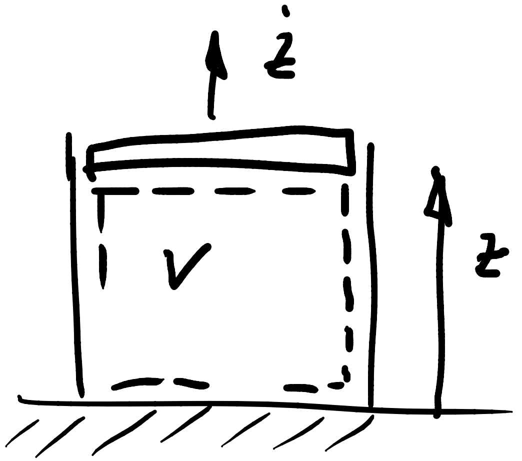
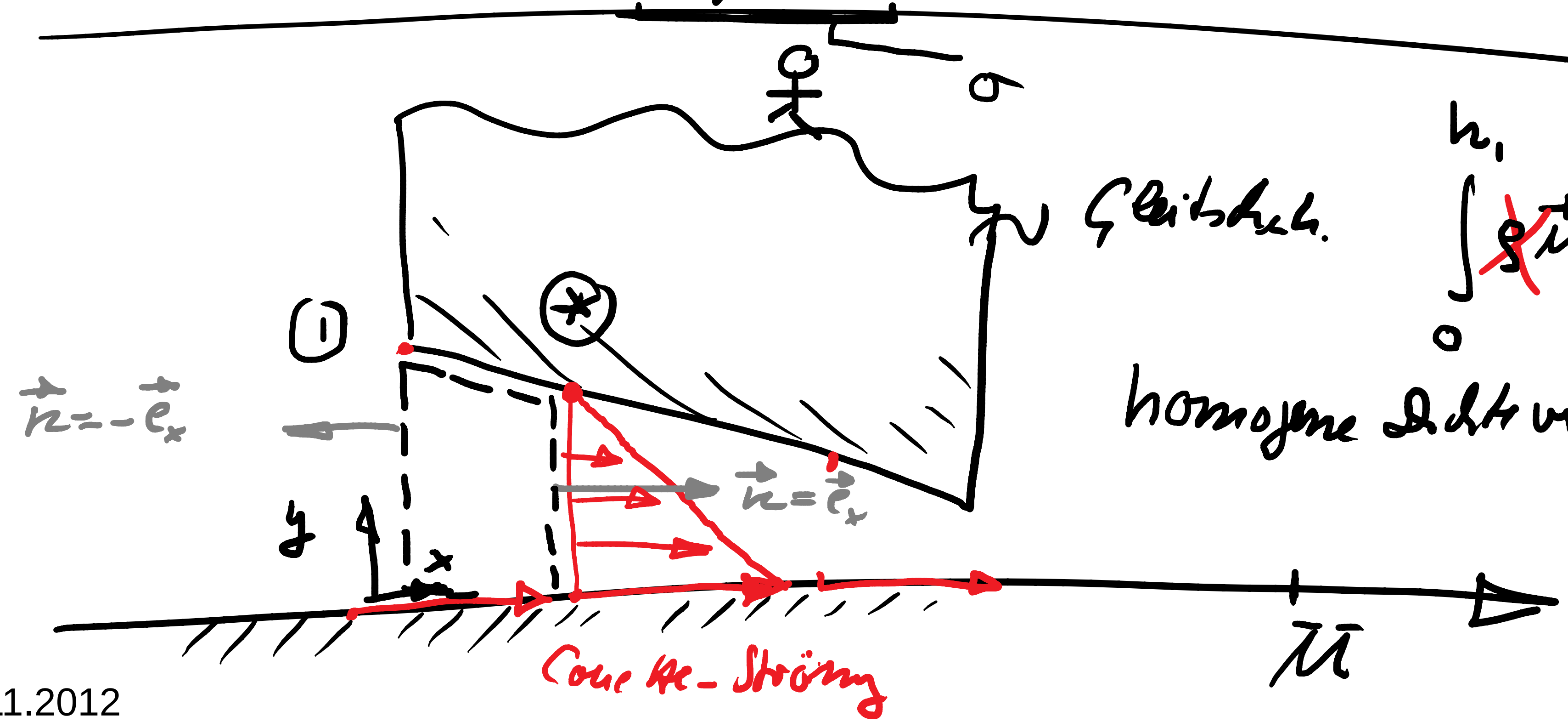
Impulssatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Technische Fluidsysteme



$$\underbrace{V\dot{\rho}} + \underbrace{\rho \dot{z} A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, dV + \oint \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$



$$\int_0^{h_1} \cancel{\rho}\,\vec{u}\cdot\vec{n}\, dy + \int_0^{h_*} \cancel{\rho}\,\vec{u}\cdot\vec{n}\, dy = 0$$

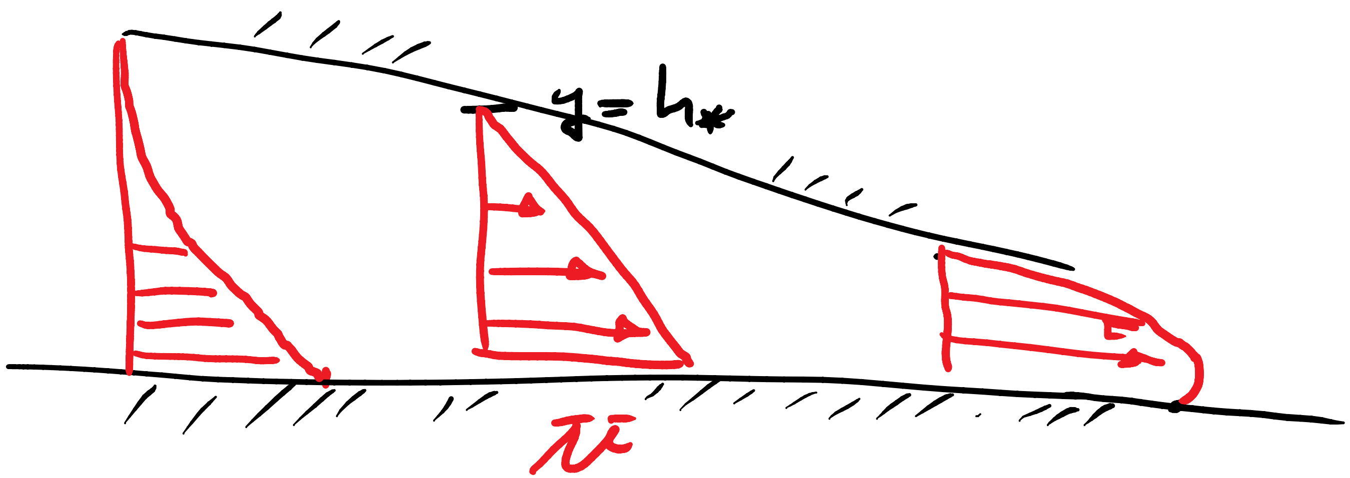
homogene Dichteverteilung $\rho = \text{const}$

$\vec{u}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y$ für eine ebene Strömung.

$\vec{u}\cdot\vec{e}_x = u$ an der Austrittsfläche.

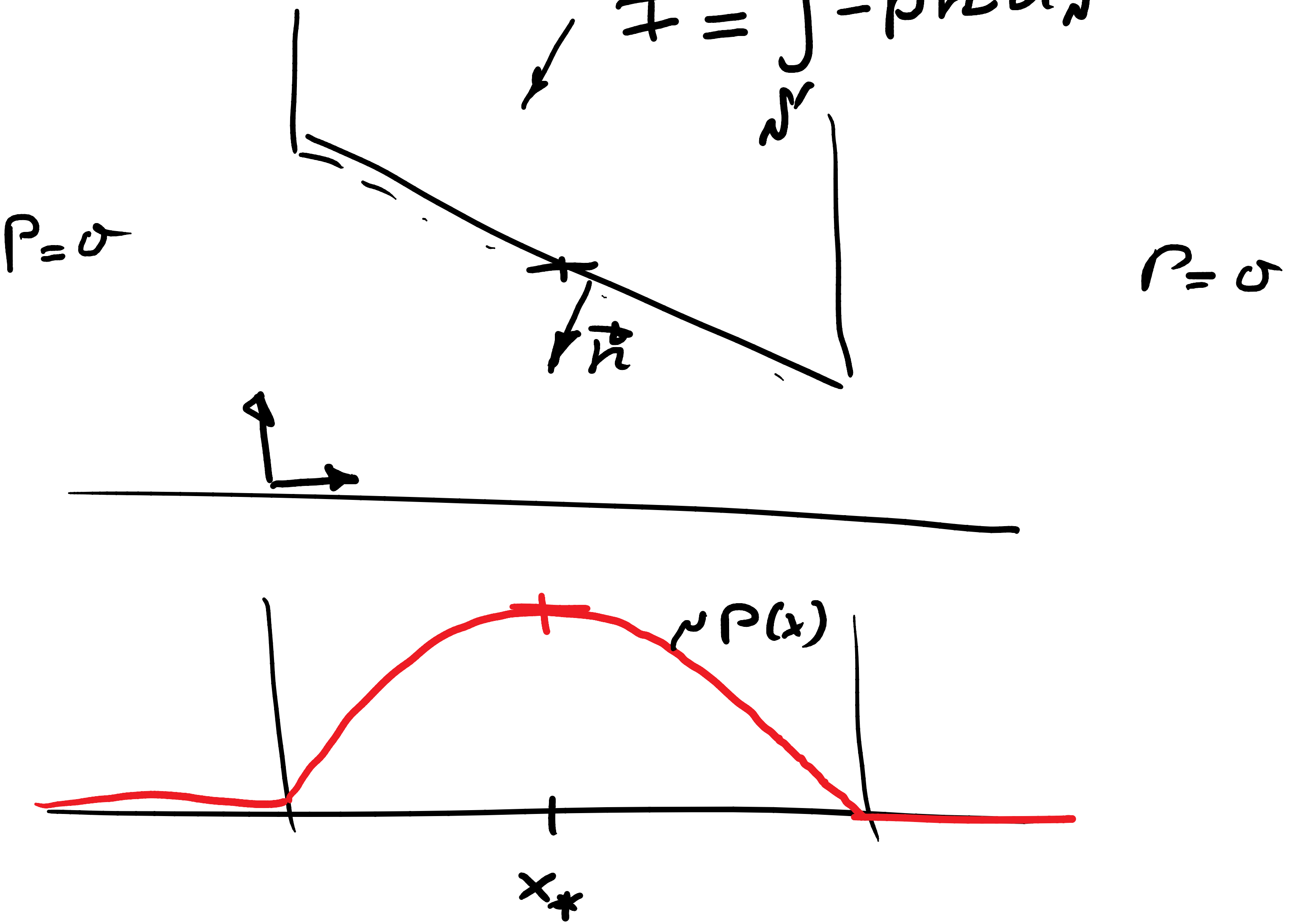
$\vec{u}\cdot(-\vec{e}_x) = -u$ an der Eintrittsfläche.

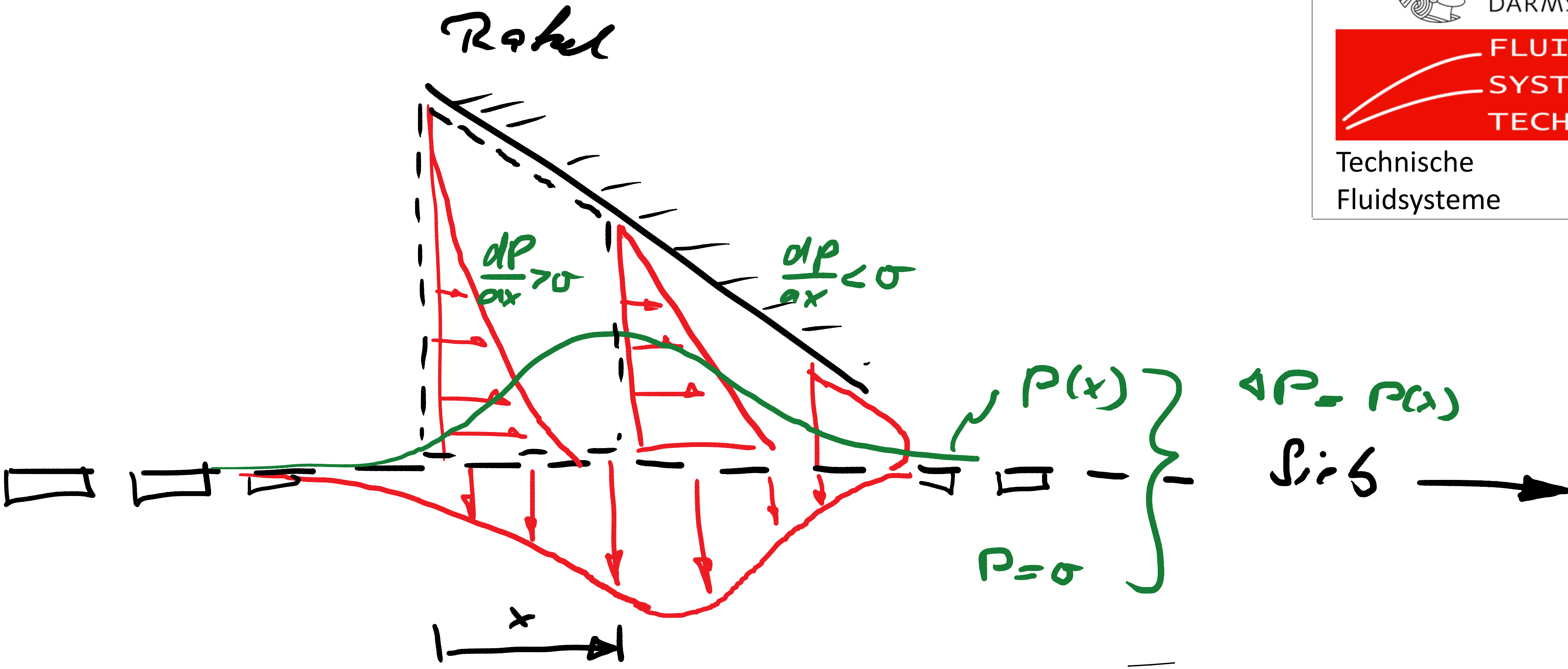
$$\int_0^{h_1} u\,dy \overset{!}{=} \frac{1}{2} u\, h_*$$



$\frac{dp}{dx} > 0$ $\qquad$ $\frac{dp}{dx} = 0$ $\qquad$ $\frac{dp}{dx} < 0$

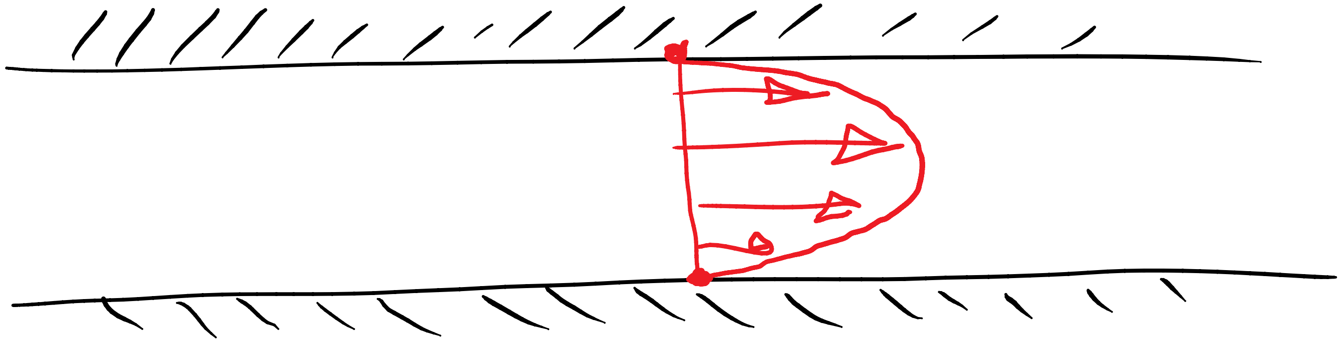
$$\vec{F} = \int -p\vec{n}\, dS$$



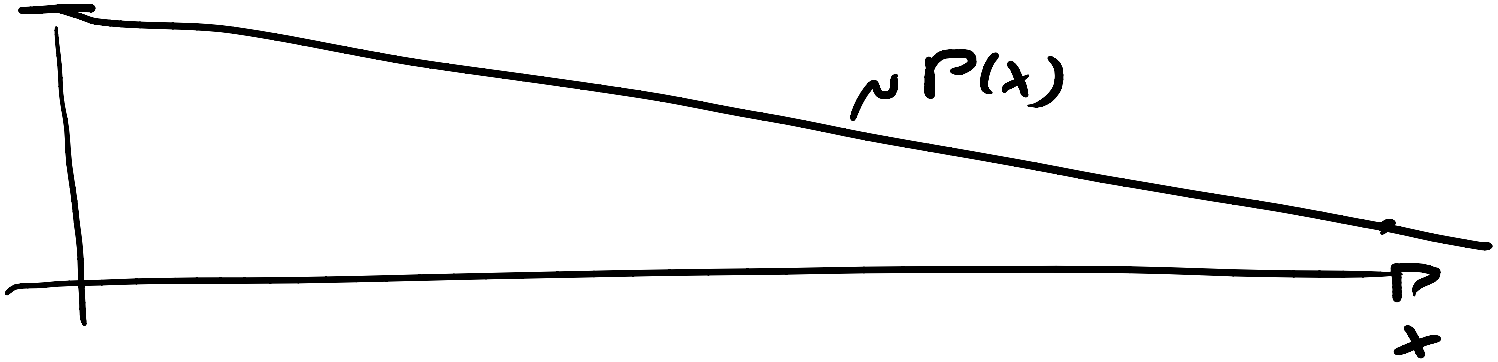


Was fehlt?

- Zusammenhang zwischen Druckänderung (Druckgradient) und Strömung.
- Sofern Druckänderung irreversibel ist (Dissipation), dann spricht man von sog. <u>Widerstandskraft</u>



Druckströmung od. Poisson-Strömung.

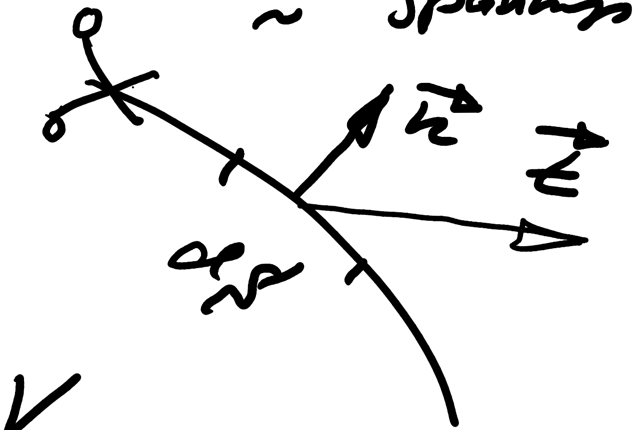


Zugang zu Widerstandsproblemen über den Impulssatz (2. Newtonsches Gesetz)

Die zeitliche Änderung des Impulses eines materiellen Körpers ist gleich der Kraft auf den Körper.

Oberflächenkraft $d\vec{F}_O = \vec{t}\, dS$; $\vec{t}$ Spannungsvektor

$\vec{t} = \vec{n} \cdot \underset{\sim}{T}$ $\quad \underset{\sim}{T}$ Spannungstensor



$$\frac{D}{Dt}\underbrace{\int_{V(t)} \rho \vec{u}\, dV}_{\vec{I}} = \int d\vec{F}_O + \int d\vec{F}_V$$

Volumenkraft $d\vec{F}_V = \vec{f}\, dV$

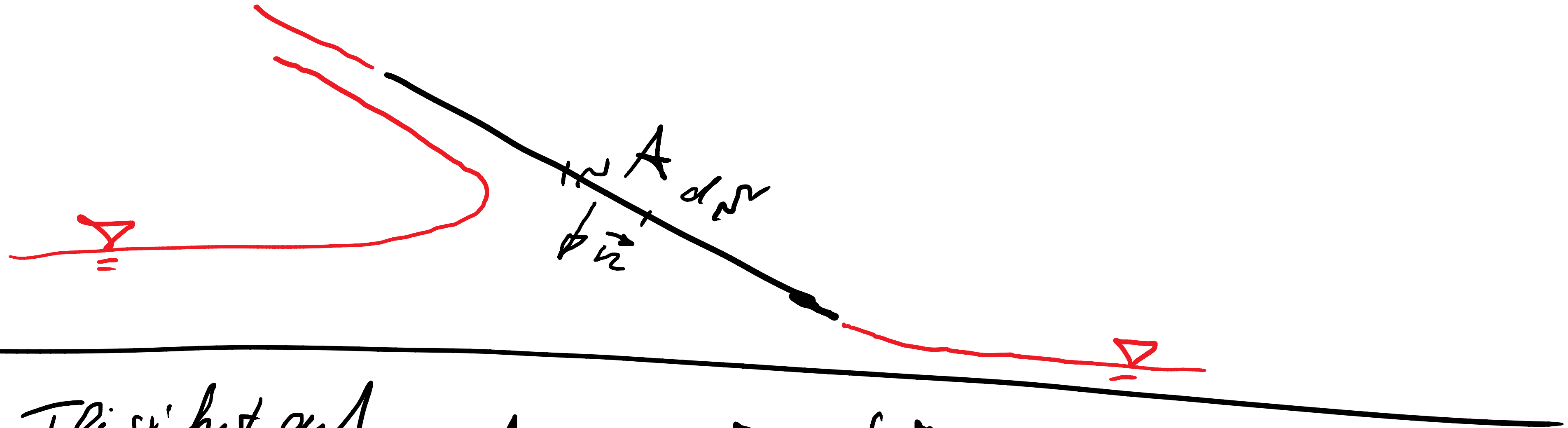
z.B. $\vec{f} = \rho \vec{g}$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho \vec{u}\, dV = \oint_{S} \vec{t}\, dS + \int_{V} \vec{f}\, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V} \rho \vec{u}\, dV + \oint_{S} \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \oint_{S} \vec{t}\, dS + \int_{V} \vec{f}\, dV$$

Für quasistationäre oder im zeitlichen Mittel stationäre Strömung und für vernachlässigbare Volumenkraft $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ \vec{f} = 0 \end{array}\right\}$ $\oint_{S} \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \oint_{S} \vec{t}\, dS$

$Re = \frac{U h^*}{\nu} \gg 1$, dann spielt Reibg kaum Rolle.



Kraft der Flüssigkeit auf die Fläche A

$$\vec{F} = \int_A \vec{t}\, dS = \int_A \vec{n} \cdot \underset{\sim}{T}\, dS = \int_A -p\vec{n}\, dS$$

Spannungstensor

$$\underset{\sim}{T} = -p\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P} \approx -p\underset{\sim}{I}$$

Reibungs-spannungstensor

Abspalten des Kugelspannungstensors d.h.G.

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P} \qquad \vec{t} = \vec{n}\cdot\underset{\sim}{T}$$

Symbolische Schreibweise

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + P_{ij} \qquad t_i = n_j\,\tau_{ij}$$

Kartesische Indexnotation.

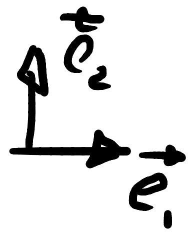
Komponente = Zahlenwert Einheit (Maßzahl)

Basis des Tensors

$$\underset{\sim}{T} = \tau_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1 + \tau_{12}\vec{e}_1\vec{e}_2 + \tau_{13}\vec{e}_1\vec{e}_3 + \tau_{21}\vec{e}_2\vec{e}_1 + \dots \quad \dots \quad \tau_{33}\vec{e}_3\vec{e}_3$$

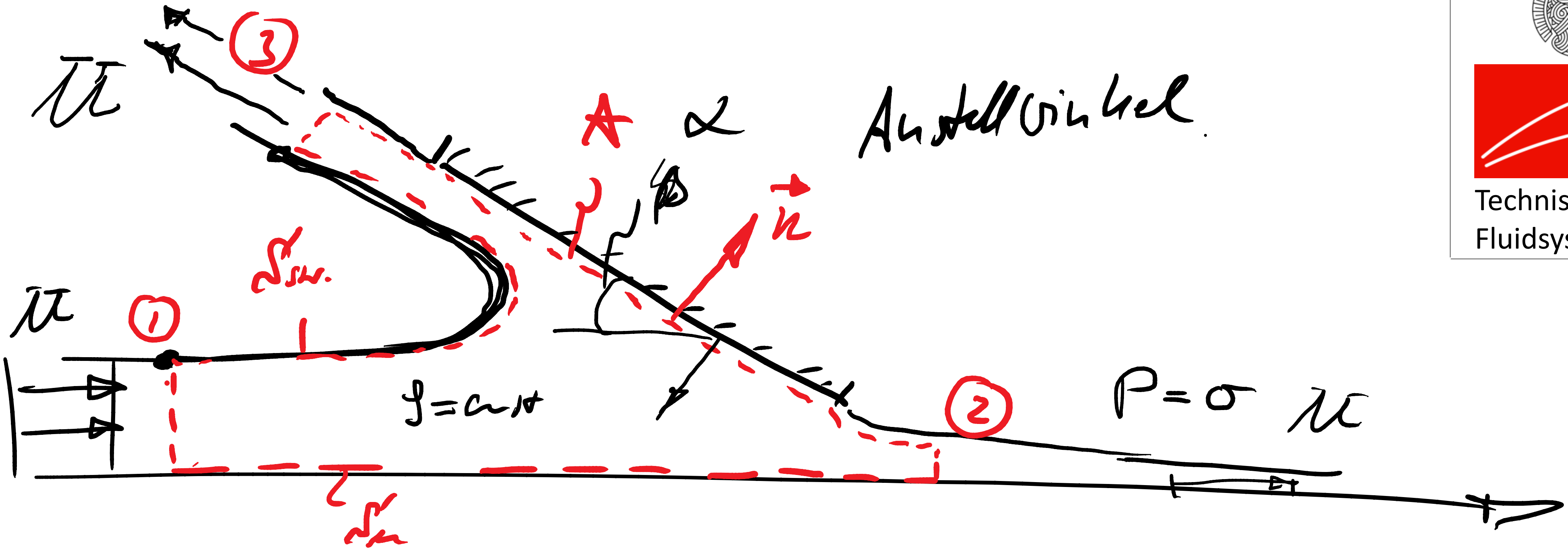
Symbolische Schreibweise

$$\frac{d}{dx_2}\begin{bmatrix} \tau_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \tau_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \tau_{33} \end{bmatrix} = \checkmark$$



$$\vec{x} = z\vec{e}_z + r\vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\varphi} = 0 + \frac{d}{d\varphi}(r\vec{e}_r) = r\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = r\vec{e}_\varphi .$$



$$\oint \rho \vec{u}\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \oint -p\vec{n}\, dS = \underbrace{\int_A \vec{t}\, dS}_{-\vec{F}_{Fl.\to A.} = ?} + \int \sigma \ldots$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + A + S_{Str.} + S_\infty$$

Fazit: Der Impulssatz in integraler Form ist sehr hilfreich, bei der Berechnung von Kräften auf benetzte Wände

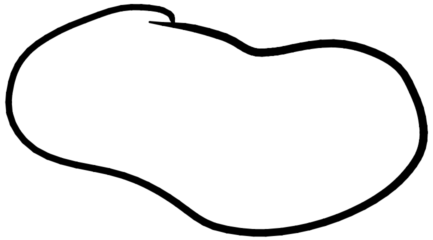
$$\vec F_{Fl\to A} = \int_A \vec t^{\,(-\vec n)}\, dS = \underbrace{-\int_A \vec t^{\,(\vec n)}\, dS}_{\text{Teil des Impulssatzes}}$$

Aktio = Reaktio.

3. Newtonsches Gesetz

Integrale Form

Kont. $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV + \int \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = 0.$



Imp. $\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\, \vec{u}\, dV = \oint_{S} \vec{t}\, dS + \int_{V} \vec{f}\, dV$

$\vec{t} = \vec{n}\cdot\underset{\sim}{T}$

differentielle Form.

$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla\cdot\vec{u} = 0$

Cauchy-Gleichung gilt für jedes Kontinuum!

$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla\cdot\underset{\sim}{T} + \vec{f}.$

Divergenz des Spannungstensors.

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P}$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underset{\sim}{P} + \vec{f}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Spezialfall} \quad \underset{\sim}{P} \ll -p\,\underset{\sim}{I} \quad \text{oder} \\ \qquad \text{rot}\,\vec{u} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \vec{f}$$

Euler-Gleichung.