TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK



# Wellenausbreitung in Systemen

Wegkoordinate $x$ od. $s$

Zeitkoordinate $t$.

**Kontinuität** für eine „Scheibe" einer Stromröhre

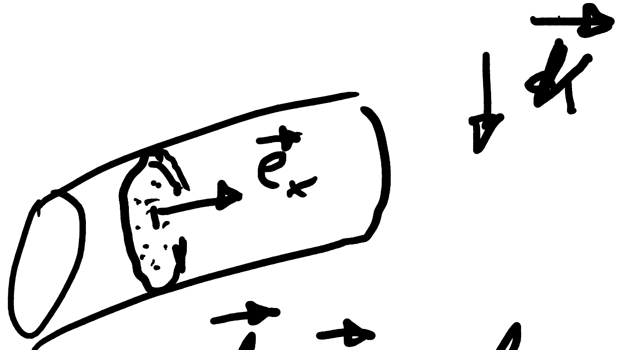
$$\frac{1}{\varrho_E a_E} \frac{Dp}{Dt} + a_E \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

$Z := \varrho a$ akustische Impedanz.

Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz

## Impulsbilanz

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho_E}\frac{\partial p}{\partial x} = k_E$$




$$\vec{k}\cdot\vec{e}_x = k_x$$

$$k_E = k_x - \underbrace{\frac{\lambda}{2}\frac{\bar{u}|\bar{u}|}{d}}_{\hat{=}\ \frac{1}{A}\int \nabla\cdot\underline{P}\, dS}$$

Cauchy-Gleichung für ein Fluidteilchen

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{k} + \nabla\cdot\underline{P} \;\Big|\; \int_A dS$$

$$\bar{u} := \frac{1}{A}\int_A \vec{u}\cdot\vec{e}_x\, dS$$

Impuls: $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{\varrho_E} \frac{\partial p}{\partial x} = k_E$

Konti: $\frac{1}{\varrho_E a_E} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + a_E \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0.$

1. Linearisierung ⇝ Störansatz $\bar{u} = u_0 + \tilde{u}$ ⇝ $O(\tilde{\varepsilon}^2) \ll O(\tilde{\varepsilon})$

$\bar{p} = p_0 + \tilde{p}$

↳ Wellengleichung

Elimination von $p$ oder $u$

$$\leadsto a_{E0}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$a_{E0}^2 \Delta \vec{u} - \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0.$$

2. Charakteristikenmethode von Riemann

Bewegungsgleichung ± Kontigleichung. und zwei
neue
Gleichg.

$$\underbrace{\left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} + a_E)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right]}_{\frac{d\bar{u}}{dt}} + \frac{1}{\rho_E a_E}\left[\underbrace{\frac{\partial p}{\partial t} + (\bar{u} + a_E)\frac{\partial p}{\partial x}}_{\frac{dp}{dt}}\right] = k_E$$

$\frac{d\bar{u}}{dt}$ für einen Beobachter längs der Bahn $\frac{dx}{dt} = \bar{u} + a_E$

$$\underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\bar{u} - a_E)\frac{\partial u}{\partial x}\right]}_{\frac{d\bar{u}}{dt}} - \frac{1}{\rho_E a_E}\left[\underbrace{\frac{\partial p}{\partial t} + (\bar{u} - a_E)\frac{\partial p}{\partial x}}_{\frac{dp}{dt}}\right] = k_E$$

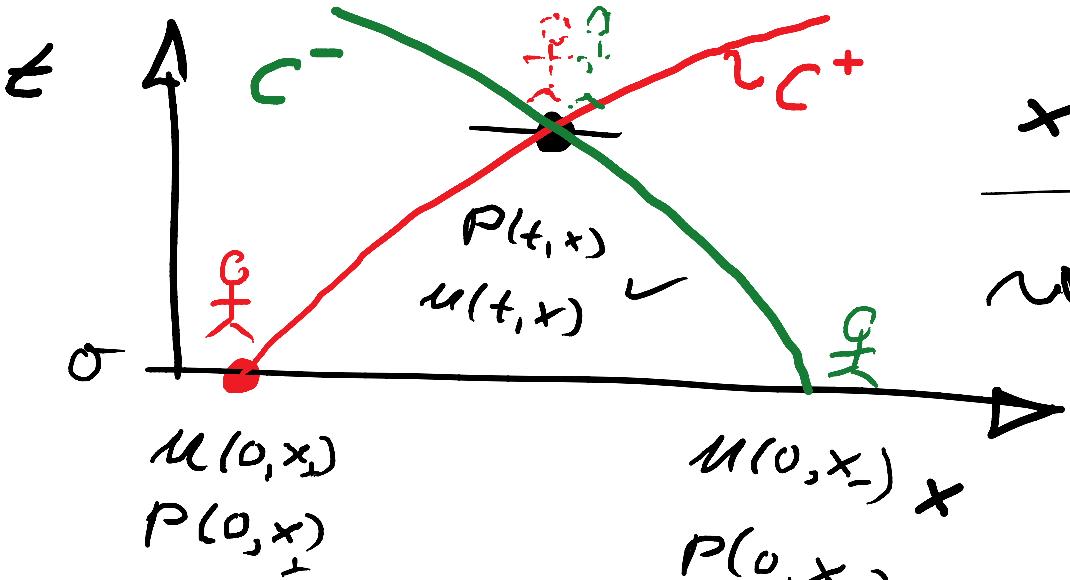
$\frac{d\bar{u}}{dt}$ · für $\frac{dx}{dt} = \bar{u} - a_E$

Kürzer: Verträglichkeitsbedingungen $\qquad C^+$-Charakt.

$$d\bar{u} + \frac{1}{\varrho_E a_E}\, dp = k_E\, dt, \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} = \bar{u} + a_E$$

$C^-$-Charakteristik

$$d\bar{u} - \frac{1}{\varrho_E a_E}\, dp = k_E\, dt, \quad \text{für} \quad \frac{dx}{dt} = \bar{u} - a_E$$

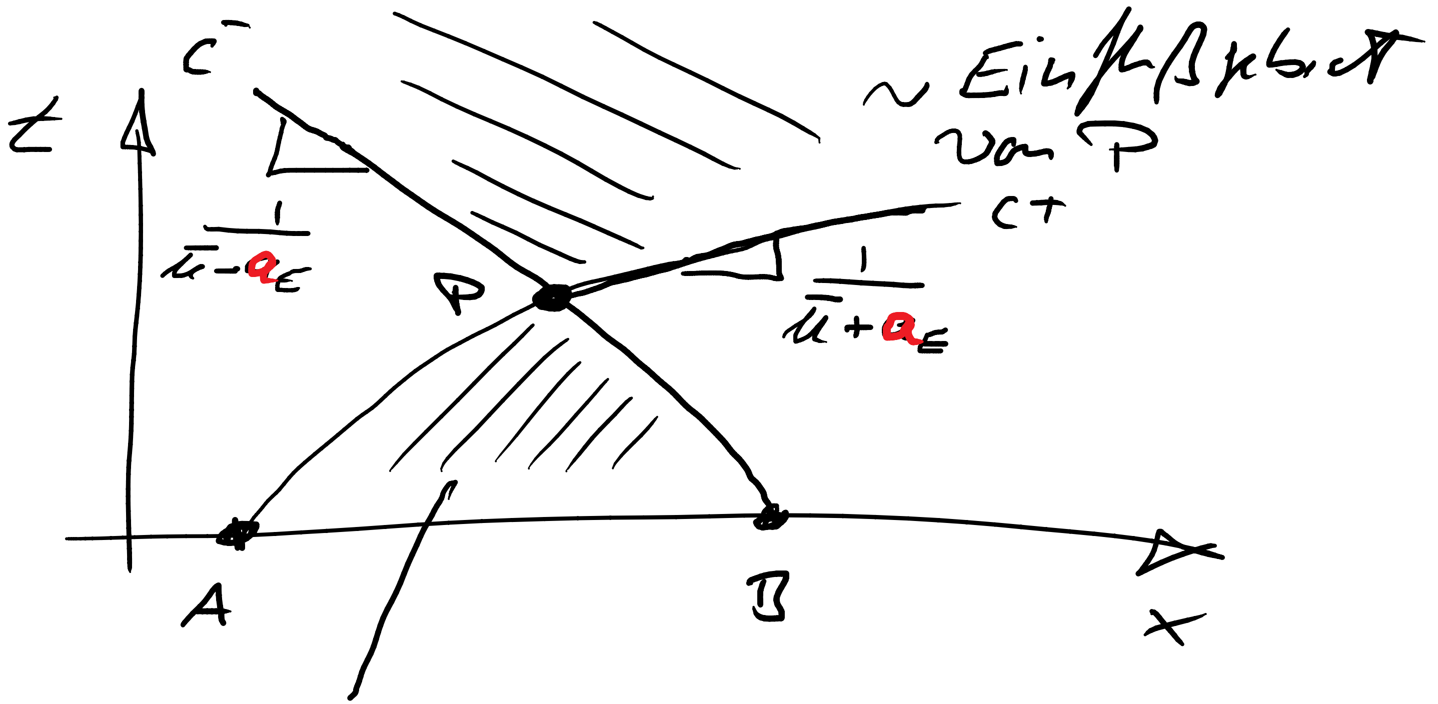



x-t-Diagramm.

⇝ sehr einfach numerische Umsetzung möglich.

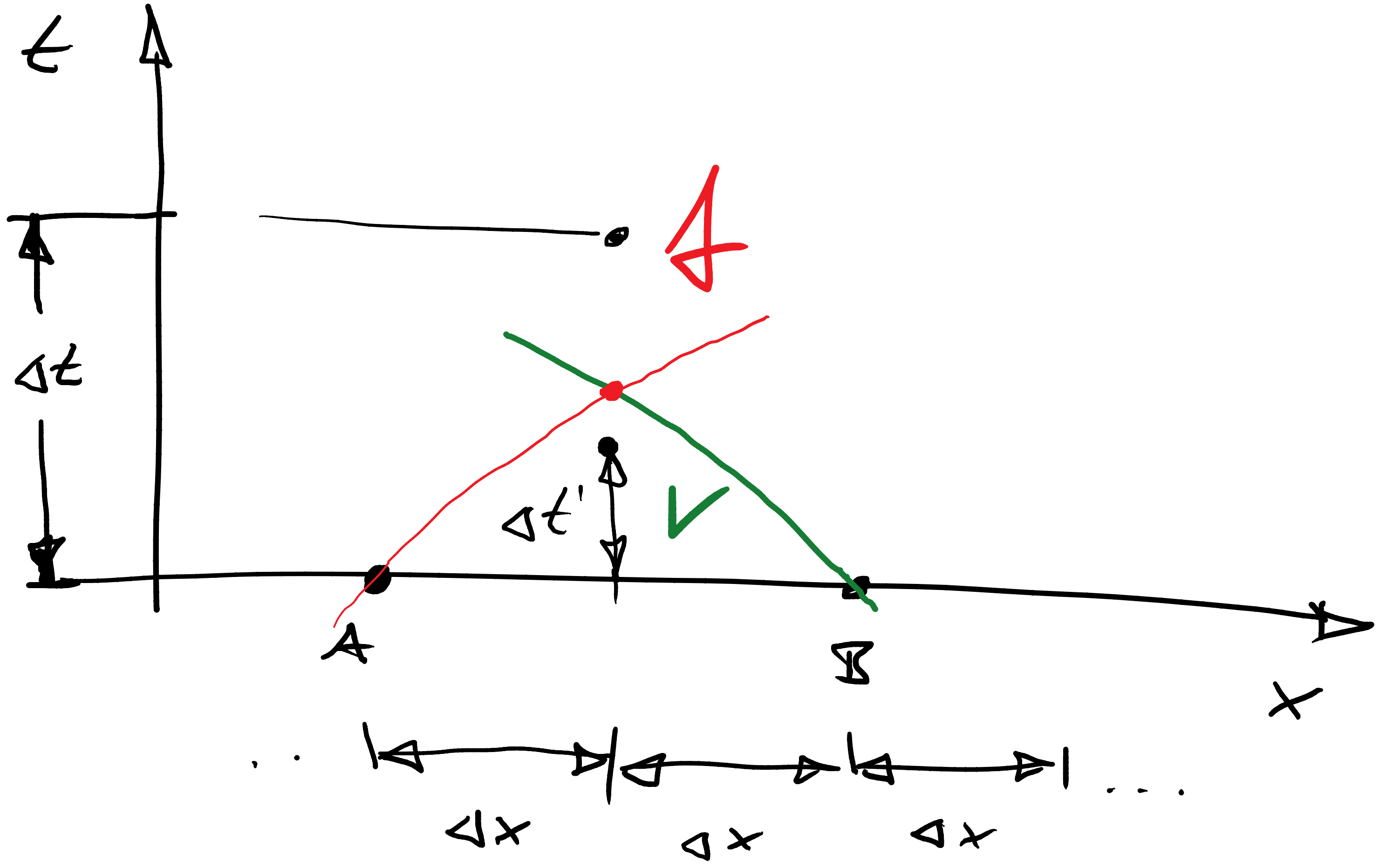
## Schlüsse aus dem charakteristischen Verfahren

1.




Abhängigkeitsgebiet von A und B

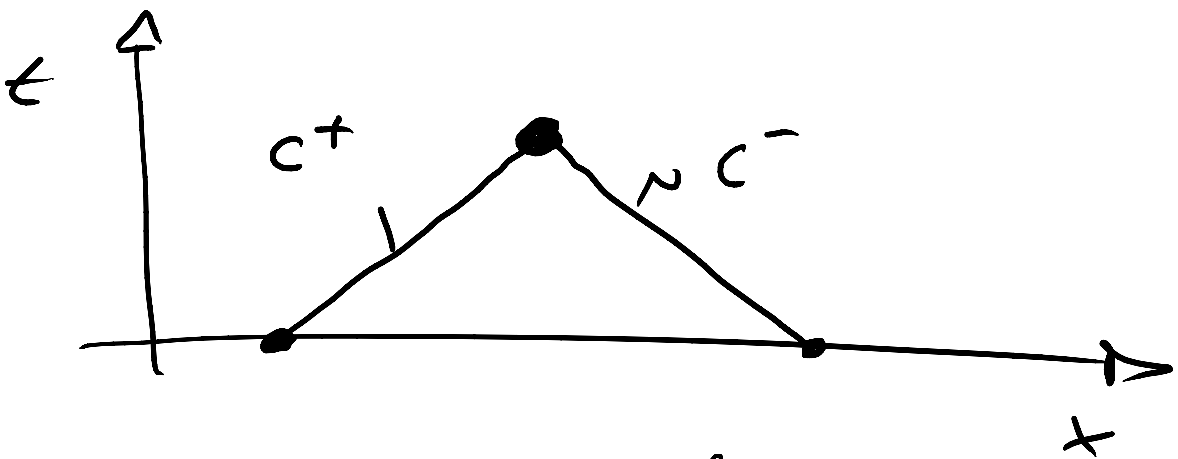
2.



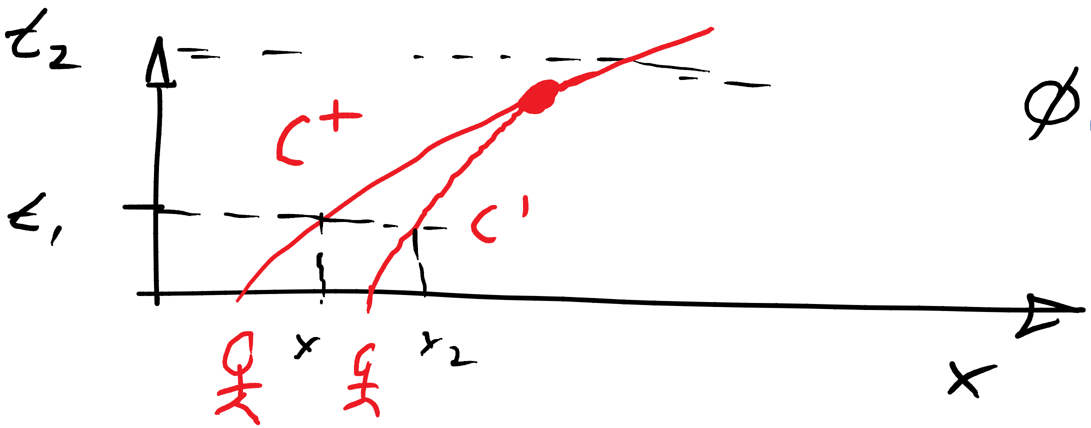

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} < a_E \,, \quad \text{für } a_E \gg \bar{u}$$

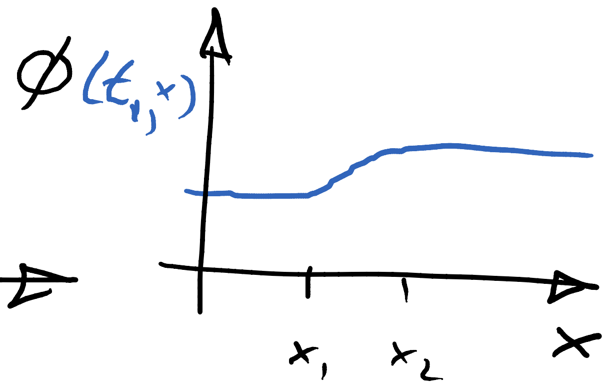
$$CFL = \frac{\Delta x}{\Delta t \, a_E} < 1$$ notwendige Bedingung für jeden Zeitintegrator!

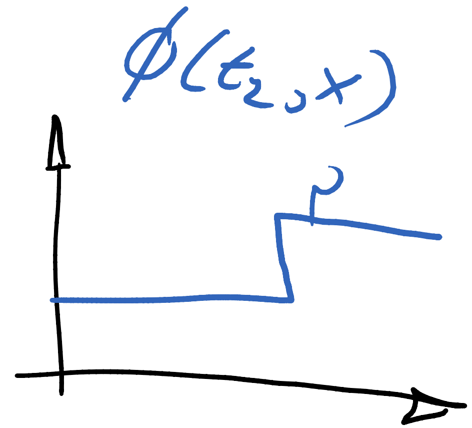
3. Charakteristikenverfahren ist immer das effizienteste Verfahren, da $CFL = 1$




4. $C^+$-Charakteristiken können sich schneiden!?



4 ~~

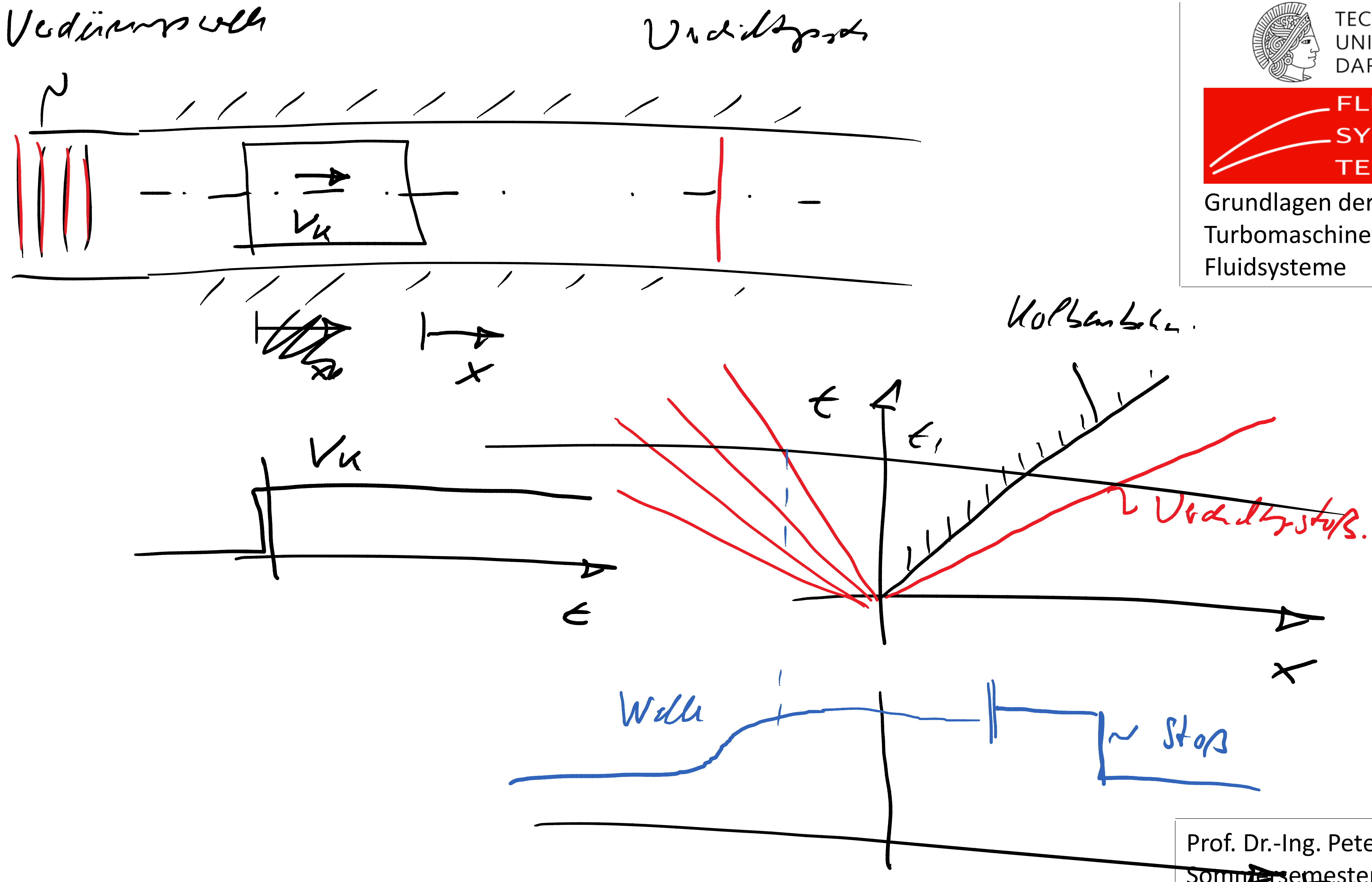
Wenn $C^+$ od. $C^-$-Charakteristiken sich schneiden, entstehen Unstetigkeiten

z.B. • Verdichtungsstoß in der Gasdynamik.

• Schwall od. Hydraulic Jump. bei Strömungen mit freier Oberfläche.

• Verkehrsstau

• Konzentrationssprung in der Verfahrenstechnik bei Sorptionsvorgängen.




TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

$$\Delta \bar{u} + \underbrace{\frac{1}{\rho_{E_0} a_{E_0}}}_{Z_0} \Delta p = \cancel{h_E\, dt}\ \sigma$$

Zusammenhang zwischen Druckänderung $\Delta p$ und Geschwindigkeitsänderung $\Delta \bar{u}$.

$$\Delta p \sim \Delta u\, \rho_{E_0} a_{E_0}$$

↳ Größenordnungsabschätzung der Druckänderung

$$\Delta p \sim 10 * 10^3 * 10^3 * 10^{-5}\ \text{bar} \sim 100\ \text{bar}.$$

☹

z.B. $\Delta u \sim 10 \frac{m}{sec}$ $\quad \rho_{E_0} \sim 10^3 \frac{kg}{m^3}$ $\quad a_{E_0} \sim 10^3 \frac{m}{sec}$.