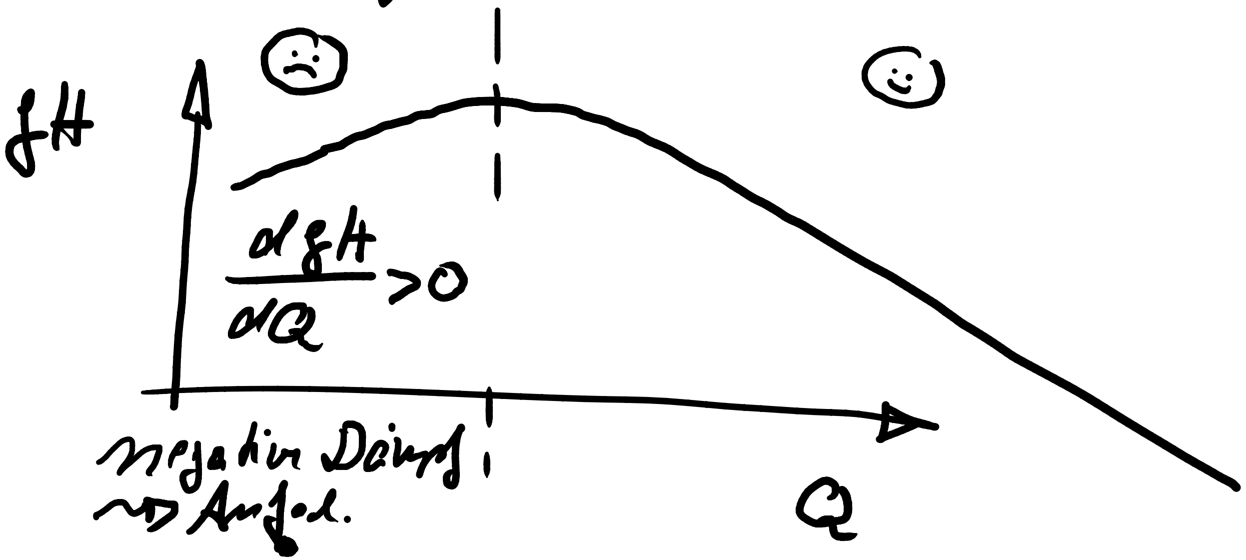
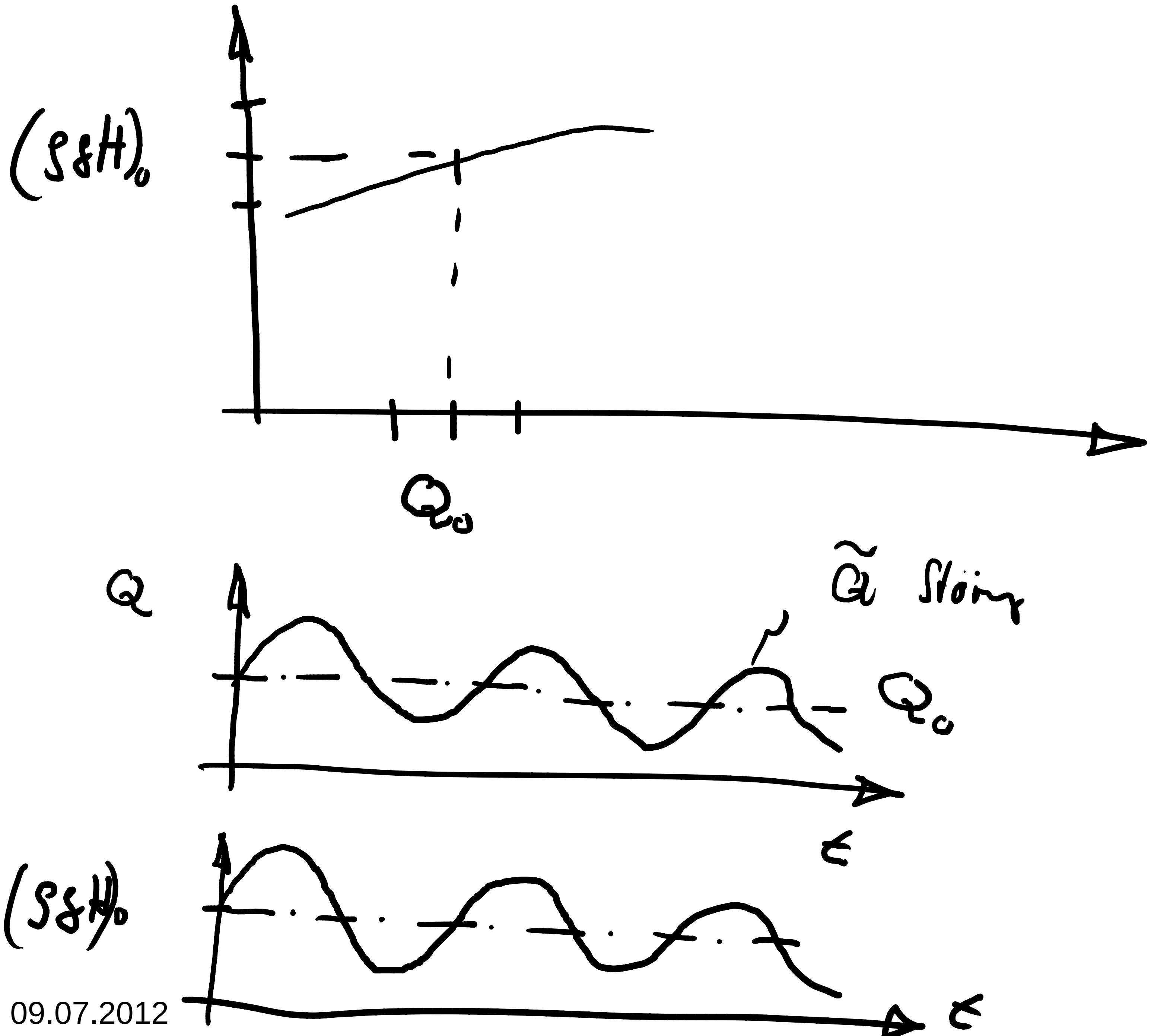
Selbsterregte Schwingung bei Turbomaschinen und Wärmetauscher

Ursache: Anstieg in der Kennlinie

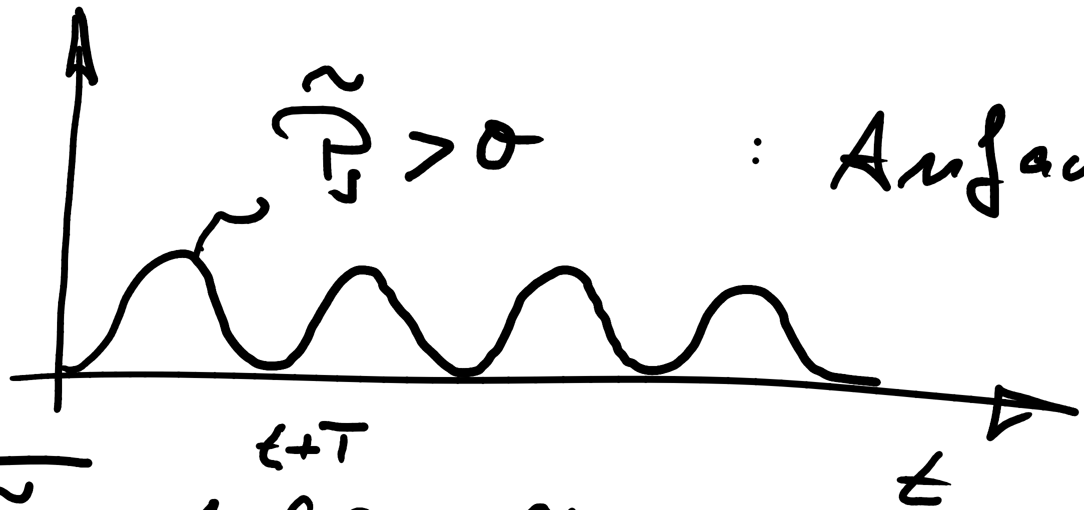


$gH := \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ beim Wärmetausch.

$gH = \frac{1}{2}\left(c_{u2}u_2 - c_{u1}u_1\right)$ bei einer Turbomaschine.

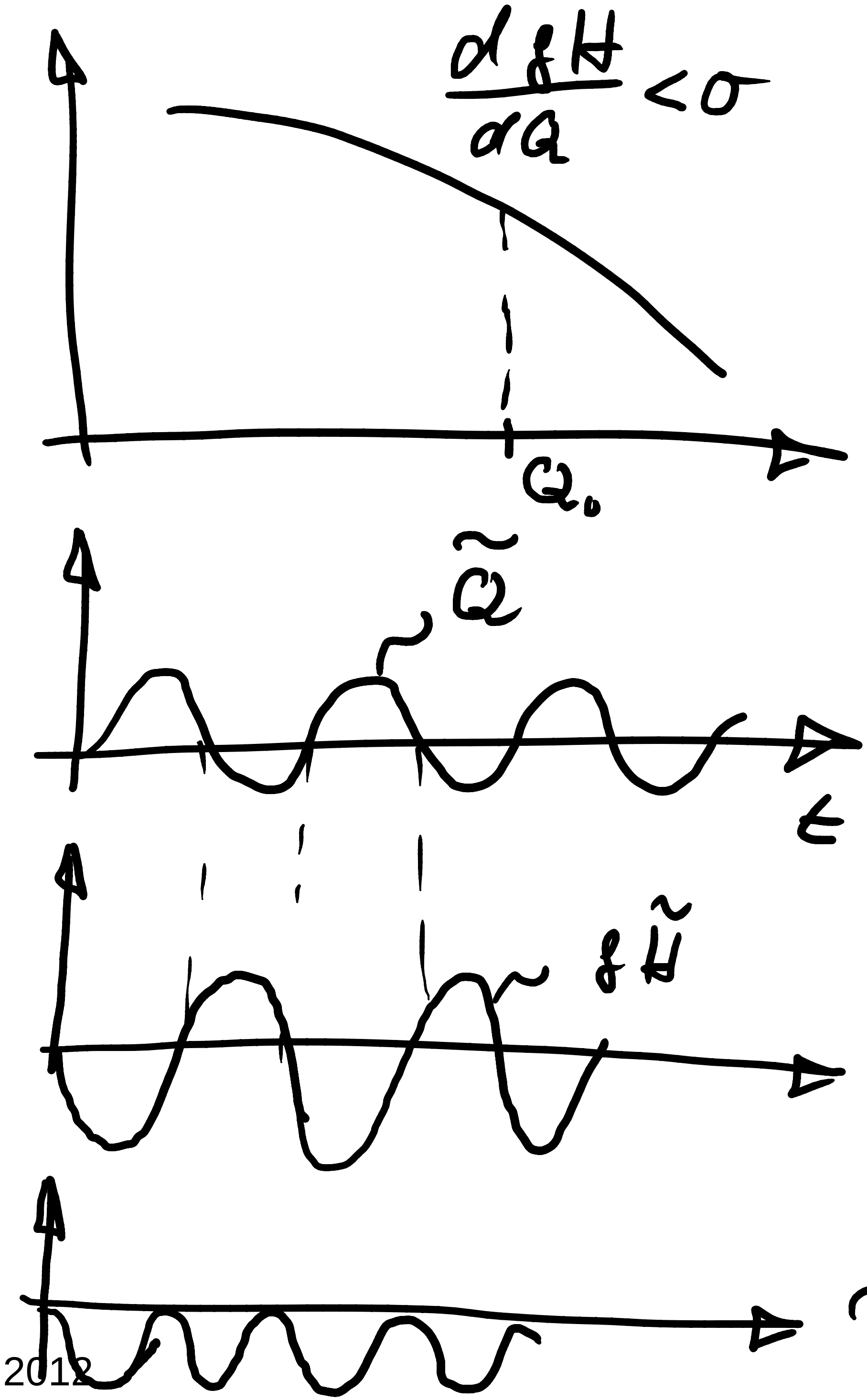

$(\rho g H)_0$
Q_0
Q
$\tilde{Q}$ Störung
Q_0
t
$(\rho g H)_0$
t

$\tilde{P}_s > 0$: Anfachung



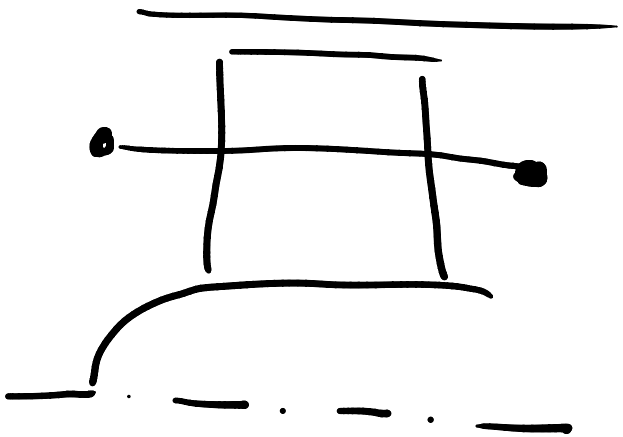
$$\overline{\tilde{P}_s} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \tilde{Q}\,\rho g \tilde{H}\,dt > 0$$ für $\frac{d\,\rho g H}{dQ} > 0$

$\tilde{P}_s < 0$ für $\frac{d\,\rho g H}{dQ} < 0$



$\tilde{P}_s < 0$: Dämpfung

Achtung: $\frac{d\,gH}{dQ} > 0$ kann bei Axialmaschinen auftreten.



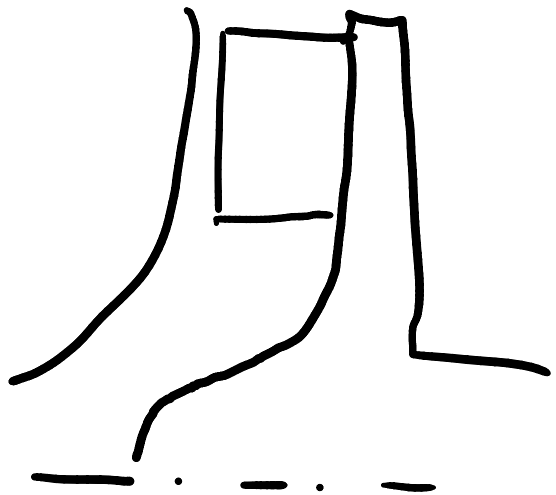
$$\psi = \frac{1}{2}(\Omega r)^2$$

$\Delta\psi \approx 0$ bei Axialmaschine

$\rightsquigarrow$ ggf. kritisches Teillastverhalten.

$\Delta\psi \gg 0$ bei Radialmaschine

$\rightsquigarrow$ robuste Maschine.



Schwingen: Auffederung + Trägheit + konstruktive Weite

Maschine

Rohrlänge * effektive Dichte

Induktivität

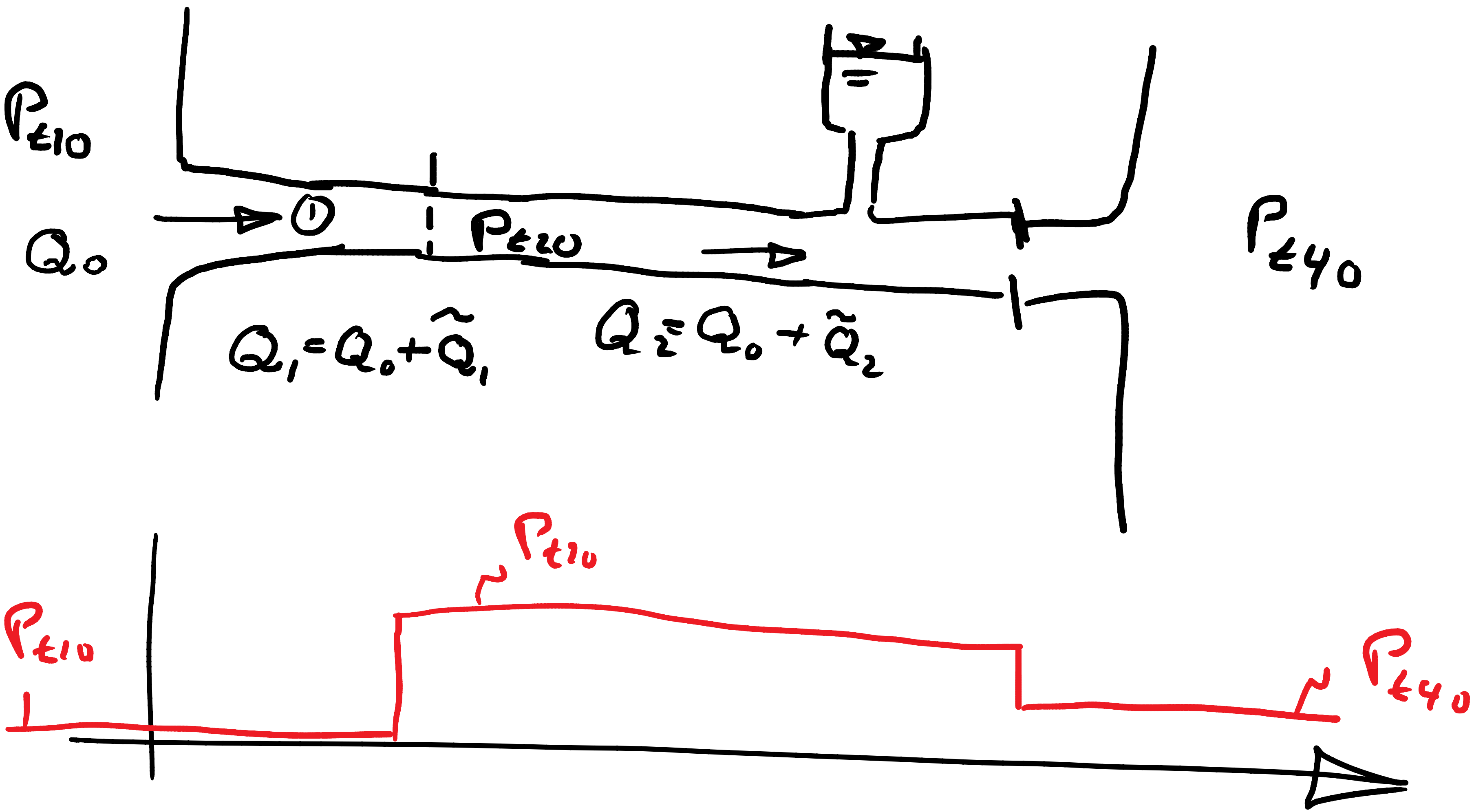
α_{eff} ...

Kapazität.

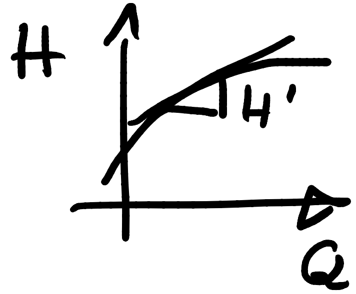
▷ diskrete Eigenschaften ⇝ 0D-Modelle

▷ Wellenausbreit. ⇝ 1D-Modell

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme


p_{t10}
Q_0
①
p_{t20}
p_{t40}
$Q_1 = Q_0 + \tilde{Q}_1$
$Q_2 = Q_0 + \tilde{Q}_2$
$\tilde{p}_{t10}$
p_{t10}
$\tilde{p}_{t40}$

1. Maschine: Ansatz



$$\underline{p_{t2} - p_t} = \rho g H(Q_1)$$

$$= (\rho_0 + \tilde{\rho})\, g\, (H_0 + H' \tilde{Q}_1)$$

$$= \underline{\rho_0 g H_0 + \rho_0 g H' \tilde{Q}_1 + \tilde{\rho} g H_0} + \underbrace{\tilde{\rho} \tilde{Q}_1 g H'}_{O(\tilde{\varepsilon}^2)}$$

2. Trägheit: instationäre Bernoulli:

$$p_{t2} - p_{t3} = \overset{(\rho_0 + \tilde{\rho})}{\cancel{\rho_0}} \frac{l}{A} \dot{Q}_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\tilde{p}_2 - \tilde{p}_3 = \rho_0 \frac{l}{A} \dot{\tilde{Q}}_1} + \tilde{\rho} \dot{\tilde{Q}}_1 \frac{l}{A}$$

3. Kapazität, Druckaufbau, Kontinuität,
konservative Kräfte, ...

$$\kappa_m V_0 \dot{p}_{t3} - Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\hookrightarrow \kappa_m V_0 \dot{\tilde{p}}_{t3} - \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2 = 0$$

4. Ventil, Armatur, ... ~~wirkend~~ wirkt immer dämpfend.

$$p_{t3} - p_{t4} = \frac{\rho_0}{2} \frac{Q_2 |Q_2|}{A_V^2} \rightarrow \tilde{p}_3 = \frac{\rho_0}{2} \frac{Q_0 \tilde{Q}_2}{A_V^2} + O(\tilde{Q}_2^2)$$

lineares System, da alle Terme der Ordnung $\tilde{\varepsilon}^2$ vernachlässigt werden.

Stabilitätsanalyse

$$\tilde{P}_3 = \hat{P}_3 e^{(\lambda t)}$$

$$\tilde{Q}_2 = \hat{Q}_2 e^{(\lambda t)}$$

$$\vdots$$

$\Big\}$ Einsetzen in das Syst. $\Big\}$ Bestimmen der Eigenwerte

$\lambda_i \rightsquigarrow \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$

Stabilitätsgrenze.

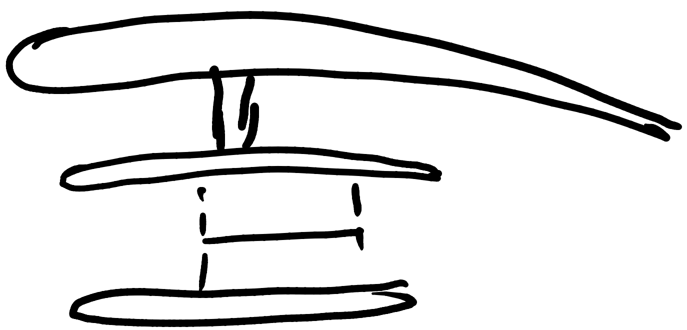
und zugehörigen Eigenvektor

$\hat{P}_{3i}$

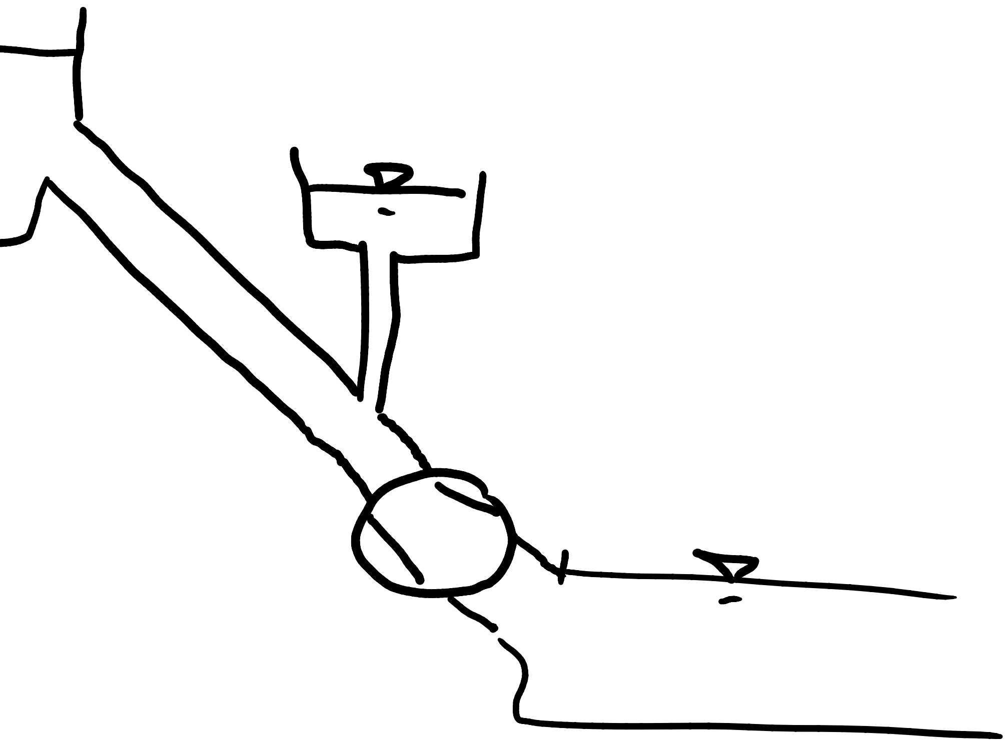
$\hat{Q}_{2i}$ ....

Beispiele für Systeme

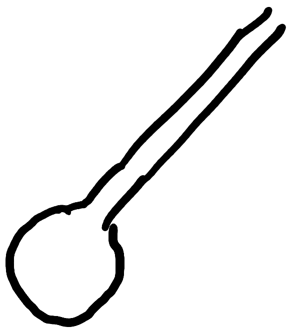
1.) Flugtriebwerk.



2.) Wasserkraftwerk.



3.) Töne beim Glasblasen



4.) Bremsenschwingung.

⋮

Impulssatz für eine Stromröhre

Die zeitliche Impulsänderung eines materiellen Körpers ist gleich der Kraft auf den Körper.

$$\vec{I} := \int d\vec{I} = \int_m \vec{u}\, dm \qquad d\vec{I} = \vec{u}\, dm$$

Kontinuum

$$\int_V \vec{u} \rho\, dV$$

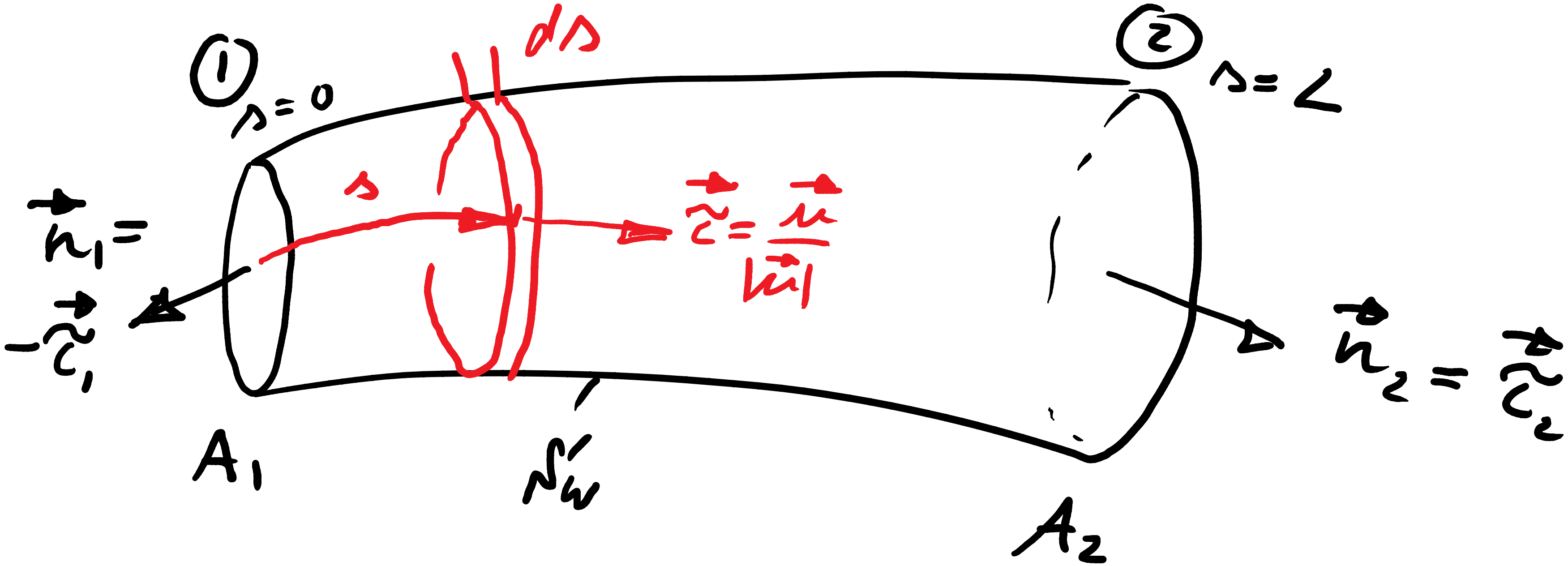
$$\vec{F} = \int d\vec{F}_S + \int d\vec{F}_V$$

$$d\vec{F}_S = \vec{t}\, dS$$

$$d\vec{F}_V = \rho \vec{k}\, dV$$

V(t)

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u}\, dV = \int_S \vec{t}\, dS + \int_V \rho \vec{k}\, dV$$



$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u A \vec{\tau}\right) ds - \left(\rho_1 u_1^2 + p_1 + \rho_1 \psi_1\right) A_1 \vec{\tau}_1 +$$

$$+ \left(\rho_2 u_2^2 + p_2 + \rho_2 \psi_2\right) A_2 \vec{\tau}_2 = -\vec{F}$$

Fl → Strömricht.

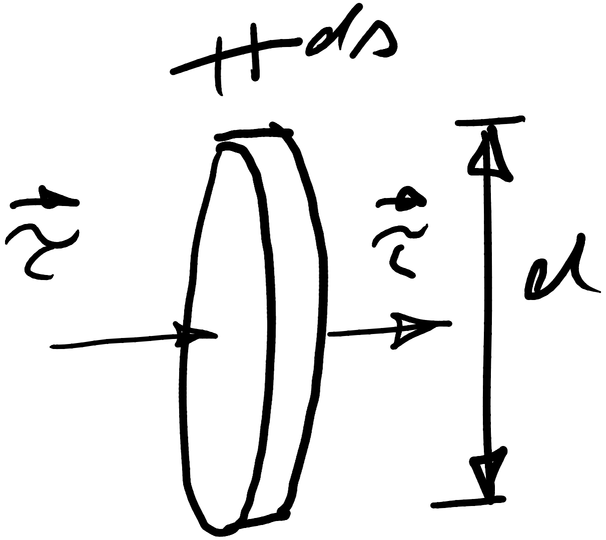
Vergleich Kont.:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(\rho A)\,ds - \rho_1 u_1 A_1 + \rho_2 u_2 A_2 = 0.$$

1. HS:

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{u^2}{2}+e\right)\rho A\right]ds - \rho_1 u_1 A_1 h_{t1} + \rho_2 u_2 A_2 h_{t2} = P_s + \dot{Q}$$

Impulssatz für eine differentiell kleine Scheibe einer Stromröhre



$\vec{k}$

$$\vec{k}\cdot\vec{\tau} = k_s$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u} A)\vec{\tau}\, ds - d\left(\left(p+\rho\bar{u}^2+\rho\psi\right)A\vec{\tau}\right) = -d\vec{F}_{Fl\to Wand}$$

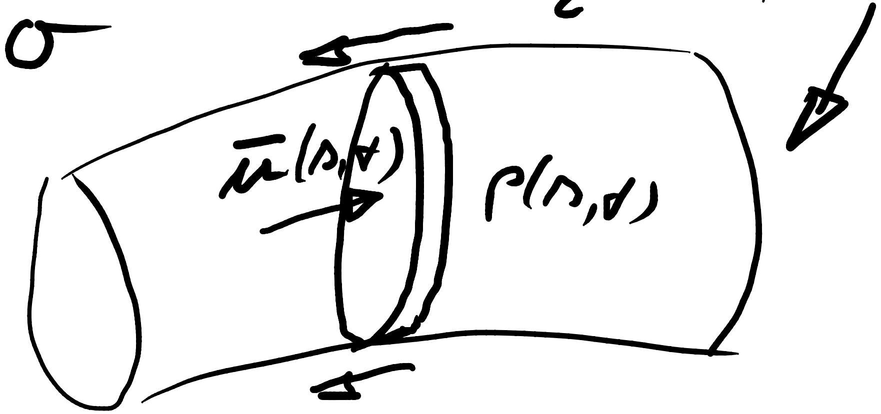
Mittelwert.

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = k_{eff}\ ; \quad k_{eff} = k_s - \frac{\lambda}{2}\frac{\bar{u}|\bar{u}|}{d}$$

Massenbilanz od. Kontigl. → Kapazität

$$\frac{1}{\rho a_E}\frac{Dp}{Dt} + a_E\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = 0$$

$$\tau_w = \lambda\frac{\rho}{2}\bar{u}|\bar{u}|$$



Impulsbilanz

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = k_E = \underbrace{k_s}_{\text{treibende Kraft}} - \underbrace{\frac{\lambda}{2}\frac{\bar{u}|\bar{u}|}{a}}_{\text{Dämpfung}}$$

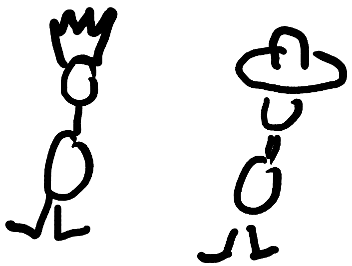
Zwei Gleichungen für zwei unbekannte Funktionen

$\bar{u}(s,t)$; $p(s,t)$

Problem: Der Operator $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial s}$

Ingenieur → Linearisierung. → lineare Wellengleichung.

Mathematiker → Lösen mit Nichtlinearität



Riemann. → Riemann Lösung
→ Charakteristikenmethode.

Linearisierung: $\boxed{\text{Schnelle}}$

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \tilde{u}$$

$$p = p_0 + \tilde{p}$$

$$a_E = a_{E0} + \tilde{a}$$

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho_0 a_{E0}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + a_{E0} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = k_{E0} \quad \Big| \frac{\partial}{\partial x}$$

$$a_{E0}^2 \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = 0$$

oder

$$a_{E0}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = 0$$

lineare Wellengleichung.

$\rho_0 a_{E0} = Z_0$ Impedanz.

$$\boxed{s \overset{!}{=} x}$$

Ansatz $\tilde{p} = \hat{p}\, e^{i\Omega t}\, e^{\pm ikx}$