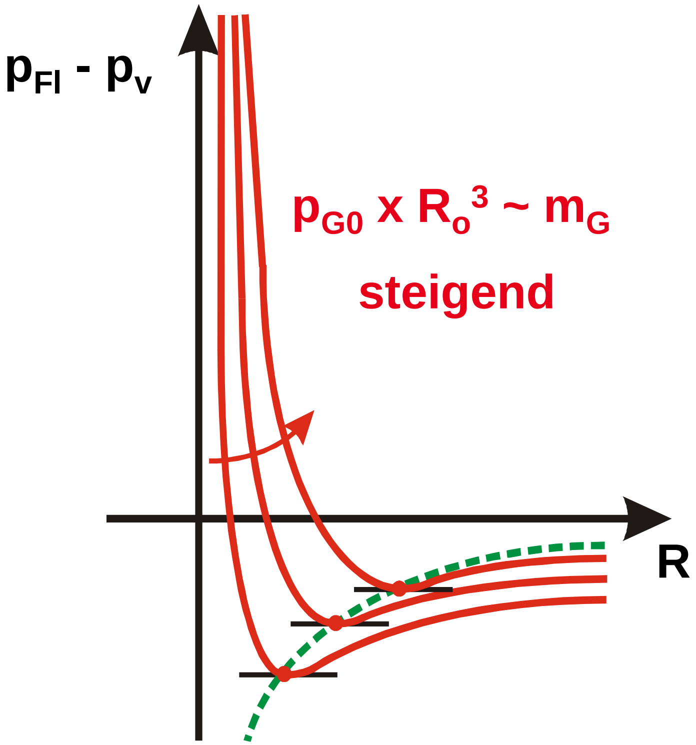
2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten (2/5)



$R = R_{krit}$

für $\dfrac{d(p_{Fl} - p_v)}{dR} = 0$

d.h. $\dfrac{dR}{d(p_{FL} - p_v)} \to \infty$

$$\frac{d(p_{Fl} - p_v)}{dR} = -3\frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{R^4} + \frac{2 \cdot \tau}{R^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{krit} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{\tau}}}$$

$$(p_{FL} - p_v)_{krit} = \frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{R_{krit}^3} - \frac{2 \cdot \tau}{R_{krit}} = \frac{1}{R_{krit}}\left[\frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{\frac{3}{2}\frac{p_{G0} \cdot R_0^3}{\tau}} - 2\tau\right] = \frac{1}{R_{krit}}\left[\frac{2}{3}\tau - 2\tau\right]$$

$$\boxed{(p_{FL} - p_v)_{krit} = -\frac{4}{3}\frac{\tau}{R_{krit}}}$$

Zusammenhang zwischen R_{krit} und R_0:

$$R_{krit} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{p_{G0}\cdot R_0^3}{\tau}} = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{p_0-p_v}{\tau}\cdot R_0^3+2\cdot R_0^2\right)} = R_0\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{p_0-p_v}{\tau}\cdot R_0+2\right)}$$

$$p_{G0} = p_0 - p_v + \frac{2\cdot\tau}{R_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{R_{krit}}{R_0} = \sqrt{3\cdot\left(\frac{p_0-p_v}{2\cdot\tau}\cdot R_0+1\right)}}$$

$$\left(p_{Fl}-p_v\right)_{krit} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{\tau}{R_{krit}} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{\tau}{R_0}\cdot\frac{R_0}{R_{krit}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(p_{Fl}-p_v\right)_{krit} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{\tau}{R_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\cdot\left(\frac{p_0-p_v}{2\cdot\tau}\cdot R_0+1\right)}}}$$

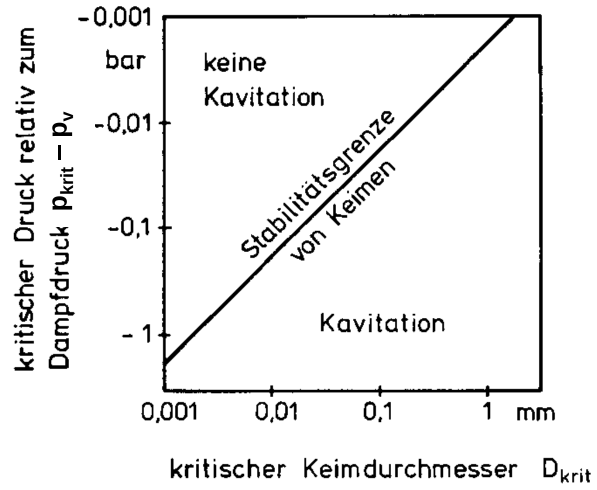
$$\text{d.h.:}\ \left(p_{Fl}-p_v\right)_{krit} = f\left(p_0-p_v,\tau,R_0\right)$$

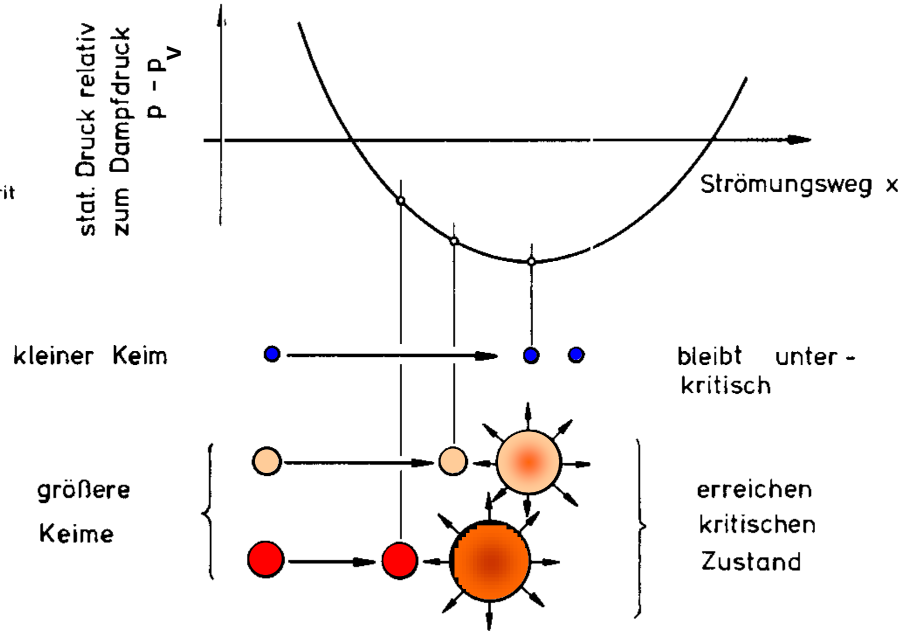
Keimgröße am Referenzort

Flüssigkeit

Dampfdruckabstand am Referenzort

2.1.8 Quasistatisches Keimverhalten (4/5)





Wasser: p_0 = 1 bar, ϑ = 20 °C

p_v = 0,0234 bar

τ = 7,3 10^{-2} N/m

a.) Für welche Keimgrößen ergeben sich Zugspannungen?

$$p_{FL,krit} < 0 \quad \text{für} \quad R_0 < 9 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}$$

$$D_0 < 18\ \mu\text{m}$$

b.) Wie groß sind sind die kritischen Drücke bei realistischen Keimgrößen?

D_o [µm]	1	10	100
$p_{FL,krit}$ [bar]	- 0,949	- 0,030	+ 0,021
			($\approx p_v$)

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (1/6)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Annahmen: 1.) m_G = const. (keine Diffusion)

2.) $p_\infty = p_\infty(t)$

3.) kugelförmige Einzelblase

1.) Potentielle Energie der Blase

(infolge Ausdehnung der Blase ≙ Feder):

$$E_{pot} = \left(p_\infty - p_{Fl,W}\right) \cdot \overbrace{V_{Bl}}^{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3}$$

$$\boxed{\frac{dE_{pot}}{dt} = \frac{dE_{pot}}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = \left(p_\infty - p_{Fl,W}\right) \cdot 4\pi R^2 \cdot \dot{R}}$$

FLUID SYSTEM TECHNIK

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (2/6)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.) Kinetische Energie der Flüssigkeit

(Kinetische Energie des gasförmigen Inhalts der Blase wird vernachlässigt)

$$E_{kin} = \frac{\rho_{Fl}}{2} \int_R^\infty c_r^2 \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV}$$

aus Kontinuität: $4\pi R^2 \cdot \dot{R} = 4\pi r^2 \cdot c_r \quad \Rightarrow \quad c_r^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^4 \cdot \dot{R}^2$

$$E_{kin} = 4\pi \cdot \frac{\rho_{Fl}}{2} \cdot R^4 \cdot \dot{R}^2 \cdot \int_R^\infty r^{-2} dr$$

$$= 2\pi\rho_{Fl} \cdot R^3 \cdot \dot{R}^2$$

$$\boxed{\frac{dE_{kin}}{dt} = 2\pi \cdot \rho_{Fl} \cdot \left(2 \cdot R^3 \cdot \dot{R} \cdot \ddot{R} + 3 \cdot R^2 \cdot \dot{R}^3\right)}$$

FLUID SYSTEM TECHNIK

2.2.1 Differential-Gleichung des dynamischen Blasenverhaltens (3/6)

3.) $\frac{dE_{pot}}{dt} = -\frac{dE_{kin}}{dt}$ (Annahme: reibungsfrei):

$$\boxed{R \cdot \ddot{R} + \frac{3}{2} \cdot \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_{Fl}} \left(p_{Fl,W} - p_\infty \right)}$$

RAYLEIGH-PLESSET-ZWICK-Gleichung

- nichtlineare
- gewöhnliche (= f(Zeit))

Differentialgleichung

$$p_{FL,W} = p_v + p_G - \frac{2 \cdot \tau}{R}$$

$$p_G = \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3n} \cdot p_{G0}$$

isotherm : n = 1
adiabat : n = κ

$$p_{G0} = p_0 + \frac{2 \cdot \tau}{R_0} - p_v$$