① $\tau = \tau(\varrho, \ell, m, \varphi_0)$ {physikalische Größen

② $[LMT]$ - System — Basisgrößensystem

$\{m\ kg\ sec\}$ - System — Basiseinheitensystem

③ Der physikalische Zusammenhang muß invariant gegenüber Änderung der Basiseinheit sein (Skaleninvarianz)

↳ Produktbildung / relative Größen

dimensionslose Produkte

$$\tau = fn\left(\overset{L}{\cancel{\ell}},\ \sqrt{\ell/g},\ \overset{M}{\cancel{m}},\ \overset{1}{\varphi_0}\right)$$

$$[\tau] = T \qquad \left[\sqrt{\ell/g}\right] = T$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\, fn(\varphi_0)$$

$$\frac{\tau}{\sqrt{\frac{\ell}{g}}} = fn(\varphi_0)$$

$$\Pi_1 = \frac{\tau}{\sqrt{\ell/g}} \qquad \Pi_2 = \varphi_0$$

$P_1 = \tau, \; P_2 = l, \; P_3 = g, \; P_4 = m, \; P_5 = \varphi_0$

5 physikalische Größen dimensionsbehaftet

$\Longleftrightarrow$

$\Pi_1 = \frac{\tau}{\sqrt{l/g}}, \; \Pi_2 = \varphi_0$

2 dimensionslose physikalische Größen

$0 = Fn(P_1, P_2, \dots P_n) \Longleftrightarrow 0 = Fn(\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_{n-r})$

r Rang der Dimensionsmatrix

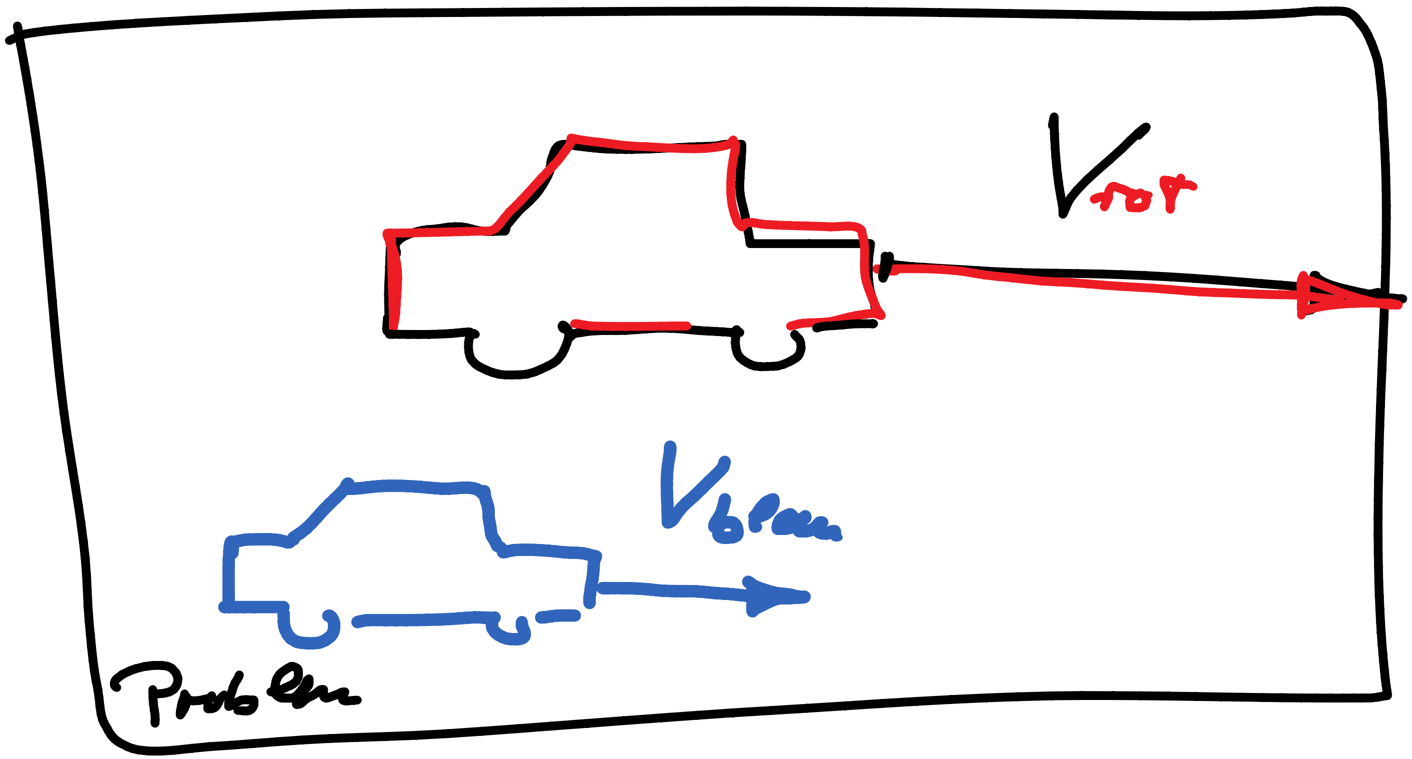
Historie der Dimensionsanalyse

Anfänge
- Galileo Galilei
- Lord Raighley Theory of Sound
  Dover-Verlag
- Bridgman
  Nobelpreis für Physik ca. 1970.

Bridgmann Postulat:

... Absolute Bedeutung relativer Größen ...

Nur relative Größen haben absolute Bedeutung.



$V_{rot} = 100\,\frac{km}{h}$ 1.

$V_{blau} = 50\,\frac{km}{h}$

$V_{rot} = 2\,V_{blau}$ 2

Sie messen Größe in Vielfache von Größen, die in dem Problem vorhanden sind

Maßstab für die Zeit $\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$$\tau = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\, fu(\varphi_0)$$

$$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \end{matrix}$$

$$V_{rot} = V_{bla}\, 2$$

$$\frac{\tau}{\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

$$\frac{V_{rot}}{V_{bla}}$$

Dimensionsmatrix

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \tau & l & g & m & \varphi_0 \\
\hline
L & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
M & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
T & 1 & 0 & -2 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$[g] = L^{1} T^{-2} M^{0}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

	τ	$\sqrt{l/g}$	g	φ_0
L	0	0	1	0
T	1	$\cancel{2}$ 1	-2	0

Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2012
Vorlesung 10 F 164

	$\frac{\tau}{\sqrt{l/g}}$	$\sqrt{l/g}$	φ_0
T	0	1	0

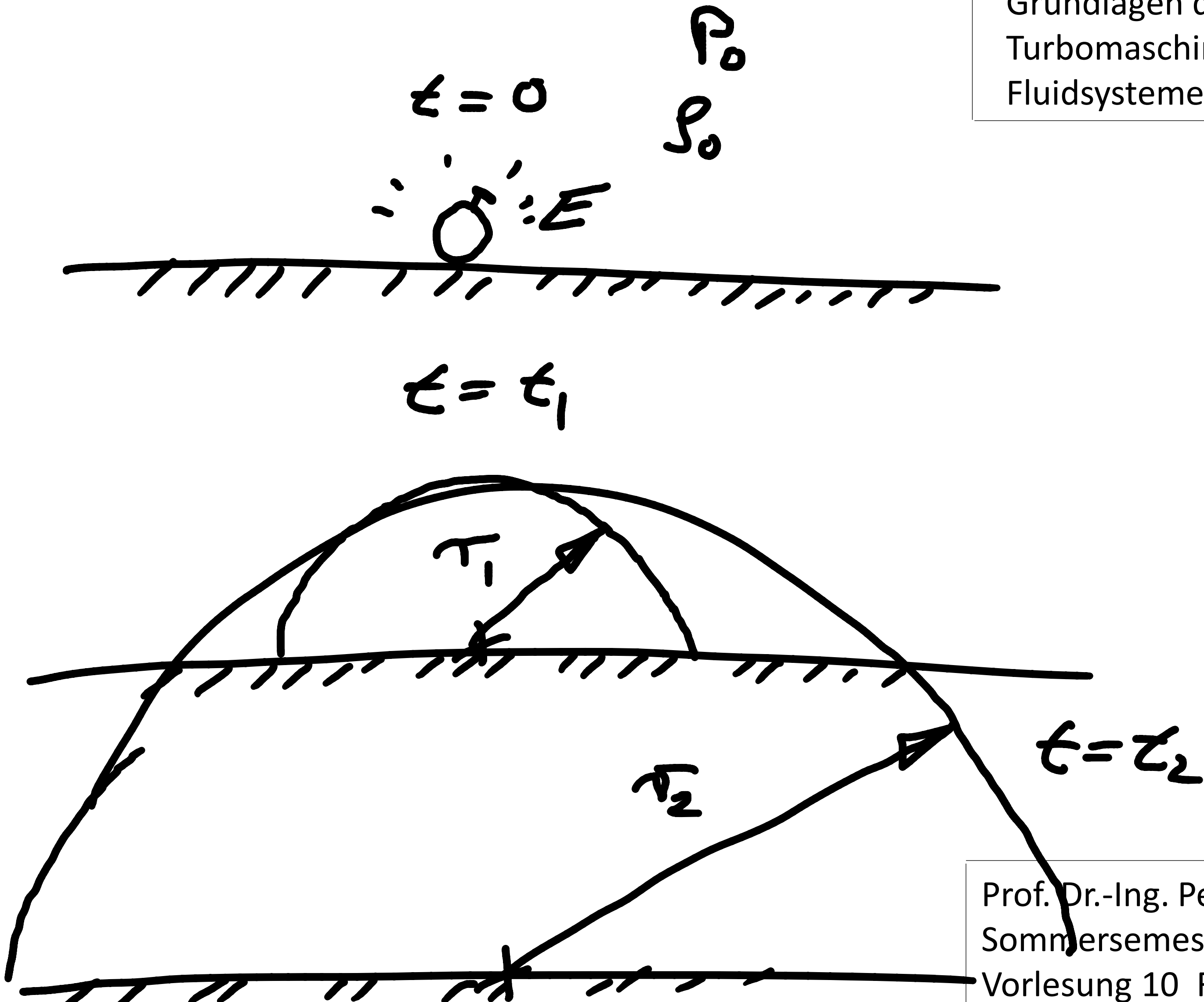
$$F_u\left(\frac{\tau}{\sqrt{l/g}}, \varphi_0\right) = 0 \iff \frac{\tau}{\sqrt{l/g}} = f_u(\varphi_0).$$

Literatur zur Dimensionsanalyse

- Theory of Sound — Rayleigh +++
- Dimensional Analysis — Bridgman +
- " — Langhaar
- Ähnlichkeitstheorie — Zierep Taschenb. +++
- ~~Ähn~~ Dimensionsanalyse — Spurk Springer-Verlag +++
- Scaling — Barenblatt Cambridge Univ.-Press

Sehr starke Explosion ≙ Atombombe
Supernova

- G.I. Taylor GB
  ca. 1940
- von Neumann
  USA
- Sedov SU



① Liste der physikalischen Größen

	τ	$t\sqrt{E/\rho_0}$	$\sqrt{E/\rho_0}$	$\cancel{p_0}$	ρ_0	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
L	1	0 $\frac{5}{2}$	$2+\frac{3}{2}=5/2$		-3	0
M	0	0	1 0		1	0
T	1 0	1	$-\frac{2}{2}=-1$		0	0

$$[E] = [FL] = [M^1 L^2 T^{-2}]$$

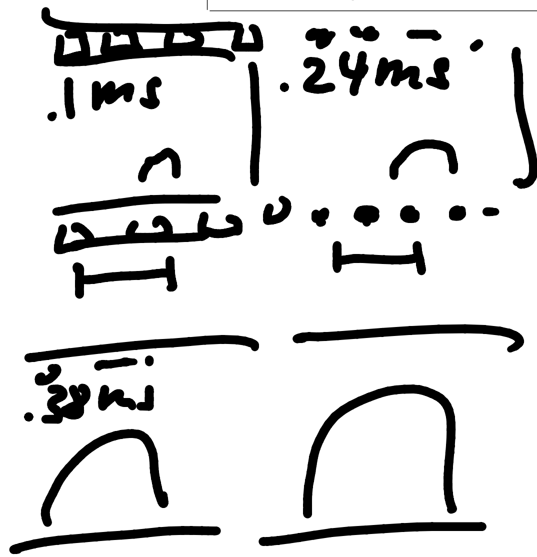
$$\Pi_1 = \frac{\tau}{t^{2/5}(E/\rho_0)^{1/5}} \qquad \Pi_2 = \gamma$$

	τ	$\left(t\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}\right)^{\frac{2}{5}}$	γ
L	1	1	0

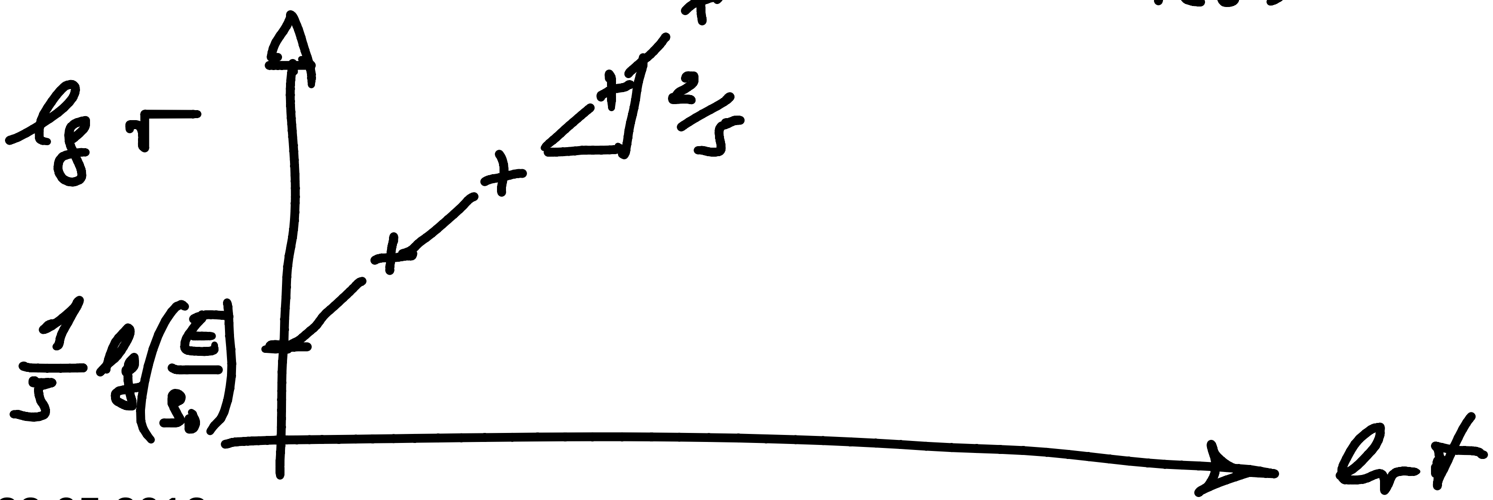
		$\left(\;\right)^{\frac{2}{5}}$
t	0	1

$$\tau = t^{\frac{2}{5}} \left(\frac{E}{\varrho_0}\right)^{\frac{1}{5}} \underbrace{fn(\gamma)}_{\approx 1}$$

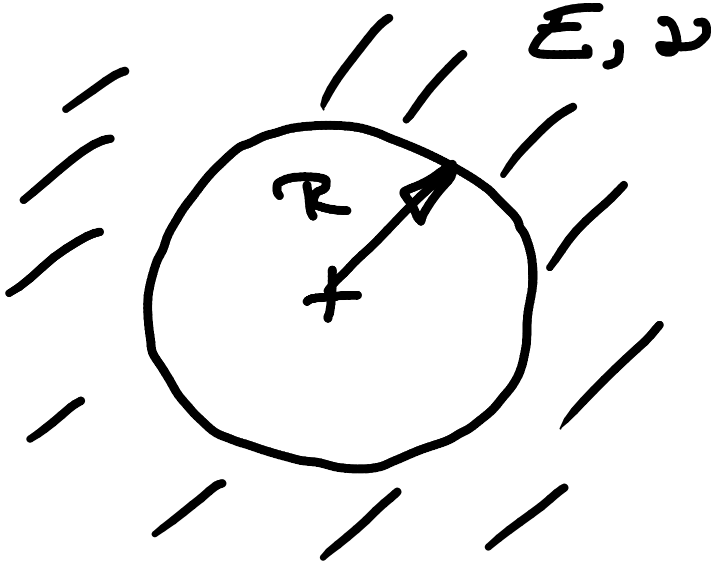
Ergebnis aus der Gasdynamik.



$$\lg \tau = \frac{2}{5} \lg t + \frac{1}{5} \lg\left(\frac{E}{\varrho_0}\right)$$



Beispiel zur Übung



$x_{ff} = ?$

Forts. Anmerk.:

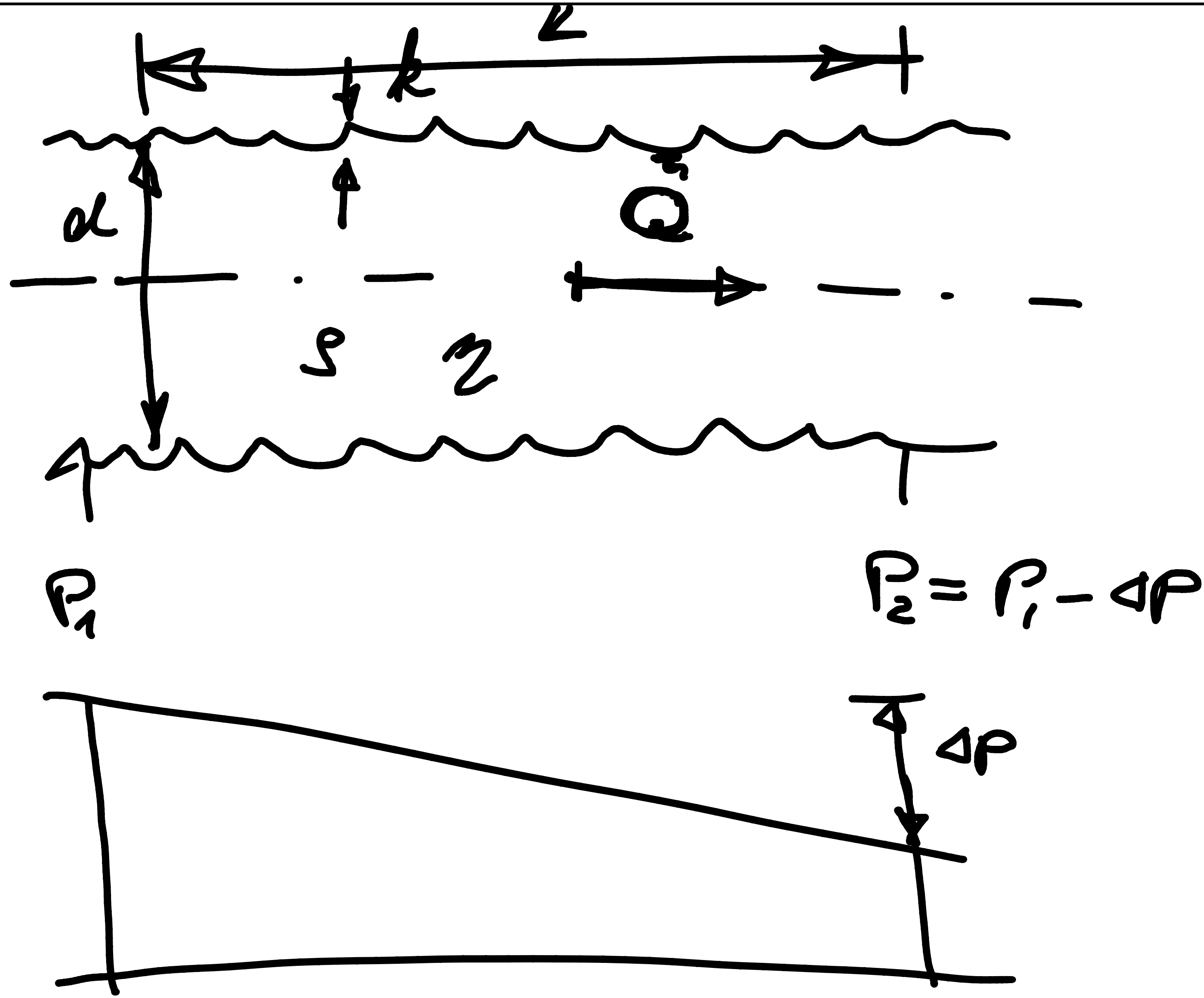
1. Dimensionsanalyse ist nicht eindeutig

$$Fn(P_1, P_2 \dots P_n) \Longleftrightarrow Fn(\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_{n-r})$$

$$\Pi_1' := \Pi_1 * \Pi_2 , \; \Pi_2' = \Pi_2 \dots$$

Grund: Überbestimmtes Gleichungssystem

$r > 0.$



$$\Delta p = fn(L, d, k, \eta, \rho, \dot{Q})$$

7-Größen.

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\bar{u}^2 \frac{\rho}{2}}$$ Verlust-ziffer

$$\bar{u} := \frac{Q}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

$$\Pi_1' = \frac{\Delta p}{\eta \bar{u} / d}$$

$$\Pi_2 = \frac{\bar{u} d \rho}{\eta}$$ Reynoldszahl.

$$\Pi_3 = \frac{L}{d}$$ Rohrlänge

$$\Pi_4 = k/d$$ relative Rauheit

$$\Delta p = fn(Q, l, d, k, \eta, \rho)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underbrace{\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2}\bar{u}^2}}_{\Pi_1} = \zeta\Big(\underbrace{Re}_{\Pi_2}, \underbrace{\frac{L}{d}}_{\Pi_3}, \underbrace{\frac{k}{d}}_{\Pi_4}\Big)$$

$$Re = \frac{\bar{u} d \rho}{\eta}$$

$$\bar{u} := \frac{Q}{\frac{\pi}{4}d^2}$$ mittlere Geschw.

$$\Pi_1 * \Pi_2 \frac{1}{2} = \Pi_1' = \frac{\Delta p}{\eta \bar{u}/d}$$

Bei der Auswahl der Dimensionsmatrix benötigen Sie Erfahrung.

$$Re = \frac{\bar{u} d \rho}{\eta} = \frac{\bar{u}^2 \rho}{\eta \, \bar{u}/d} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{viskose Kraft}}$$

$$Re = \frac{\bar{u} d \rho}{\eta} = \frac{\bar{u} d \eta}{\eta^2/\rho} = \frac{\text{Aufgeprägte Kraft}}{\text{Materialkraft}}$$

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \rightarrow [\eta] = \left[\frac{\tau}{\dot{\gamma}}\right] = \frac{F}{L^2} T = L^{-1} M^{1} T^{-1}$$

$$Re = \frac{\bar{u}\, d\, \rho}{\eta} = \frac{\bar{u}\, d / d^2}{\nu / d^2}$$

$\nu = \eta / \rho$ kinematische Viskosität

$$Re = \frac{\text{Diffusionszeit der Rotation}}{\text{konvektive Zeit}} = \frac{d^2/\nu}{d/\bar{u}}$$

Grenzwertbetrachtung.

$\boxed{Re \ll 1}$

$\boxed{Re \to 0}$

Trägheitskraft $\ll$ viskose Kraft

$\sim \rho$ $\qquad \sim \eta$

dann spielt die Dichte ρ in dem Problem keine Rolle

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2}\bar{u}^2} = \zeta\left(\frac{\bar{u} d \rho}{\eta}, \frac{L}{d}, \frac{k}{d}\right) = \frac{1}{Re} fh\left(\frac{L}{d}, \frac{k}{d}\right)$$

$$\frac{\Delta p}{\eta \bar{u}/d} = \ldots\ldots$$

$\lim_{Re \to 0} \zeta \sim Re^{-1}$, da nur dann die Dichte verschwindet.

$Re \to 0$: Schleichende Strömung

hier: laminare Strömung

$$\lim_{Re \to 0} \zeta\left(Re, \frac{L}{d}, \frac{k}{d}\right) = \frac{1}{Re} f\left(\frac{L}{d}, \frac{k}{d}\right)$$

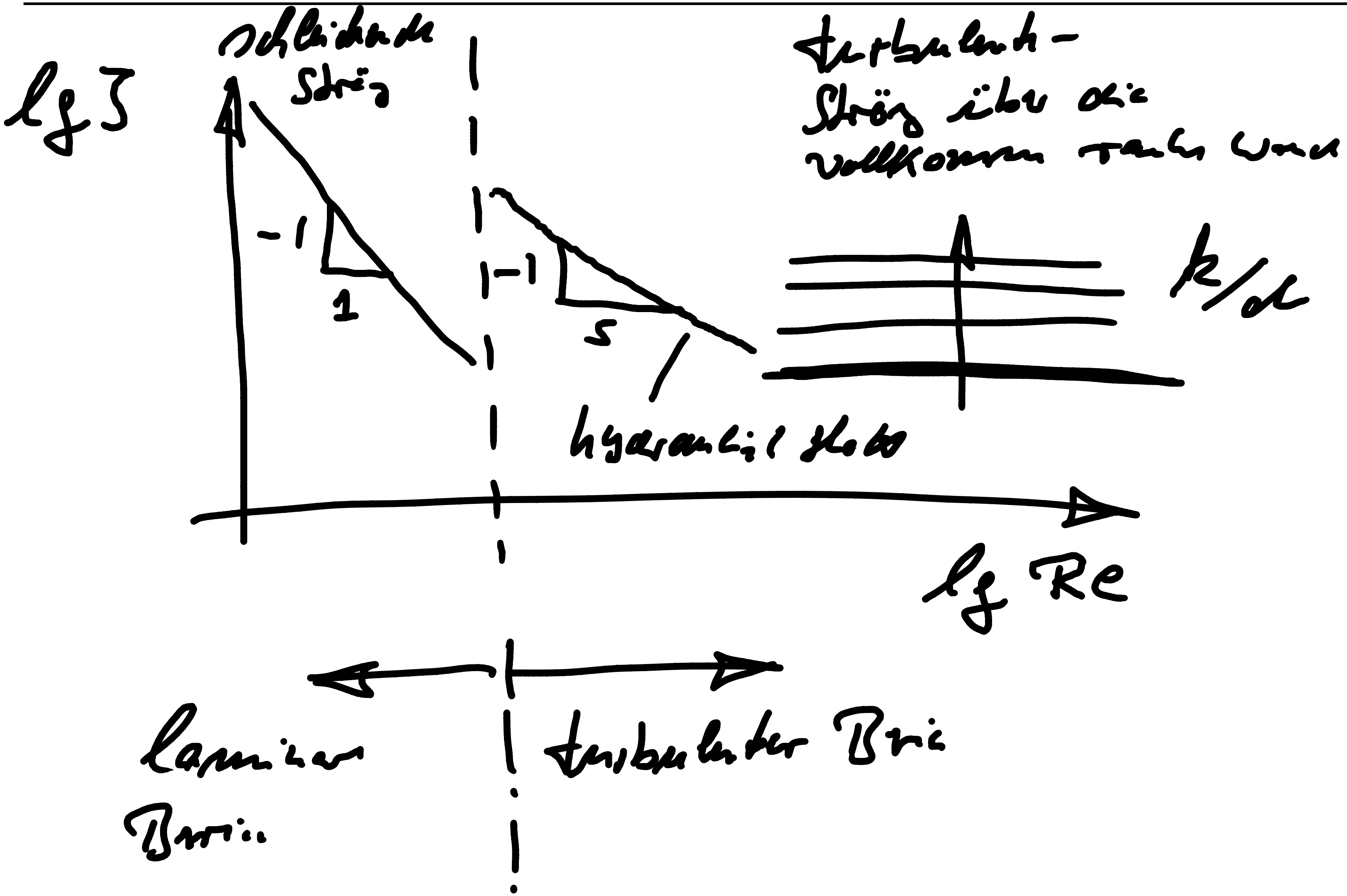
$$= \frac{1}{Re} \frac{L}{d} \lambda\left(\frac{k}{d}\right)$$

$Re \to \infty$

$$\lim_{Re \to \infty} \zeta\left(Re, \frac{L}{d}, \frac{k}{d}\right) = \frac{L}{d} \lambda\left(\frac{k}{d}\right)$$

Trägheit $\gg$ viskose Kräfte $\to$ Re muß wachsen.

$\sim \rho$ $\qquad \sim \eta$



Re_c kritische Reynoldszahl