TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \oint_S \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = 0.$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \mathrm{div}\, \vec{u} = 0.$$

$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F}. \iff \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\vec{u}\, dV + \oint_S \rho\vec{u}\; \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS =$$

$$= \underbrace{\oint_S \vec{t}\, dS}_{\text{Oberfläch.}} + \underbrace{\int_V \rho\vec{k}\, dV}_{\text{Volumenkraft.}}$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \underset{\sim}{T}$$

Impulsbilanz in differentieller Form.

§

$$\rho \mathrel{\hat{=}} \frac{\text{Zahl der Fahrzeuge.}}{\text{Straßenlänge.}}$$

$\equiv$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2010/11

Technische Fluidsysteme

Vorlesung 4

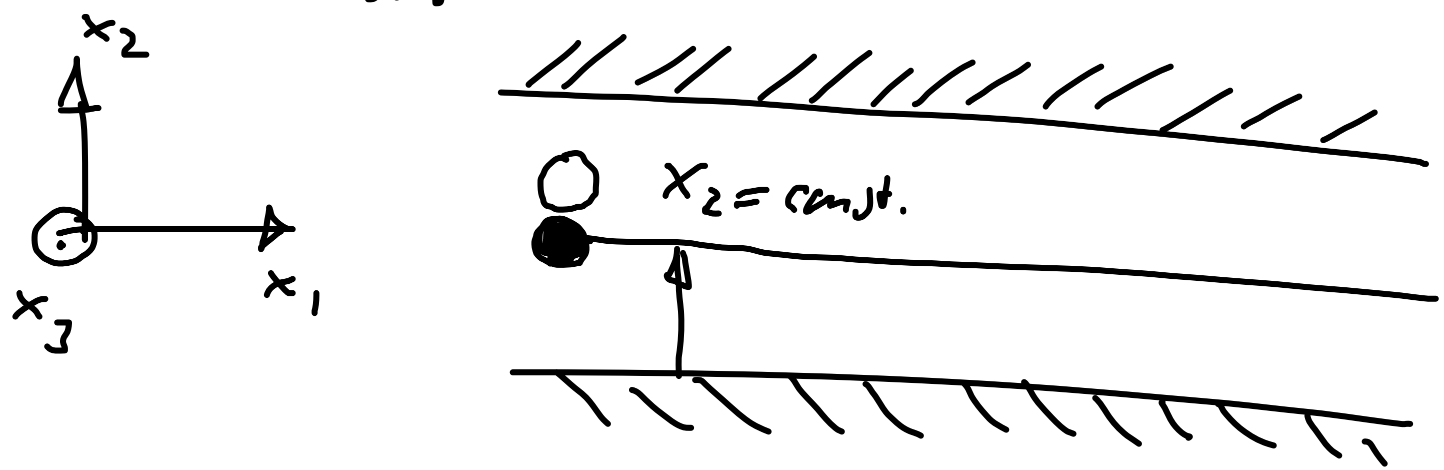
Lösen der Impulsbilanz für einfache ebene Schichtenströmungen (stationär)

$u_3 \equiv 0$

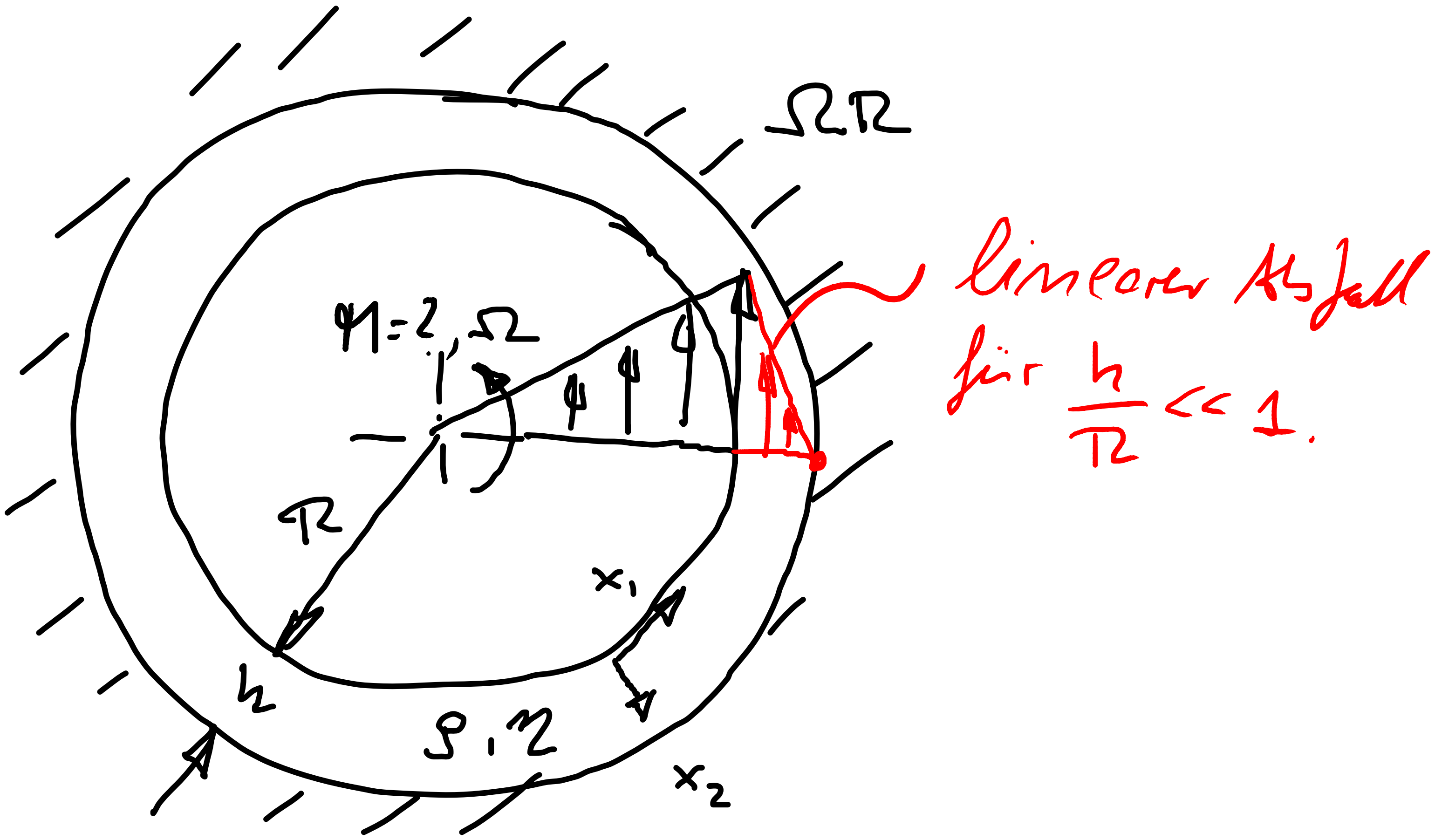
$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$

$\frac{D}{Dt} \neq 0$

☺ kinematisch einfach.



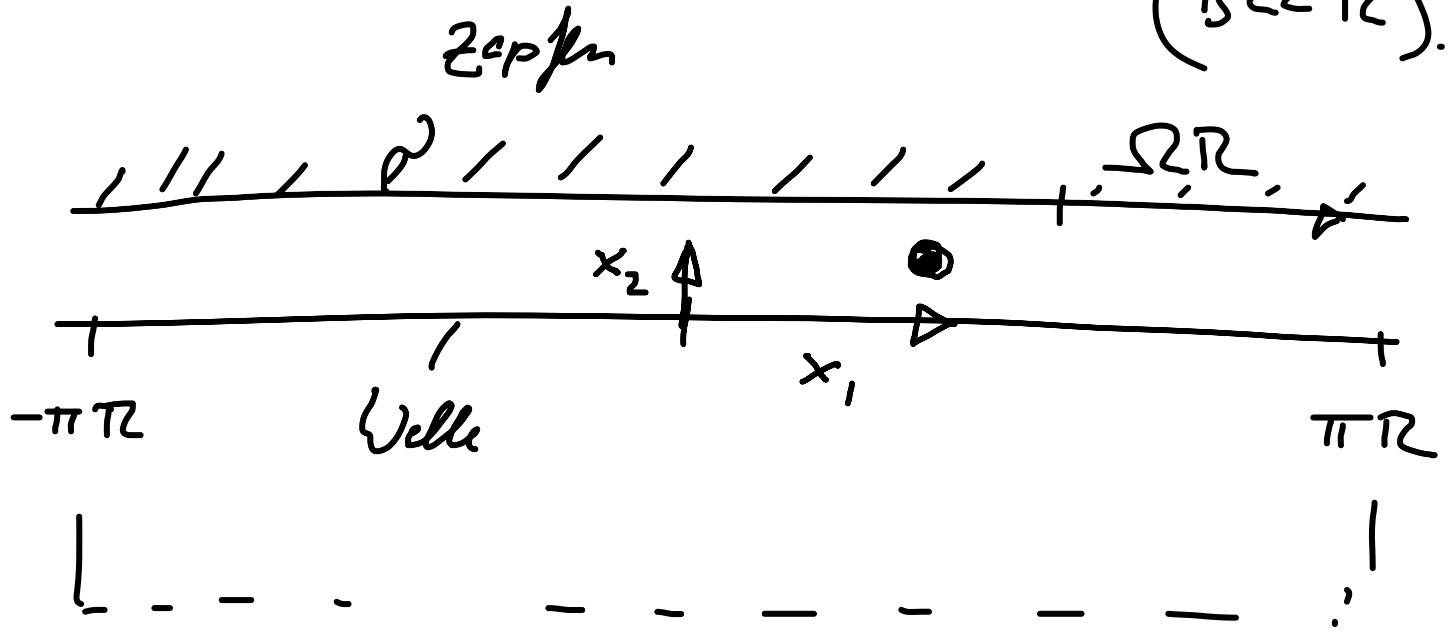
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4



η dynamische Viskosität der Flüssigkeit im Spalt.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

ebene Strömung, wenn die Zapfenlänge $B \gg R$.
$(B \ll R)$.



periodische Randbedingung.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \underset{\sim}{T}.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

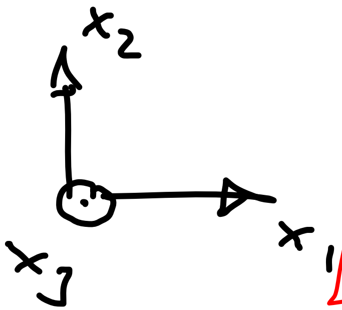
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

allgemein Komp.

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 = \sum_i u_i \cancel{\vec{e}_i} \quad \Downarrow \quad u_i$$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \sum_i x_i \cancel{\vec{e}_i} \quad x_i$$

$$\underset{\sim}{T} = \tau_{11} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \tau_{12} \vec{e}_1 \vec{e}_2 + \tau_{13} \vec{e}_1 \vec{e}_3 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \tau_{33} \vec{e}_3 \vec{e}_3 = \sum_{i,j} \tau_{ij} \cancel{\vec{e}_i \vec{e}_j} \quad \tau_{ij}$$



kartesisches Koordinatensyst.

~~ein~~ Orthonormal $\vec{e}_i \neq f_i(x_j)$

Zylinder $\vec{e}_r = f_r(\varphi)$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

Skalarprodukt

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i,j} x_i \vec{e}_i \cdot y_j \vec{e}_j = \sum_{i,j} x_i y_j \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

Regel: Immer dann, wenn Indizes doppelt vorkommen; ~~least~~ über die Indize wird summiert.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_j \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = x_i y_j \delta_{ij} = x_i y_i$$

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$	$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$

$\hat{=} \ \underset{\sim}{I} \ \hat{=} \ \delta_{ij}$

$\hat{=}$ Einheitstensor

Kronecker Symbol

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \underset{\sim}{T}$$

Symbolische Schreibweise.

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho k_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}$$

Indexnotation.

$i = 1$

$$\rho \frac{Du_1}{Dt} = \rho k_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \tau_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \tau_{12}$$

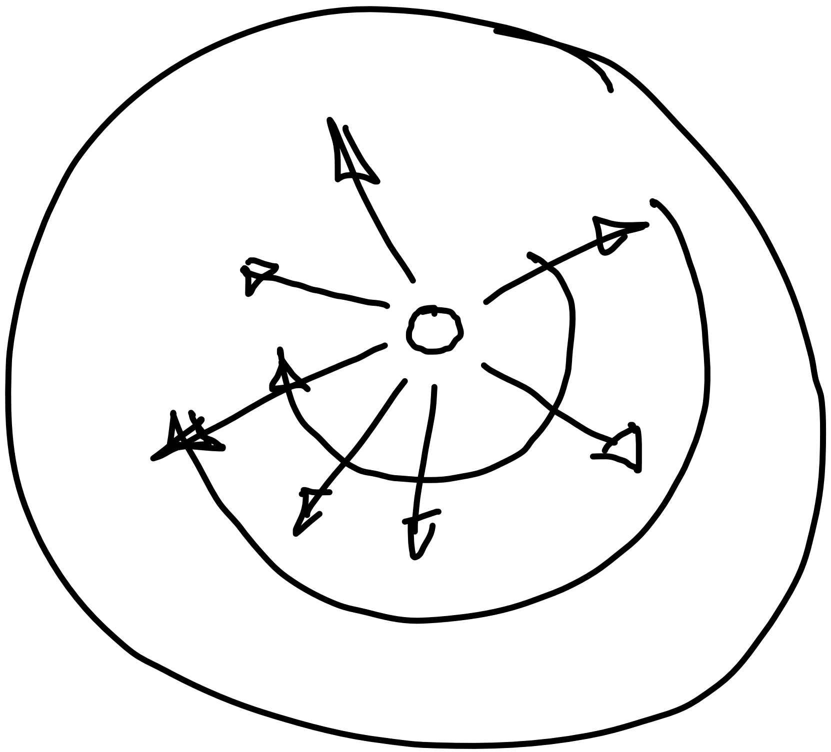
$i = 2$

$$\rho \frac{Du_2}{Dt} = \rho k_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \tau_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2} \tau_{22}$$

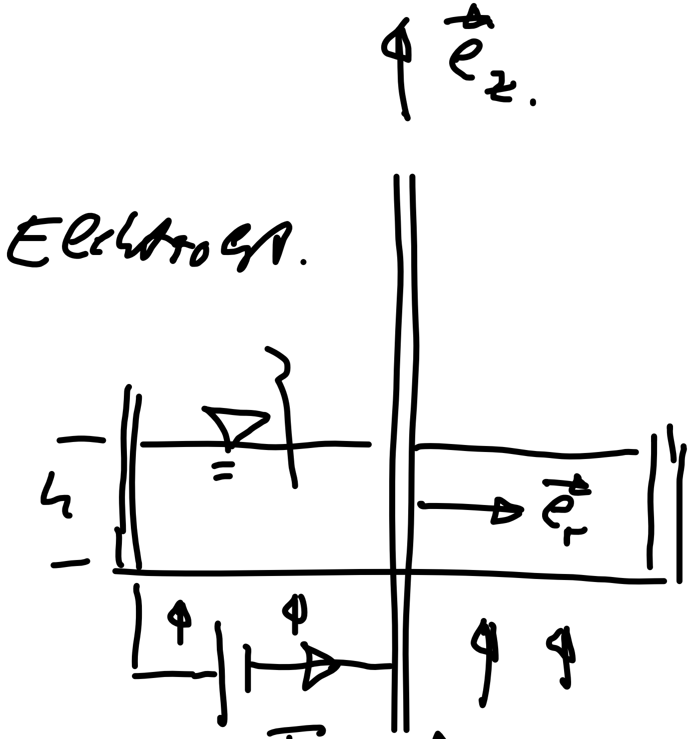
$i = 3$ ist für das ebene Problem nicht relevant!

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

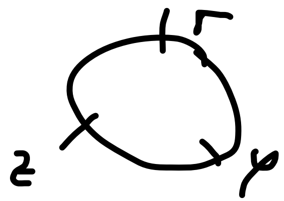
Zur Volumenkraft ϱk_i



Elektrolyt.



$\vec{B} = B\,\vec{e}_z$



$$\vec{i} = \frac{I}{2\pi r h}\,\vec{e}_r$$

Lorentzkraft

$$\varrho\vec{k} = \vec{i} \times \vec{B}$$

$$= \frac{I}{2\pi r h}\,\vec{e}_r \times B\,\vec{e}_z = -\frac{IB}{2\pi r L}\,\vec{e}_\varphi$$

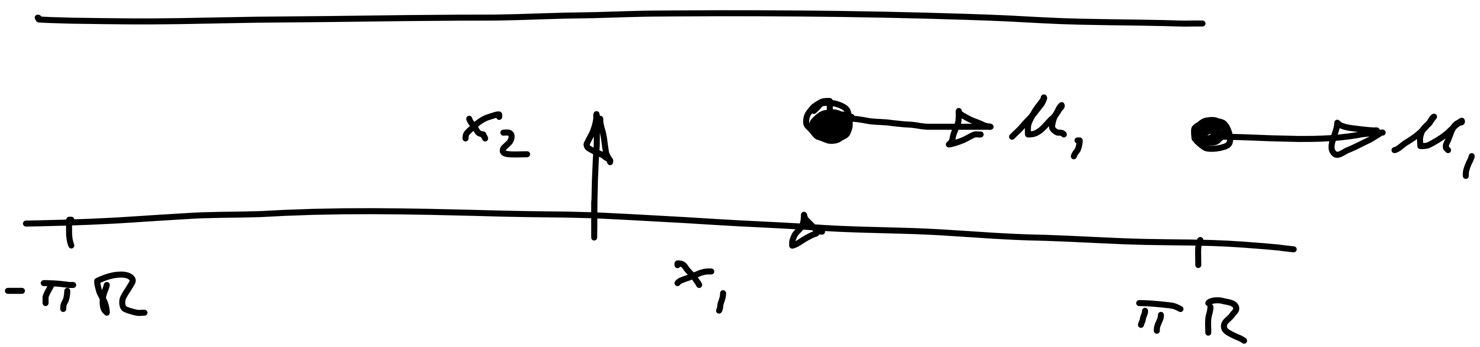
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

$\varrho k_i \equiv 0$ keine Volumenkraft.



$u_2 \equiv 0$, da Schichtenstr..

$\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv 0$

kinematische Vereinfachg bei einer Schichtenstr.

$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ stationäre Strö.

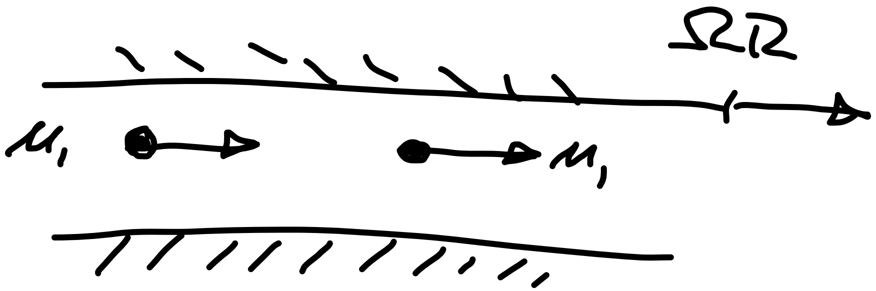
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

$$\underbrace{\rho \frac{D u_1}{D t}}_{\equiv \sigma.} = \frac{\partial}{\partial x_1} \tau_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \tau_{21}$$



$$\sigma = \frac{\partial}{\partial x_1} \tau_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2} \tau_{21} .$$

$$\tau_{ij} = \underbrace{-p\, \delta_{ij}}_{\text{Hydrost. Druck}} + \underbrace{P_{ij}}_{\text{Reibungsspannung.}}$$

Abspalten des hydrostatischen Druckes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

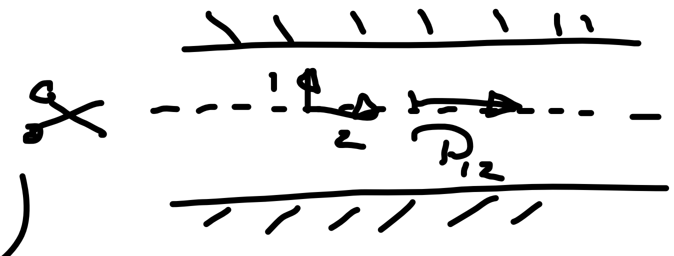
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P}$$

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + P_{ij}$$

Materialgesetz für den Reibungsspannungstensor.

$$P_{12} = fu(\text{Deformationsgeschw.})$$



$$P_{12} = 2\eta\, e_{12} \qquad e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\boxed{P_{ij} = 2\eta\, e_{ij}} \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Newtonsches Material.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \underbrace{2\eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}}_{\equiv 0} + \eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \underbrace{2\eta \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}}_{\equiv 0}.$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x_1} = \eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}}$$

lineare Gleichung.
einfach zu lösen.

1. Lösung für die einfache Schleppströmung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

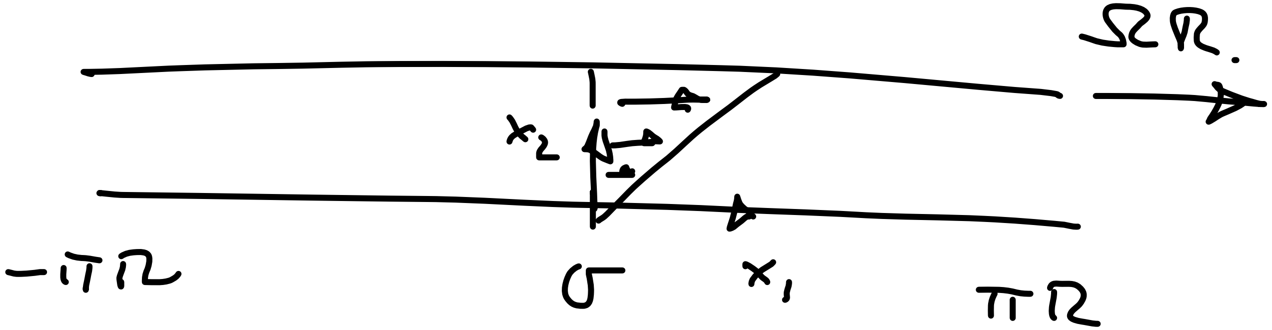
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

Randbedingung $\quad u_1(0)=0 \rightsquigarrow C_2=0$

$$u_1(h)=\Omega R \rightsquigarrow C_1=\Omega \frac{R}{h}.$$



$$\frac{\partial p}{\partial x_1}=0$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}. \\ C_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ C_1 x_2 + C_2 &= u_1 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{u_1(x_2)=\Omega R \frac{x_2}{h}}}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

Reibung: Reibmoment pro Tiefeneinheit

$$M_z = \left| \int_{\text{Zapfen}} \vec{x} \times \vec{t}\, dS \right| \cdot \vec{e}_z$$

$$= \int_0^{2\pi} \underline{R}\,\vec{e}_r \times \underset{\sim}{T} \cdot \vec{e}_r\, \underline{R}\, d\varphi$$

$$= 2\pi R^2 \underset{\substack{\| \quad \| \\ 2 \quad 1}}{\tau_{r\varphi}} = 2\pi R^2 \tau_{12}$$

$$= 2\pi R^2 \eta \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{2\pi R^3 \eta\, \Omega}{h}$$

$$P_V = \vec{M} \cdot \vec{\Omega} = \frac{2\pi R^3 \eta\, \Omega^2}{h}$$ Verlustleistung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

Cauchy-Gl. + Newtonsches Material = Navier Stokessche Gleich.

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho k_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij} + 2\eta\, e_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$\eta = const.$

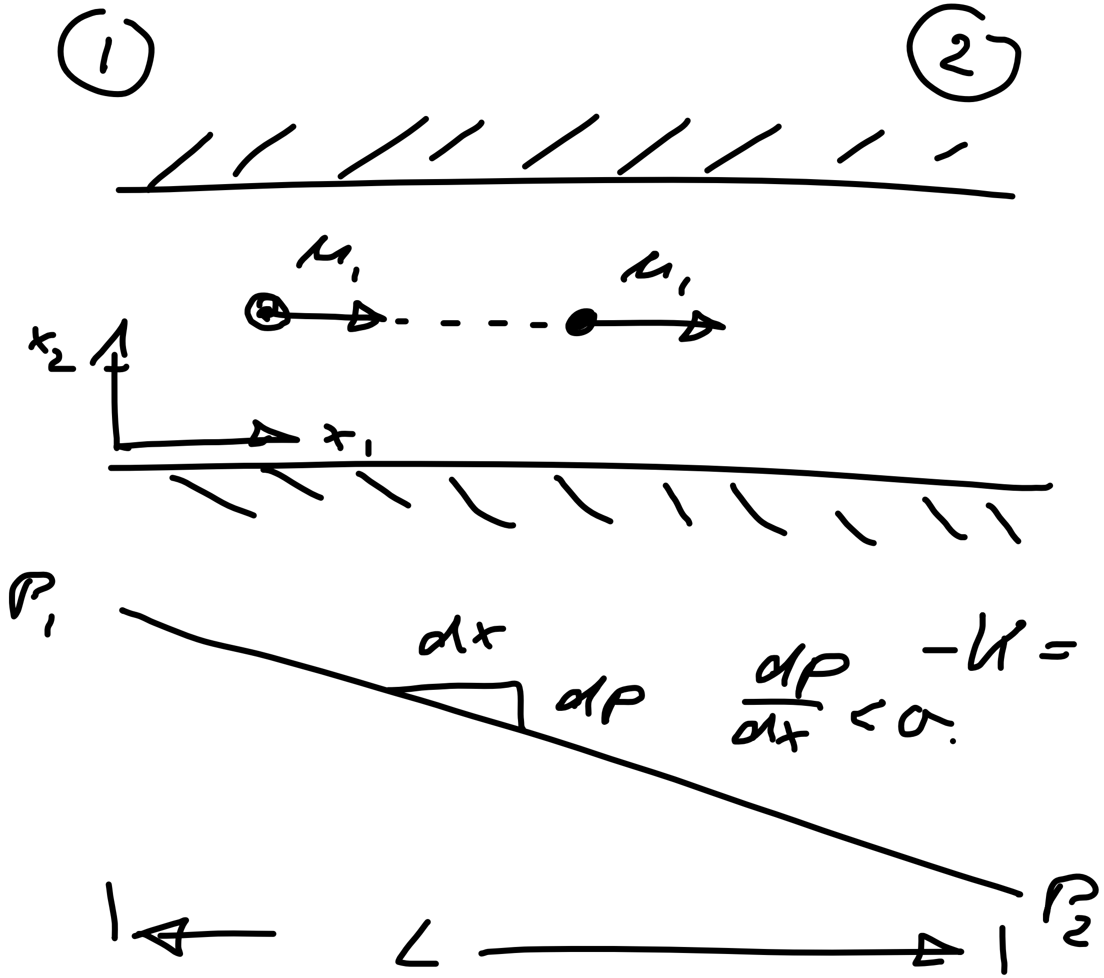
Für $\eta = const.$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4



$$\frac{dp}{dx} < 0.$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p_1 - p_2}{L}$$

2D $u_3 \equiv 0.$

$$\rho \frac{Du_1}{Dt} \equiv 0.$$

$$\rho \bar{k}_1 \equiv 0.$$

$$-K = \frac{\partial p}{\partial x_1} = \eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

1. Integral:

$$C_1 - \frac{K}{\eta} x_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

2. Int.

$$C_1 x_2 - \frac{K}{2\eta} x_2^2 + C_2 = u_1$$

$$K := -\frac{dp}{dx_1}$$

R.B. $u_1(0) = 0$

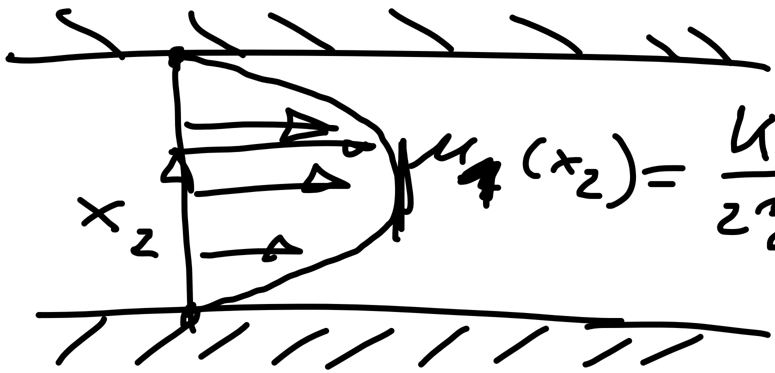
$\hookrightarrow C_2 = 0.$

$$u_1(h) = 0.$$

$$C_1 = \frac{K}{2\eta} h.$$

$$u_1 = \frac{K h^2}{2\eta}\left(\frac{x_2}{h} - \left(\frac{x_2}{h}\right)^2\right) = \frac{K h^2}{2\eta}\frac{x_2}{h}\left(1 - \frac{x_2}{h}\right)$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

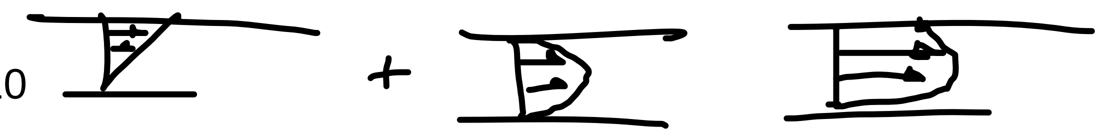


$$u_1(x_2) = \frac{K h^2}{2\eta}\,\frac{x_2}{h}\left(1-\frac{x_2}{h}\right).$$

$$u_{max} = u_1\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{K h^2}{8\eta}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \eta\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$$ <u>lineare Gleichung</u>.

$\leadsto$ Superposition ist möglich.



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2010/11

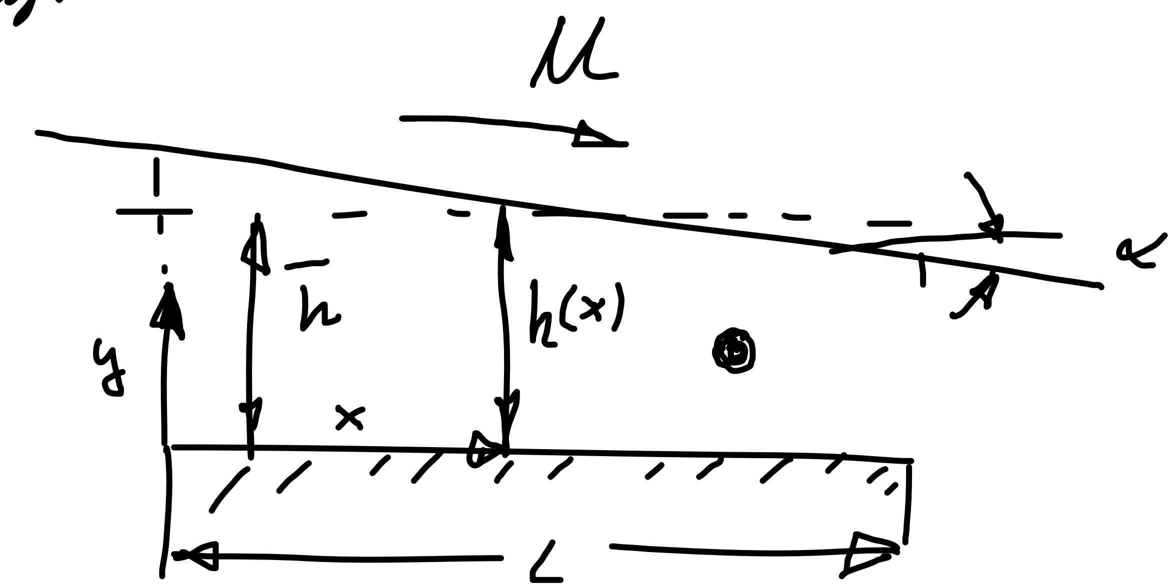
Technische Fluidsysteme

Vorlesung 4

Hydrodynamische Schmierung

$\bar{h}$ ist bei einem Zapfenlager = reduziertes Spiel.

Keillager.



$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

gilt für $\alpha \, Re \ll 1$.

Reynoldszahl $Re = \frac{U \bar{h} \rho}{\eta}$

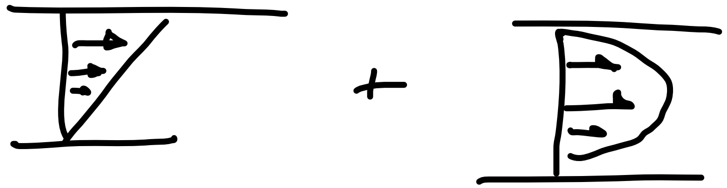
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4

Wichtig $\qquad \alpha^* Re \ll 1$

Re kann groß sein!

turbulente Strömungen sind möglich!

$$u(x) = U \frac{y}{h(x)} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{h^2(x)}{2\eta}\left(1-\frac{y}{h(x)}\right)\frac{y}{h(x)}$$



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Technische Fluidsysteme
Vorlesung 4