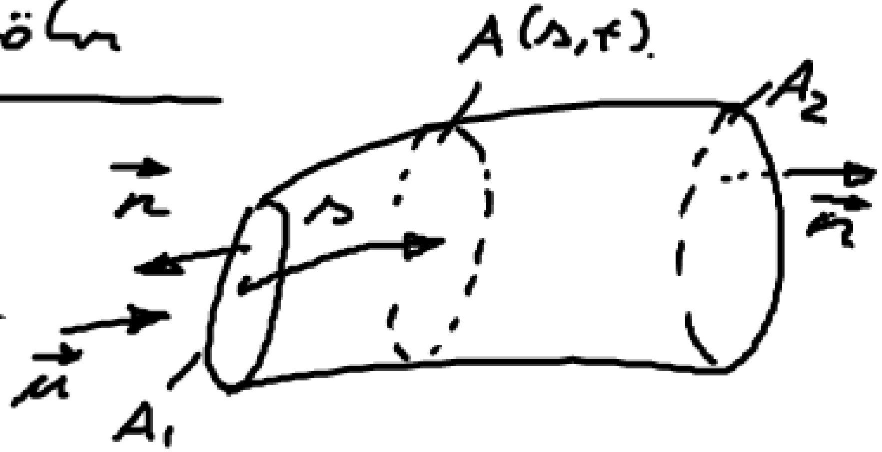
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

Literaturempfehlung:

Rheologie   Retting, Laun
             Kunststoff-Physik.

Kontinuitätsgleichung für eine Stromröhre

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\,ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0$$



$$\dot m_1 := -\int_{A_1} \rho\, \vec u \cdot \vec n \, dA \; ; \quad \dot m_2 := \int_{A_2} \rho\, \vec u \cdot \vec n \, dA$$

$$= \overline{\rho u_1} A_1 \qquad\qquad = \overline{\rho u_2} A_2$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Spezialisiere 0D-Fall hydrostatische Näherung

$$\neq f_n(\vec{x})$$

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\,ds - \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = 0$$

$\dot{m} = \rho Q$ Massenstrom

$Q = \int_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS$ Volumenstrom

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) = \frac{\partial p}{\partial t}\frac{d}{dp}(\rho A) = \frac{\partial p}{\partial t}\overbrace{\frac{1}{\rho A}\frac{d}{dp}(\rho A)}^{:=\, K_{eff} \text{ effektive Nachgiebigkeit}}\rho A$$

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p}$$

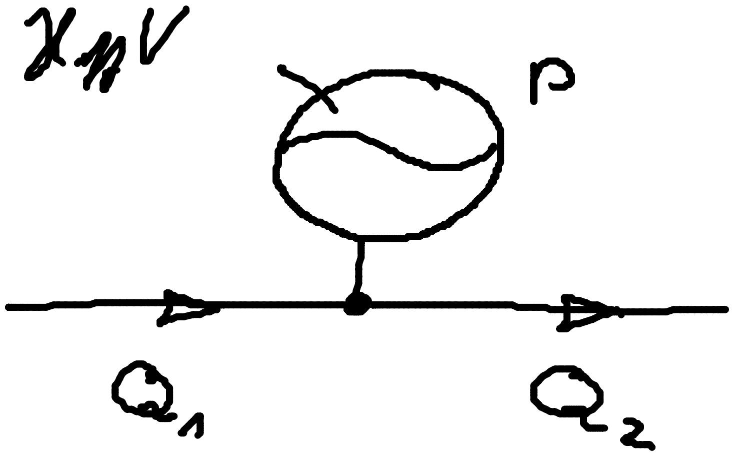
$$\int_0^L \frac{\partial p}{\partial t} \varkappa_{eff} \underbrace{\rho A \, ds}_{dV} - \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 = 0$$

0D-Annahme, d.h. kein Änd. abhäng. von s. $\rho = \rho_1 = \rho_2$

$$\boxed{\dot{p} \varkappa_{eff} V - Q_1 + Q_2 = 0}$$

Druckaufbaugleichung.

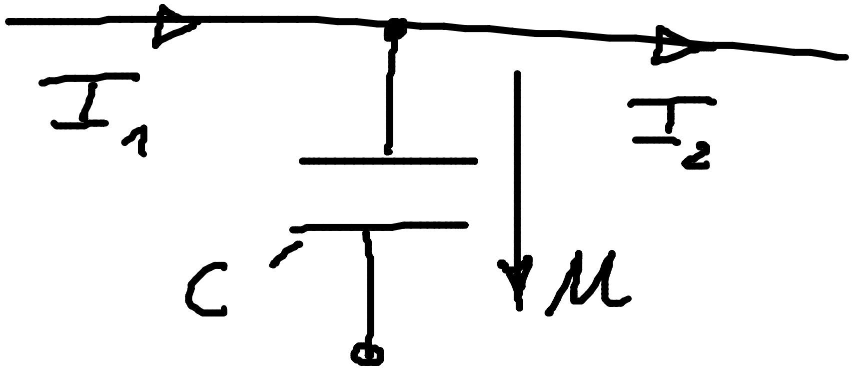
$$\varkappa_{eff} V = C$$ hydraulische Kapazität.



hydraulische Kapazität

$$\kappa_{eff} V \dot{p} = Q_1 - Q_2$$

elektrische Kapazität



$$C \dot{u} = I_1 - I_2$$

0D

Analogie	Elektrotechnik	Hydraulik
Potential	U Spannung	p Druck
Flußgröße	$I := \int_A \vec{j}\cdot\vec{n}\,dA$	$Q := \int \vec{u}\cdot\vec{n}\,dA$
Kapazität	$\dot{U} C = I_1 - I_2$	$\dot{p}\,K_{eff} V = Q_1 - Q_2$
Induktivität	Siehe vorh. Vorlesg.	
Widerstand		

Zusammenfassung

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \, dV \overset{!}{=} 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \rho \, dV + \oint_{A} \rho \vec{u}\cdot\vec{n} \, dA \overset{!}{=} 0.$$

3D

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div}\, \vec{u} = 0$$

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\, ds - \dot{m}_1 + \dot{m}_2$$

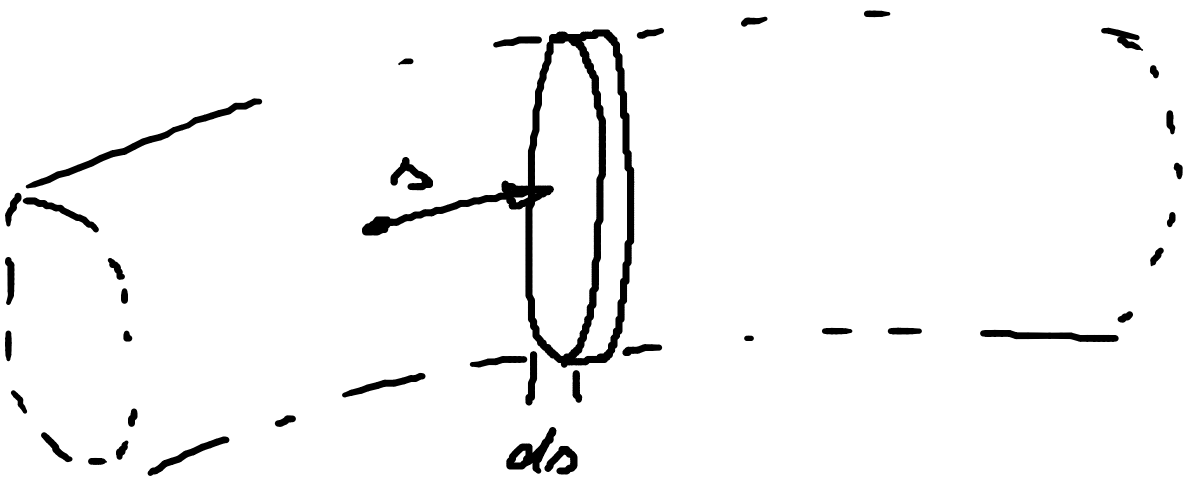
1D

0D

$$\kappa V \dot{p} - Q_1 + Q_2 = 0$$

Kontigleichung für den 1D-Fall $\rho(s,t), T(s,t), \ldots$

Ausgangspunkt: Kontigleichung für eine Stromröhre der Länge ds.



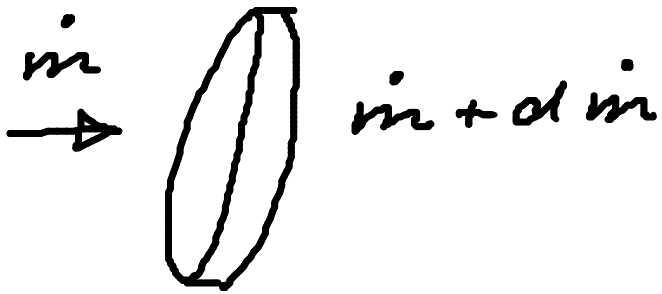
$\bar{u} := \frac{1}{A} \int_A u \, dA$ flächengemittelte Geschwindigkeit.

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\,ds \underbrace{- \rho_1 \bar{u}_1 A_1 + \rho_2 \bar{u}_2 A_2} = 0$$

Für $L \to ds$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\,ds + \underbrace{d(\rho \bar{u} A)}_{d\dot{m} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial s} ds} = 0$$

kein Zeitglied infolge Reynoldsch Transportth.



$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\,ds + \frac{\partial \dot{m}}{\partial s}\,ds = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\bar{u}\rho A) = 0$$

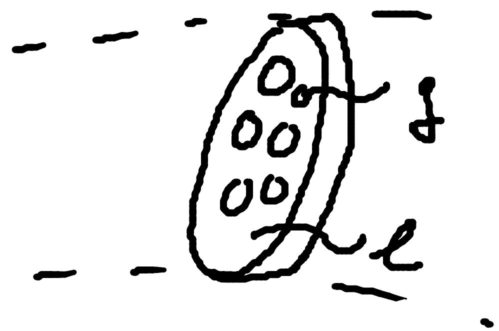
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \bar{u}\frac{\partial}{\partial s}(\rho A)} + \rho A \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial s}$$

$$\frac{1}{\rho A}\frac{D\,\rho A}{Dt} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = 0.$$

$$\frac{1}{\rho A}\frac{d\rho A}{dp}\frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}$$

$$\varkappa_{eff} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = 0$$



$$\varkappa_{eff} := \frac{1}{\rho A} \frac{d\, \rho A}{dp}$$

effektive Nachgiebigkeit.

$$a_{eff}^2 := \frac{1}{\rho_{eff} \varkappa_{eff}}$$

a_{eff} effektive Signalausbreitungsgeschw. Schallgeschwindigkeit.

ρ_{eff} ist eine effektive Dichte insbes. bei Mehrphasenström.

$$\boxed{\frac{1}{\varrho_{eff}\, a_{eff}} \frac{Dp}{Dt} + a_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = \sigma}$$

Kontinuität für den 1D-Fall.

$a_{eff}\, \varrho_{eff} = Z_{eff}$ effektive akustische Impedanz.

Ausschn. Impulsbilanz für eine Schicht

$$\boxed{\frac{D\bar{u}}{Dt} + \frac{1}{\varrho_{eff}} \frac{\partial p}{\partial s} = k_{eff}}$$

Zwei gekoppelte partielle, nichtlineare Differentialgleich.

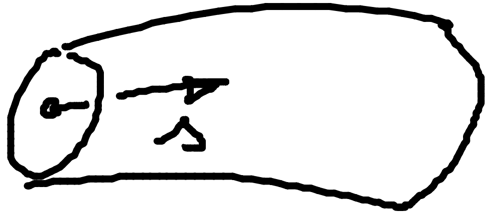
⇒ Riemann: Charakteristikenmethode.

☹ $p, \bar{u} = ?$

$\cancel{\bar{u} \frac{\partial p}{\partial s}}$ $\quad$ $\cancel{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}}$ $\Rightarrow$ Wellengleich.

Zusammenfassung

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\,ds - \dot m_1 + \dot m_2 = 0$$



0D

$$\dot p\, \kappa_{eff} V - Q_1 + Q_2 = 0 \qquad a_{eff}^2 := \frac{1}{\rho_{eff}\,\kappa_{eff}}$$

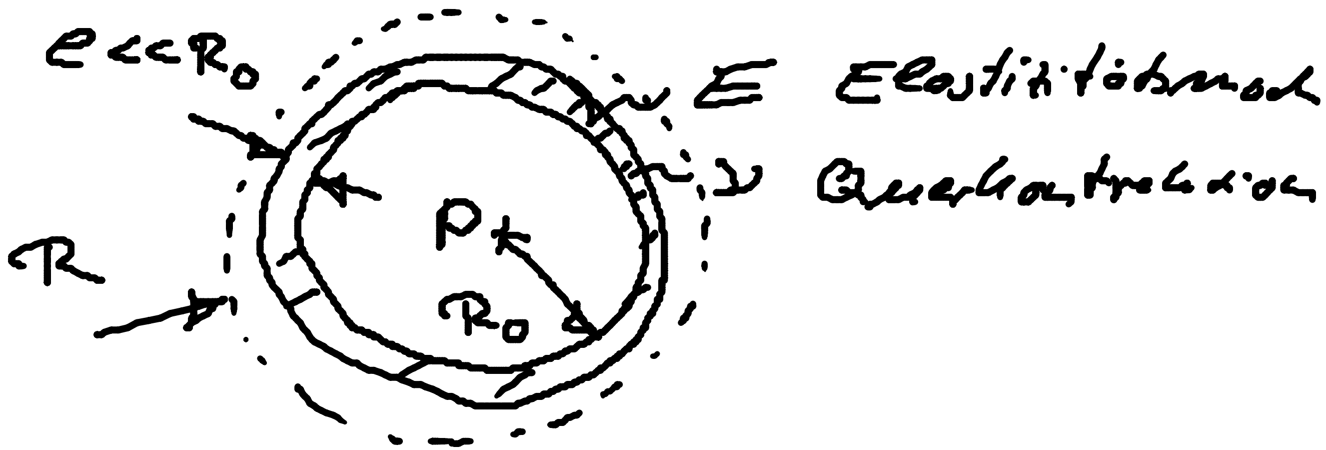
1D

$$\frac{1}{\rho_{eff}\, a_{eff}} \frac{Dp}{Dt} + a_{eff} \frac{\partial \bar u}{\partial s} = 0$$

Zur effektiven Nachgiebigkeit und
zur effektiven Schallgeschwindigkeit.

Ein ideal steifes System $\mathcal{K}_E \to 0$
zeigt eine unendlich große Schallgeschwindigkeit
$a_E \to \infty$.

z.B.: Nachgiebigkeit einer Rohrleitung für dünne Wände
$e \ll R_0$.



$$\mathcal{K}_{eff} := \frac{1}{\rho A}\,\frac{d\,\rho A}{dp}$$

$$= \frac{1}{\rho A}\left(A\,\frac{d\rho}{dp} + \rho\,\frac{dA}{dp}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{dp}}_{\substack{\text{Nachgiebigkeit}\\ \text{der Flüssigkeit}\\ \mathcal{K}_\rho}} + \underbrace{\frac{1}{A}\,\frac{dA}{dp}}_{\substack{\text{Nachgiebigkeit}\\ \text{der Anlage.}\\ \mathcal{K}_A}}$$

D.h. die Nachgiebigkeiten addieren sich

$$\mathcal{K}_{eff} = \mathcal{K}_g + \mathcal{K}_A$$

Im Beispiel $\mathcal{K}_A := \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial p}\Big|_0$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi} R_0^2}\,\frac{\partial\, \cancel{\pi} R^2}{\partial p}\Big|_0$$

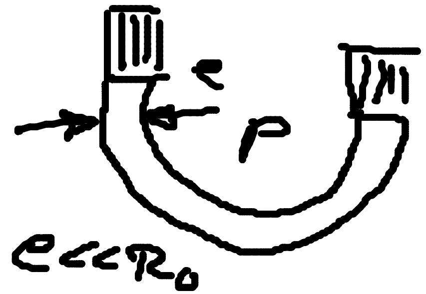
$$= \frac{1}{R_0^2}\, 2R_0\, \frac{\partial R}{\partial p}\Big|_0$$

$$= 2\,\frac{1}{R_0}\,\frac{\partial R}{\partial p}\Big|_0.$$

Änderung des Radius mit dem Druck für das <u>masselose Rohr</u>.

<u>Kinematik</u>

Dehnung in Umfangsrichtung $\varepsilon_\varphi := \frac{2\pi R - 2\pi R_0}{2\pi R_0}$



<u>Materialgesetz</u>

Spannung in Umfangsrichtung $\sigma_\varphi = E\,\varepsilon_\varphi$

$$= E\,\frac{R - R_0}{R_0} = p\,\frac{R}{e}$$

<u>Gleichgewichtsbeziehung</u>

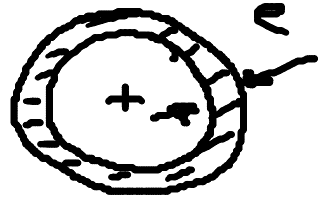
$$\cancel{2}\, e\,\sigma_\varphi = \cancel{2}\, R\,p \leadsto \sigma_\varphi = p\,\frac{R}{e}$$

für $e \ll R$

↳ Anlagennachgiebigkeit durch Dehnung

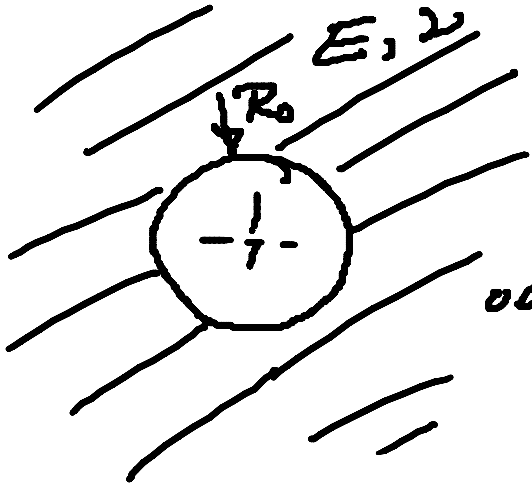
$$\boxed{\mathcal{K}_A = \frac{2}{e}\frac{R_0}{E} \quad \text{für} \quad \frac{R_0}{e} \gg 1}$$

$\frac{R_0}{e} \gg 1$ dünnwandiges Rohr.



z.B. Bremsleitung
z.B. Vene.

$\frac{R_0}{e} \ll 1$ Bohrung



z.B. Fallrohr im Fels.

od. Bohrung im Werkstück

$$\mathcal{K}_A = \frac{1}{E} f_1(\nu) \neq f_2(R_0)$$

Warum spielt der Radius keine Rolle bei einem Bolz?

↳ Folgt aus Dimensionsgründen.

↳ Dimensionsanalyse.

$$H_{eff} = fn(E, \nu, \cancel{D_0})$$

↳ Verweis auf später.

Nachgiebigkeit der Flüssigkeit. $\mathcal{K}_g$

$$\mathcal{K}_{eff} = \mathcal{K}_g + \mathcal{K}_A$$

Spezialfall für ein ideales Gas

$$p = \varrho \mathcal{R} T \quad \text{(thermisch ideales Gas)}$$

$\mathcal{R}$ Gaskonstant.

spez. innere Ener. $e = c_v T$ kalorisch ideales Gas

Enthalpie. $h = c_p T$

$$\kappa_{\varrho,s} := \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial p}\Big|_s$$

bei konstanter Entropie

$$p = \varrho^{\gamma}\, C$$

isentrope Zustandsänd.

$$\gamma := \frac{c_p}{c_v}$$

$$\kappa_{\varrho,s} = \frac{1}{\gamma p}$$

für „große" Geschw.

$$\kappa_{\varrho,T} := \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial p}\Big|_T$$

bei konstanter Temperat.

$$p = \varrho R T = \varrho\ \text{const}$$

isotherme Zustandsänd.

$$\kappa_{\varrho,T} = \frac{1}{p}$$

für „kleine" Geschw.