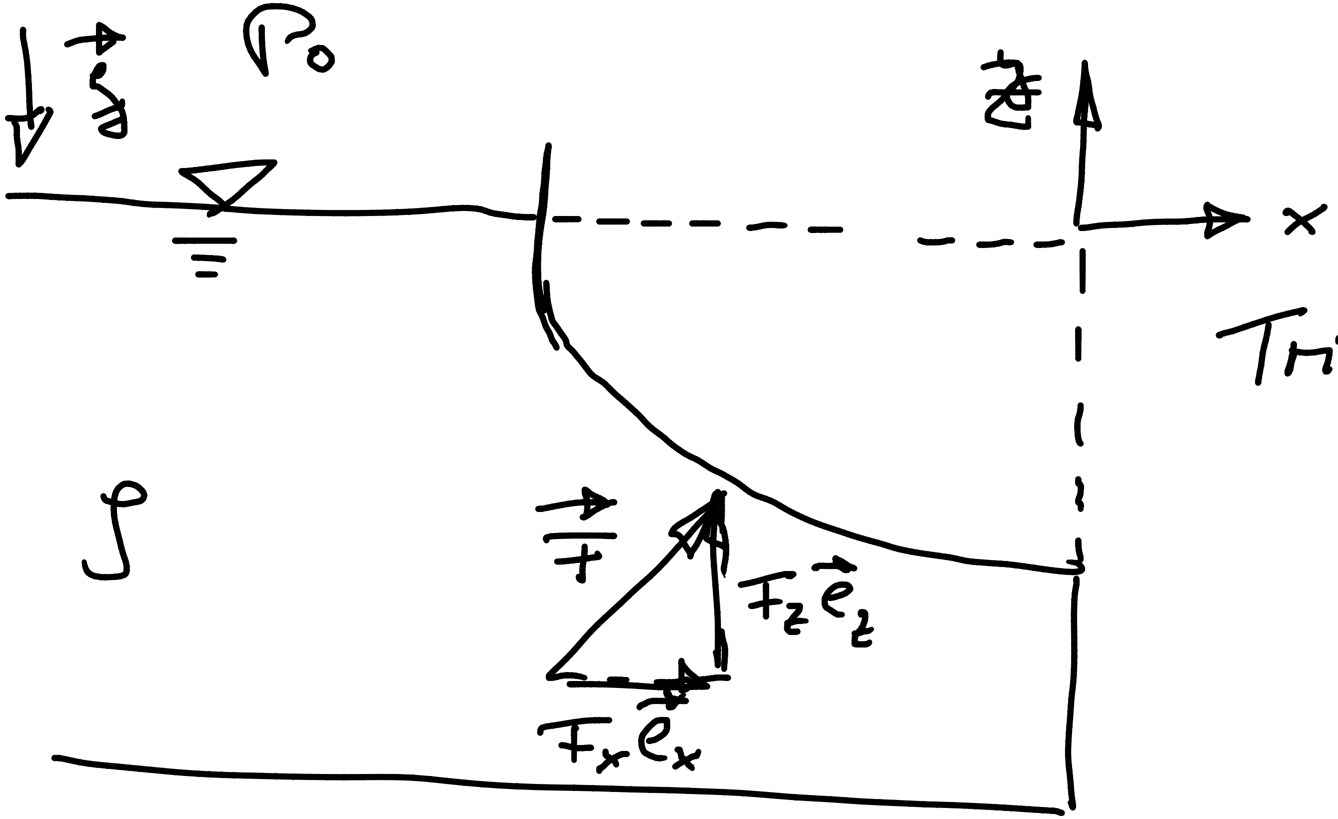
$$F x_D = \int_A p x \, dA$$

$$A \rho \cancel{g} y_{s} \sin\alpha \, x_D = \cancel{\rho g} \int_A x y \, dA$$

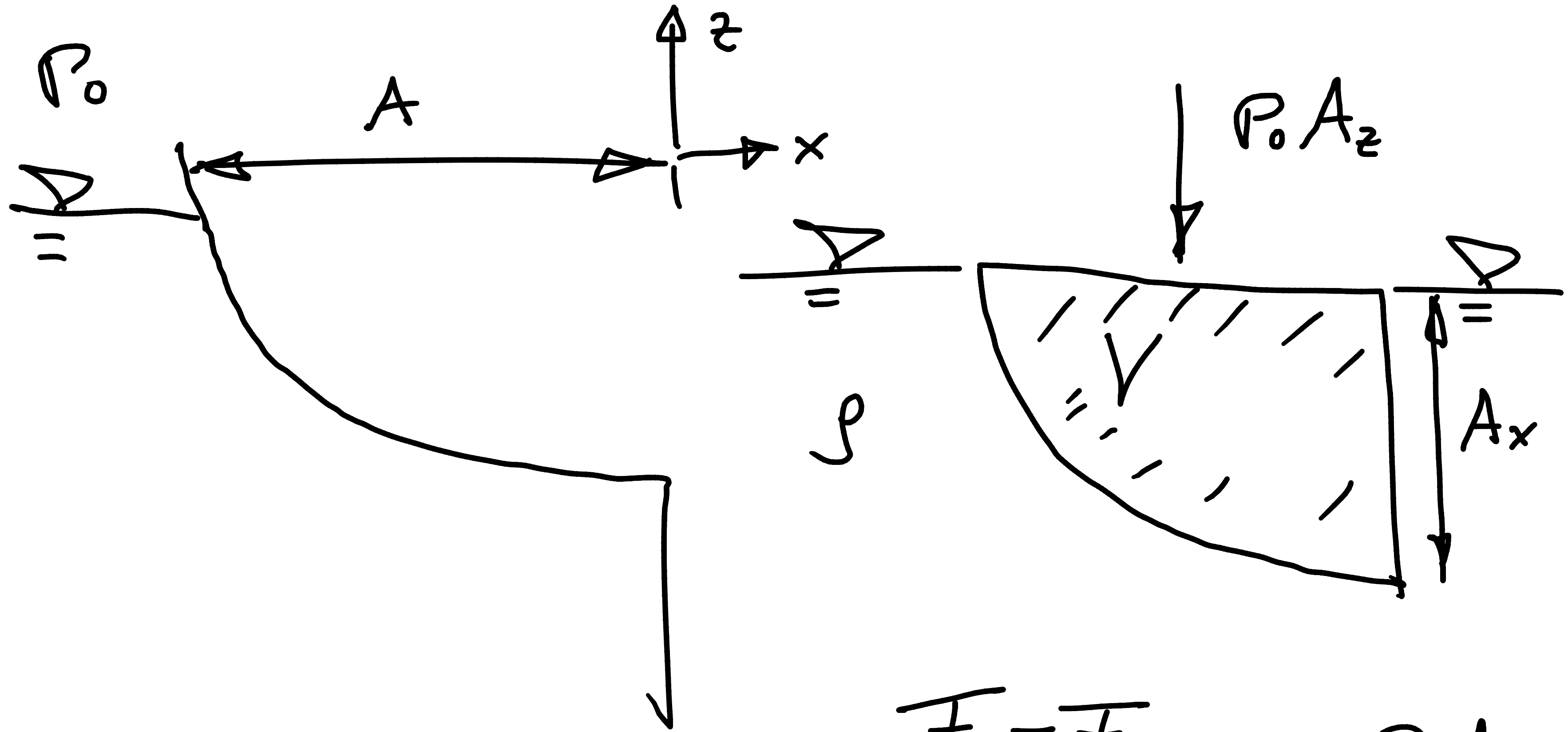
$I_{xy} = I_{yx}$ Deviationsmoment.

$$x_D = \frac{1}{y_s \sin\alpha} I_{xy} \frac{1}{A}$$

Kraft auf eine gekrümmte Fläche



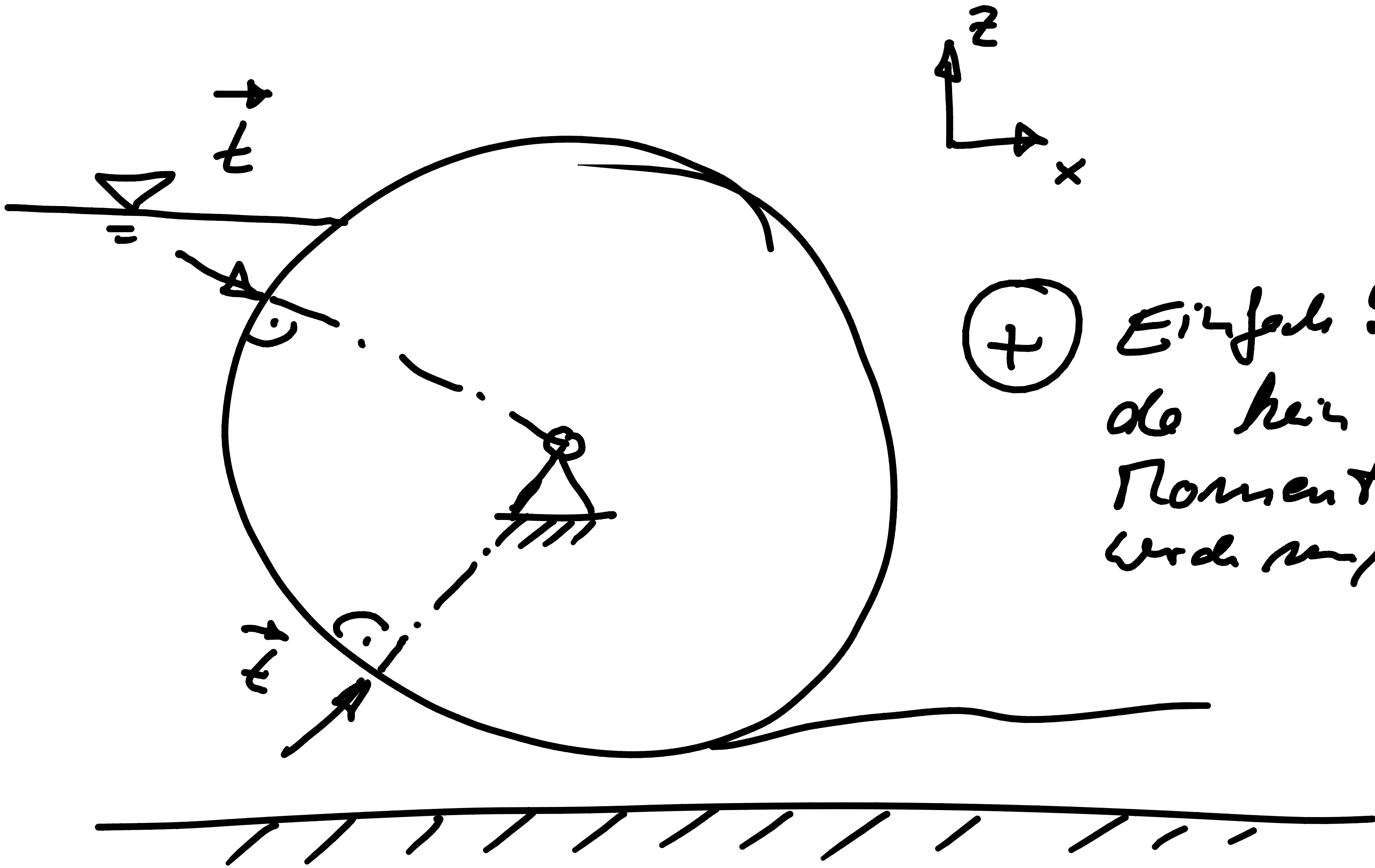
Trick: Ergänzen der Fläche zu einem geschlossenen Körper.



$$F_z = F_{Auftrieb} - p_0 A_z$$

$$= \rho g V - p_0 A_z$$

$$F_x = A_x p_{\dots}.$$



⊕ Einfach Lager, da kein Moment abgestützt werden muß.

Impulssatz und Bernoullische Gleichung

Die zeitliche Änderung des Impulses eines materiellen Körpers ist gleich der Kraft auf den Körper (2tes Newtonsches Gesetz)

$$\vec{I} = \int_{V(t)} \rho \vec{u} \, dV$$

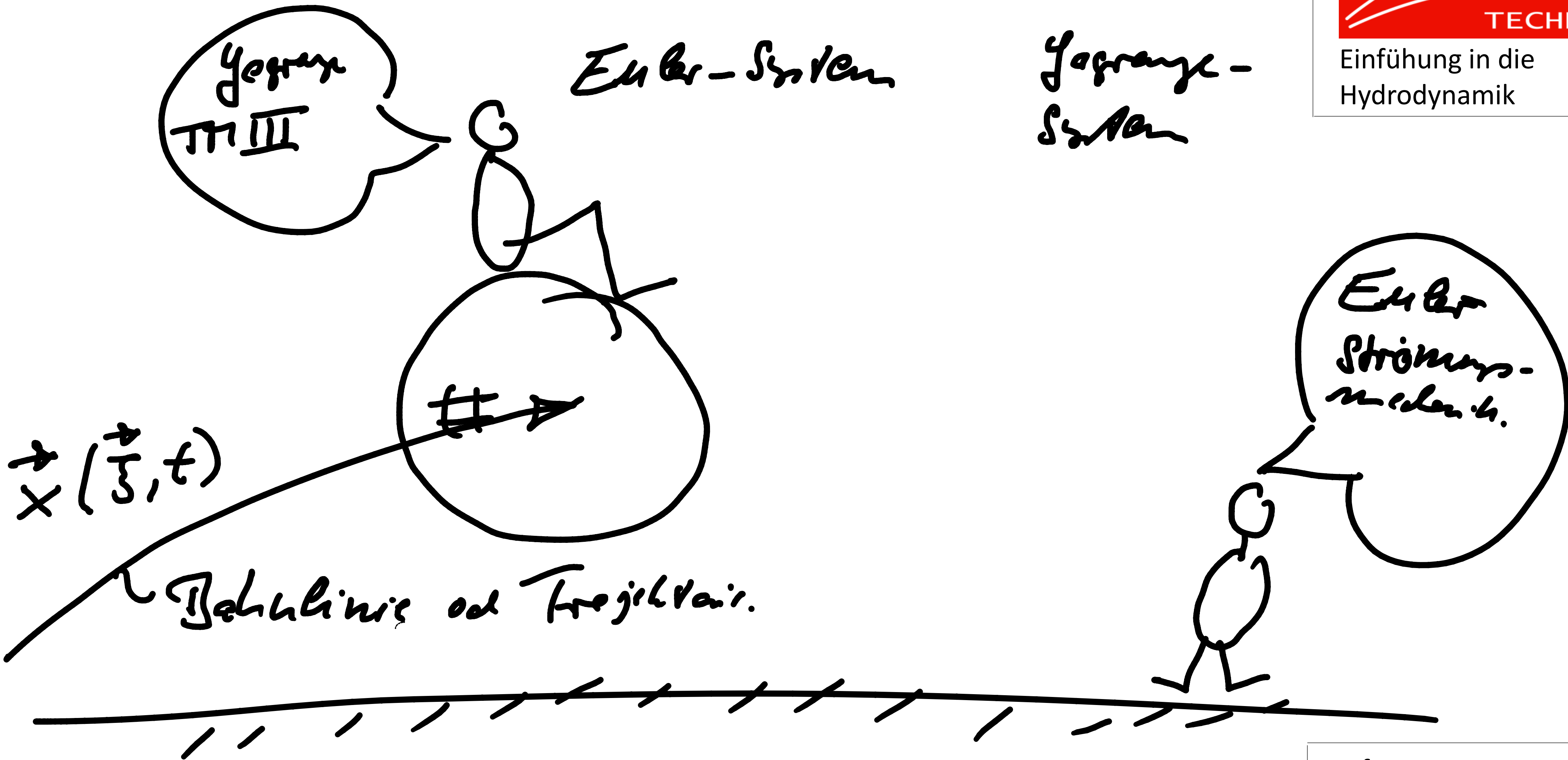
$$d\vec{I} = \vec{u} \, dm = \vec{u} \rho \, dV$$

$$\vec{I} = \int d\vec{I} = \int_m \vec{u} \, dm = \int_{V(t)} \rho \vec{u} \, dV$$

materielle Änderung $\frac{D}{Dt}$ $\frac{d}{dt}$

Euler-System

Lagrange-System



$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \vec{u}\, dV = \vec{F} = \int_{S} \vec{t}\, dS + \int_{V} \rho \vec{k}\, dV$$

<u>Kontinuitätsgleichung:</u>

Die Masse eines materiellen Körpers ist konstant. $m = \int_m dm = \int_{V(t)} \rho\, dV$

$\Longleftrightarrow$

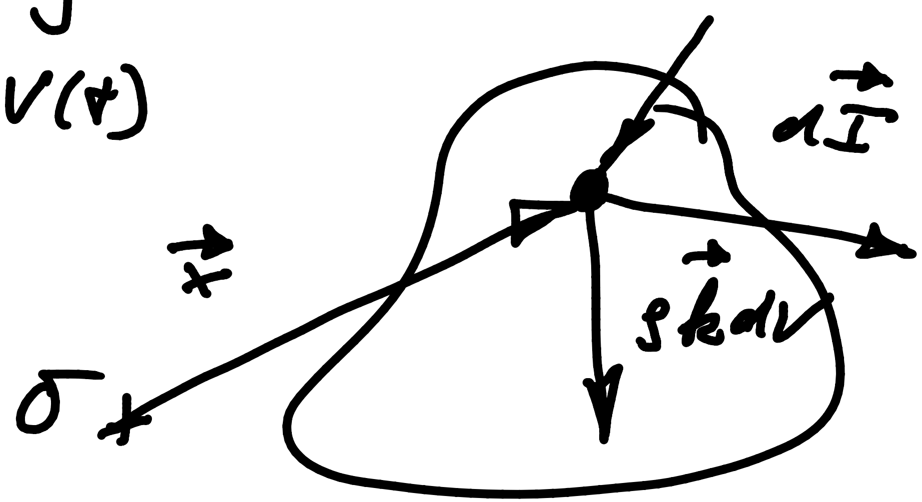
Die zeitliche Änderung der Masse eines materiellen Körpers ist verschwindend. $\frac{Dm}{Dt} = 0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Einfühung in die Hydrodynamik

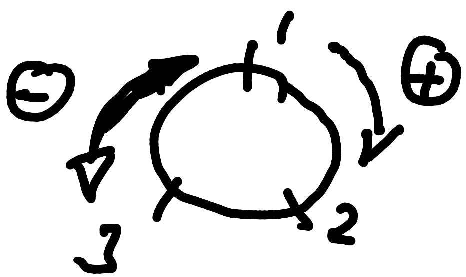
Drallsatz

Die zeitliche Änderung des Dralles eines materiellen Körpers ist gleich dem Moment auf den Körper

$$\vec{D} = \int d\vec{D} = \int \vec{x} \times d\vec{I} = \int_{V(t)} \vec{x} \times \rho \vec{u}\, dV \qquad \vec{t}\, dA$$

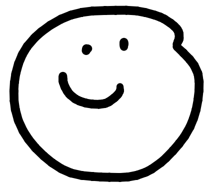


$$D_i = \int_{V(t)} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \rho\, u_k\, dV$$



$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \vec{x}\times\rho\vec{u}\,dV = \int_{S} \vec{x}\times\vec{t}\,dS +$$

$$+\int_{V} \vec{x}\times\rho\vec{k}\,dV$$



Konti $\frac{Dm}{Dt} = \sigma$ Skalar

Impuls $\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F}$ Vektoriell

Drall $\frac{D\vec{D}}{Dt} = \vec{M}$ Vektori.

Energ. $\frac{DK}{Dt} + \frac{DE}{Dt} = P + \dot{Q}$ Skalar.

Zur Kontgleich.

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

$$\int_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} \cancel{dV} + \rho \underbrace{\frac{1}{dV}\frac{D\,dV}{Dt}} \right) dV = 0$$

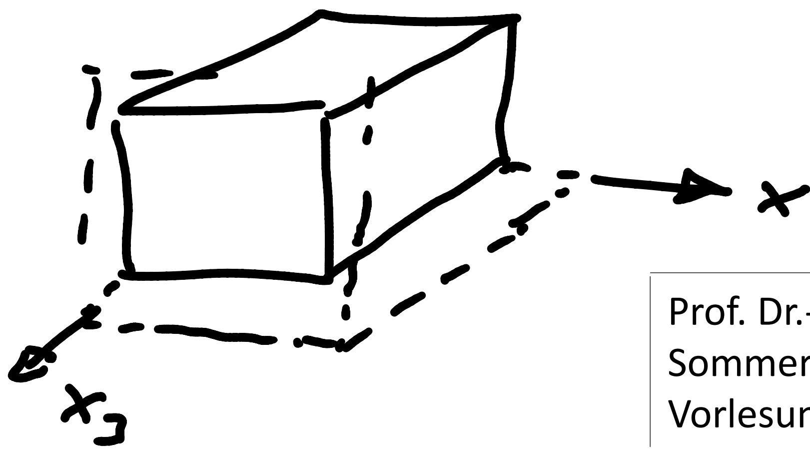
$$= \operatorname{div} \vec{u}$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Analog.

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy =$$

Leibnizsche Regel



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Einfühung in die Hydrodynamik

$$\int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div} \, \vec{u} \right) dV \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div} \, \vec{u} = 0},$$

da die Wahl der Integrationsgrenze V beliebig ist.

Kontinuitätsgleichung in differentieller Form.

$$\mathrm{div} \, \vec{u} = \frac{1}{dV} \frac{D \, dV}{Dt}$$ Volumenänderungsrate.