Schmidtzahl $Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\eta^2/\rho}{kT/a} \gg 1$

$$D = \text{const}\,\frac{kT}{\eta a}$$

Pecletzahl für die Diffusion $Pe_D = \frac{UL}{D} = \frac{\text{diffusion Zeit}}{\text{konv. Zeit}}$

$$= \frac{UL}{\nu}\,\frac{\nu}{D}$$

$$= \underset{\ll 1}{Re}\;\underset{\gg 1}{Sc}$$

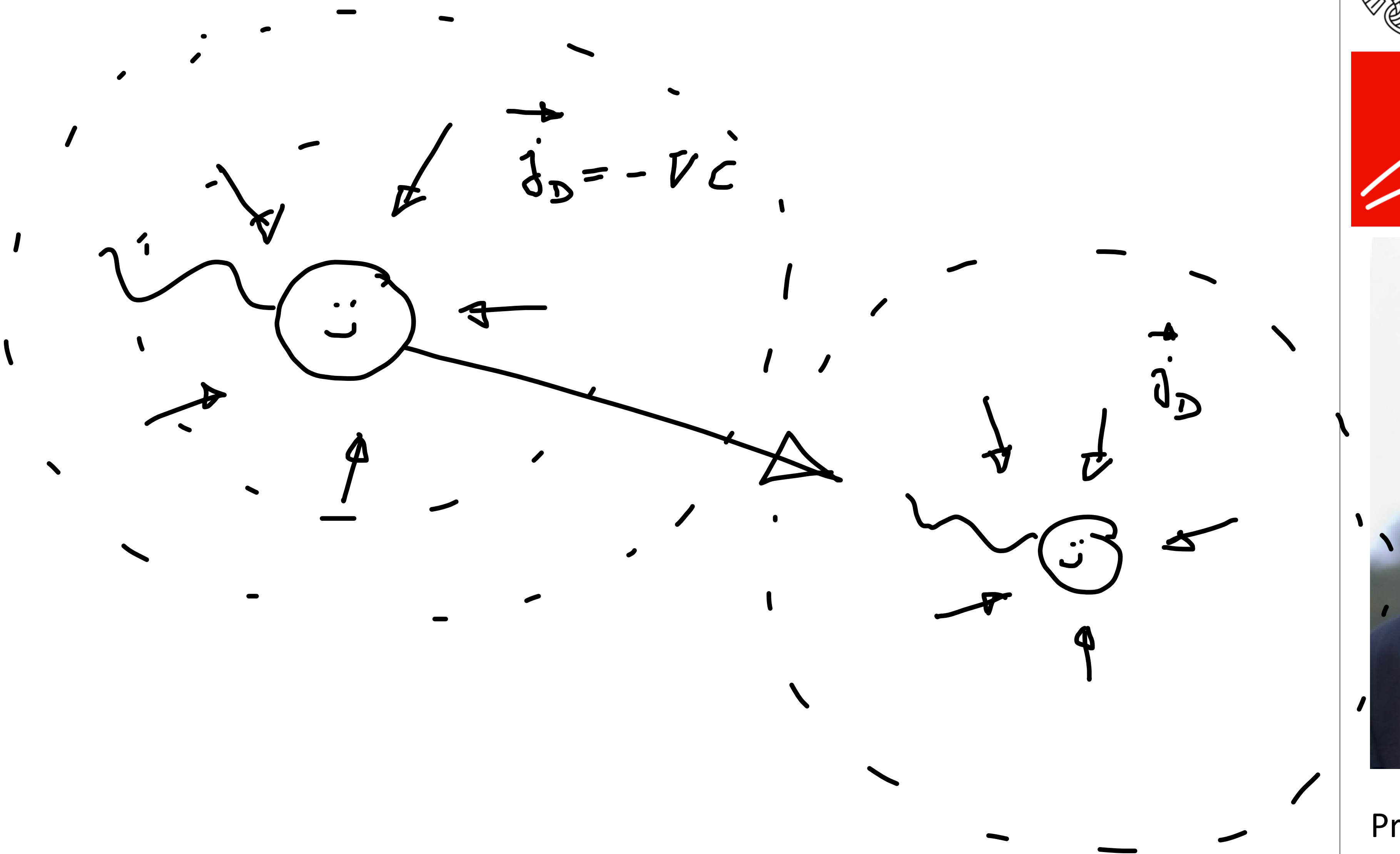
$$Pe \gg 1$$

⇝ Für Mikroorganismen sind diffusive Prozesse viel schneller als konv. Prozesse.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

Warum schwimmt der Organismus?



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

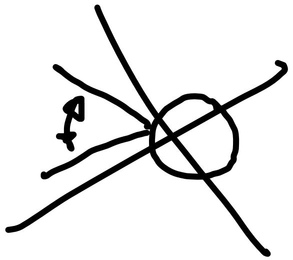
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Heute: Antrieb und Widerstand.

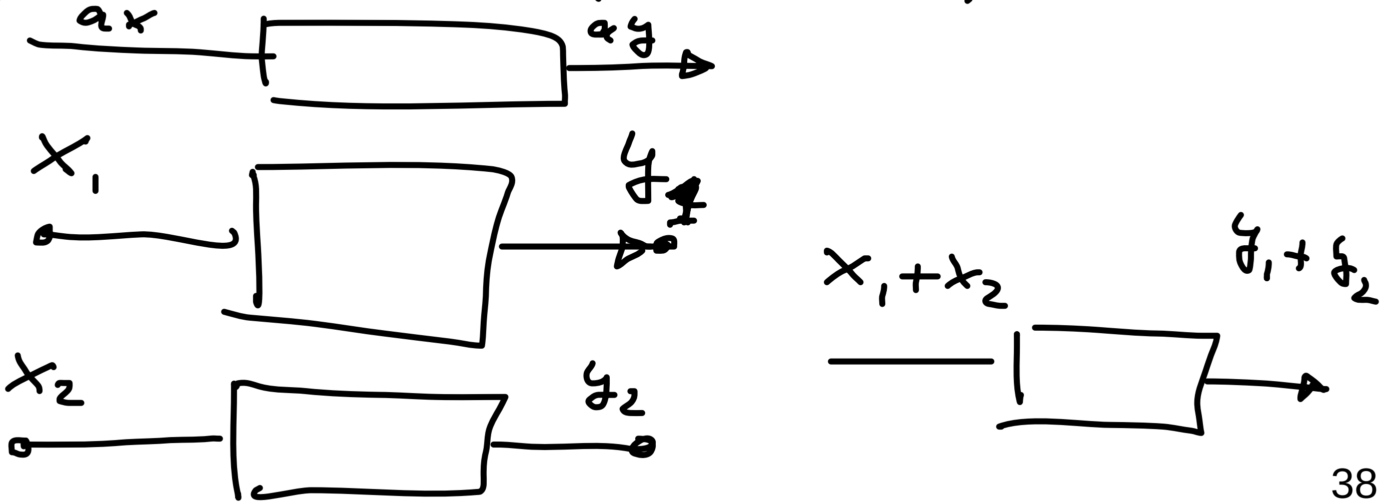
$Re \ll 1$

1. Zeit spielt keine Rolle ⇝



2. lineare Bewegungsgleichung. ⇝ Superposition ist möglich.

Widerstand und Antrieb können getrennt / voneinander behandelt werden.



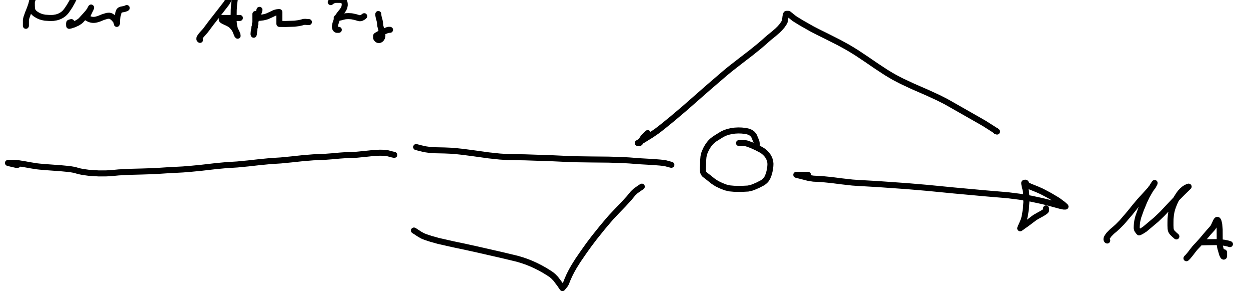
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

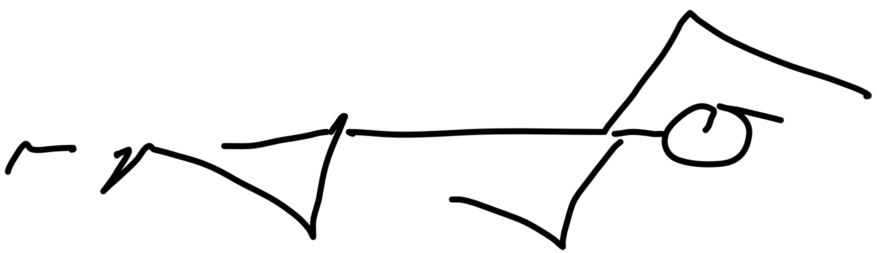
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

1. Nur Beinschlag $\boxed{Re \gg 1}$

2 Nur Anzug



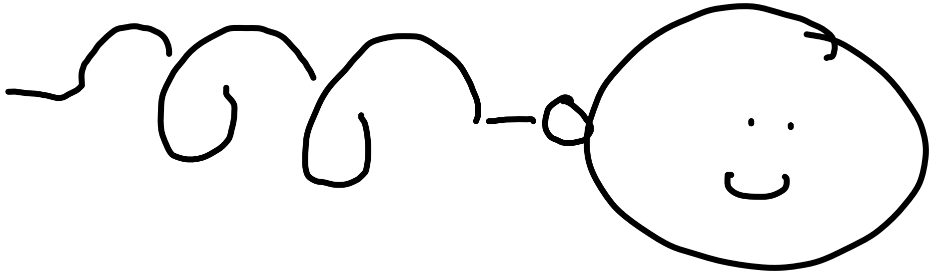
1+2

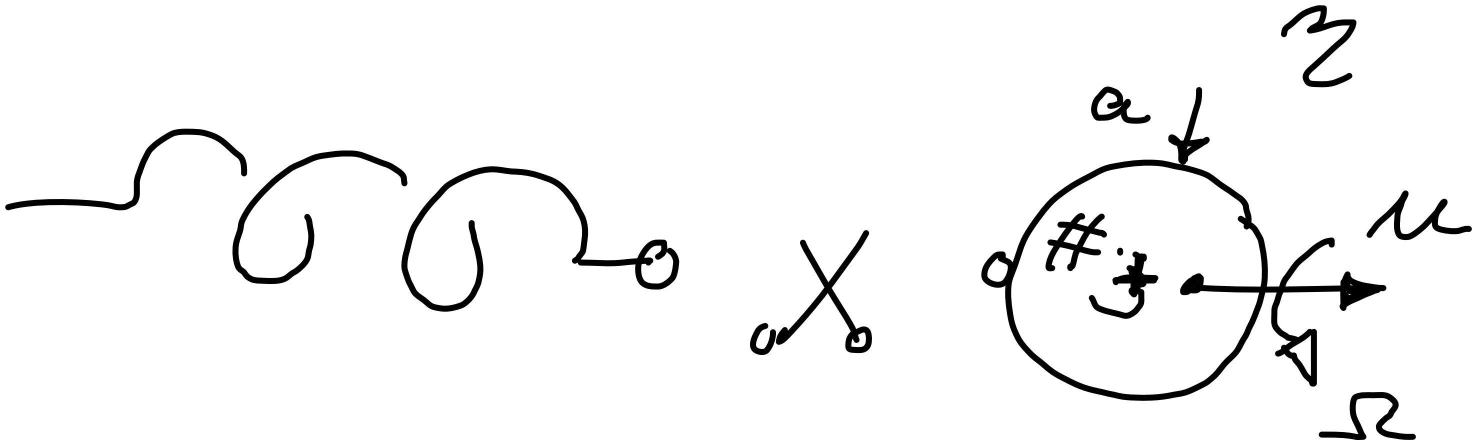


$$u \neq u_A + u_B$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

Mikroorganismus $Re \ll 1$.





Antrieb

Widerstand.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

$$\left.\begin{array}{ll} U & \text{Translationsgeschwindigkeit} \\ \Omega & \text{Kreisgeschwindigkeit} \end{array}\right\} \text{sind gegeben}$$

$F_0 = F_0(\eta, a, U, \Omega = 0)$ Widerstandskraft.

$M_0 = M_0(\eta, a, \Omega, U = 0)$ Widerstandsmoment.

Dimensionsanalyse.

	F_0	η	a	U
F	1	1		
L		-2	1	1
T		1		-1

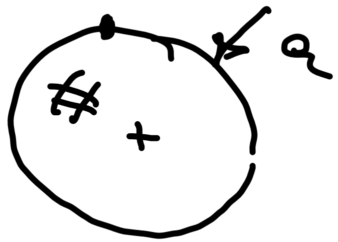
$F_0 = \text{const}\ \eta\, U\, a$

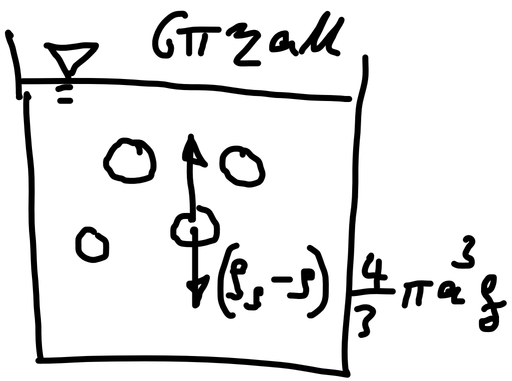
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

	M_0	η	Ω	a
F	1	1		
L	1	−2		1
T	0	1	−1	

$$\Leftrightarrow M_0 = \text{const}\, \eta\, \Omega\, a^3$$

Spezialfall Kugel



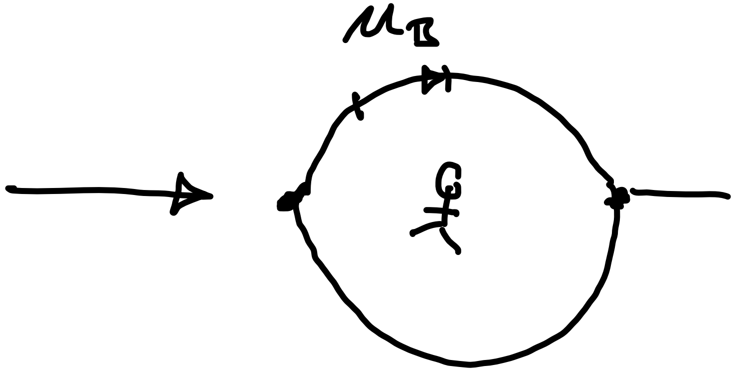


$$F_0 = 6\pi\, \eta\, U a \leadsto \text{Stokes'sche Widerstandsgesetz.}$$

$$M_0 = 8\pi\, \eta\, \Omega\, a^3$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3



Hinweis:

Bei Blasenströmung gilt die Haftbedingung nicht wie sonst üblich.

$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\pi\eta a & 0 \\ 0 & 8\pi\eta a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix}$$

$$= \underline{I} \begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix}$$

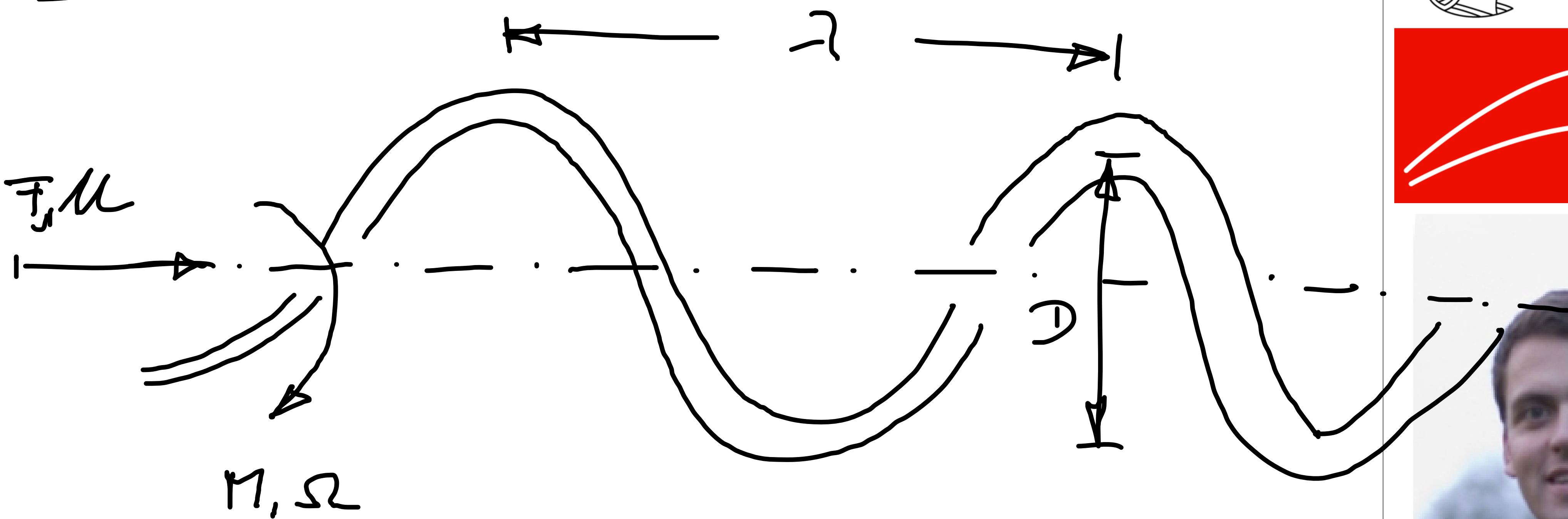
$\underline{I}$ Widerstandsmatrix.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

Antrieb: Spirale für $Re \ll 1$.



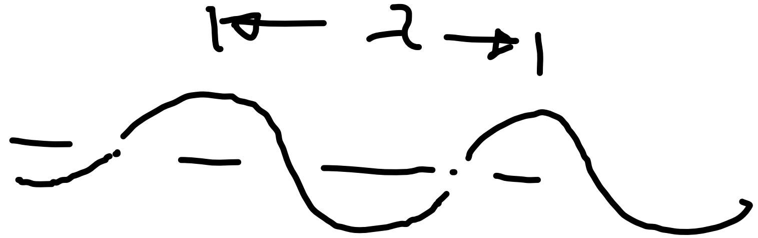
$$F = A u + B \Omega$$

$$M = C u + D \Omega$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Dimensionen der Koeffizient A, B, C, D

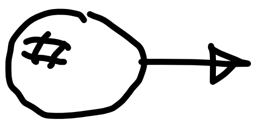


$A \sim \eta \lambda$

$D \sim \eta \lambda^3$

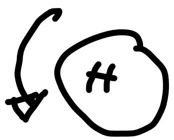
$C, B \sim \eta \lambda^2$

Skalierungsgesetze folgen unmittelbar aus der Linearität und einer Dimensionsanalyse

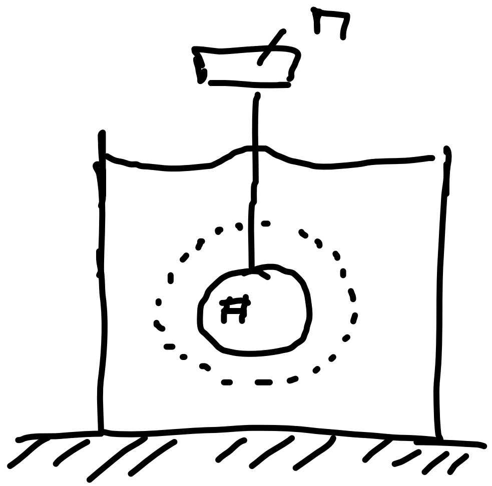


$F = 6\pi a \eta U$

$a = \lambda$, $\eta = \eta$



$M = 8\pi \eta \Omega a^3$.

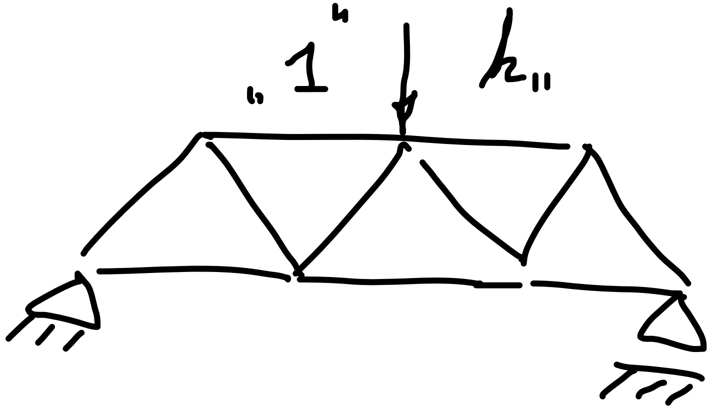


Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$\underline{P} \hat{=}$ Steifigkeitsmatrix $k_{ij} = k_{ji}$



Steifigkeitsmatrizen sind symmetrisch

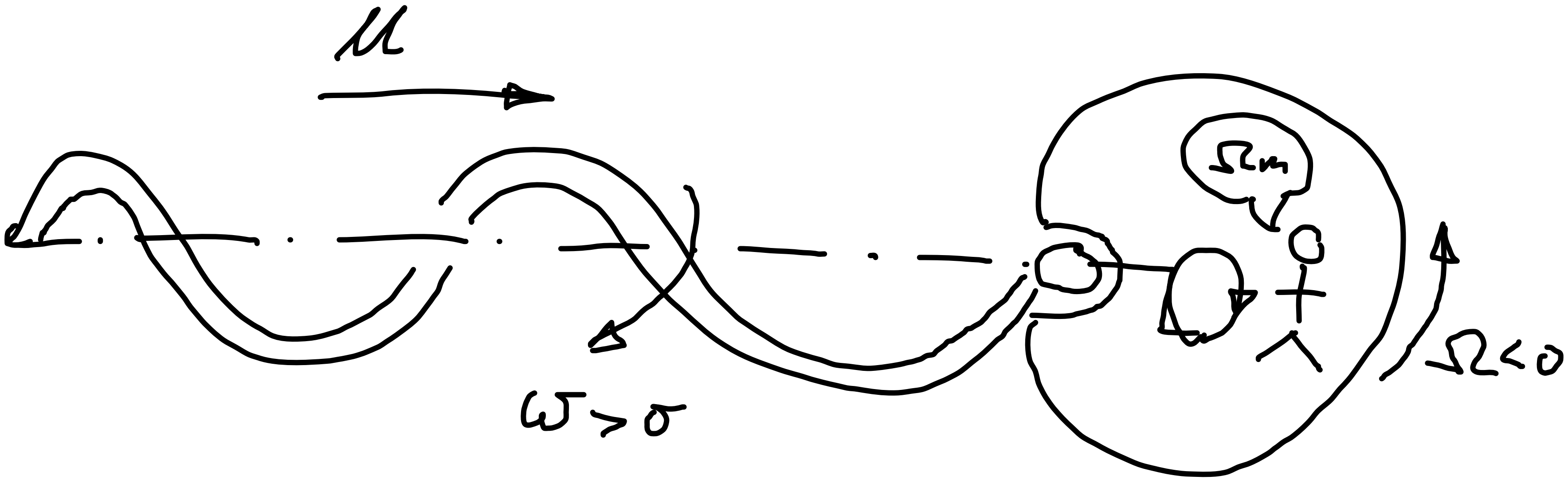
$\boxed{\text{Reziprozitätsbeziehung.}}$ <u>Maxwell</u>

Die Antriebsmatrix muß auch symmetrisch sein

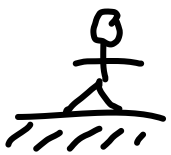
$B \overset{!}{=} C \qquad P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}.$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

Zusammenbau von Antrieb und Widerstand



$$\Omega_m := \omega - \Omega > 0.$$



Antrieb

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$$

Widerstand

$$P_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$\left.\begin{aligned} F_0 + F &= 0 \\ M_0 + M &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Gleichgewicht gilt zu jedem Zeitpunkt und bei „Beschleunigung".}$$

$$A_0 \mathcal{U} = -A\mathcal{U} - B\omega,$$

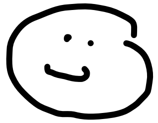
$$D_0 \Omega = \underbrace{-B\mathcal{U} - D\omega}_{M}.$$

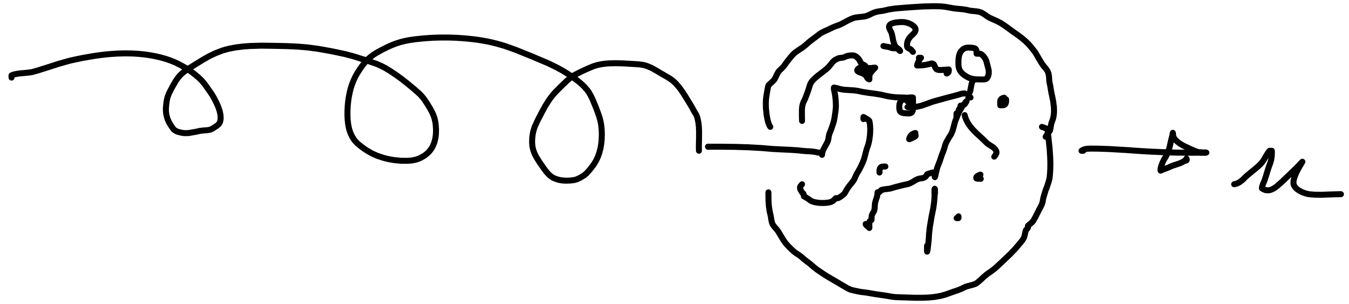
mit $\Omega_m := \omega - \Omega > 0$

$$\rightsquigarrow \quad \mathcal{U} = -\frac{B D_0}{(A_0 + A)(D_0 + D) - B^2}\,\Omega_m$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

$U \sim \Omega m$





Antriebsmoment

$$M = \frac{B^2 - D(A_0 + A)}{B} U$$

Antriebsleistung $\Omega_m M$

Nutzleistung Widerstandskraft * Geschwindigkeit $= F_0 U$

$= A_0 U^2$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

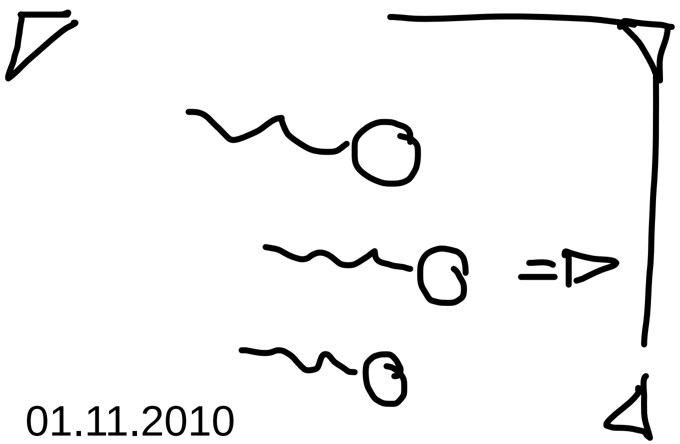
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

Propulsion wird der Froudesche Wirkungsgrad (Propulsion Efficiency)

$$\eta_F := \frac{u F_0}{\Omega_m M}$$

$$\eta_F = \frac{A_0 D_0 B^2}{\left[(A_0 + A) D - B^2\right]\left[(A_0 + A)(D_0 + D) - B^2\right]}$$



Zwei Näherungen

$B^2 \ll AD$

$\frac{D_0}{D_0 + D} \sim 1$

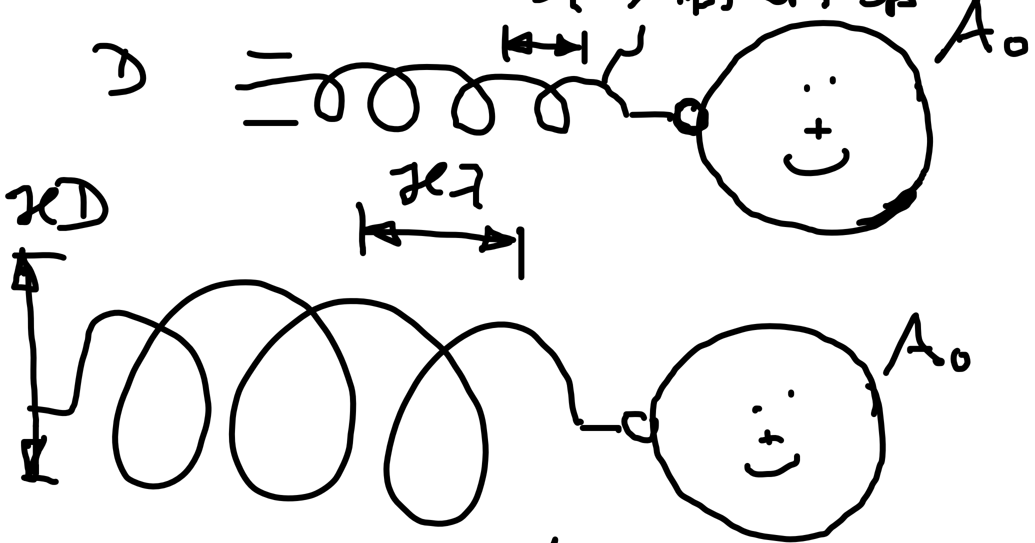
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

$$\eta_F \approx \frac{A_0 B^2}{(A_0+A)^2 D}$$

$$\mu \approx -\frac{B}{A_0+A}\,\Omega m.$$

Optimum des Wirkungsgrads ?

Prototyp → A_p, B_p, D_p ✓



Großausführung

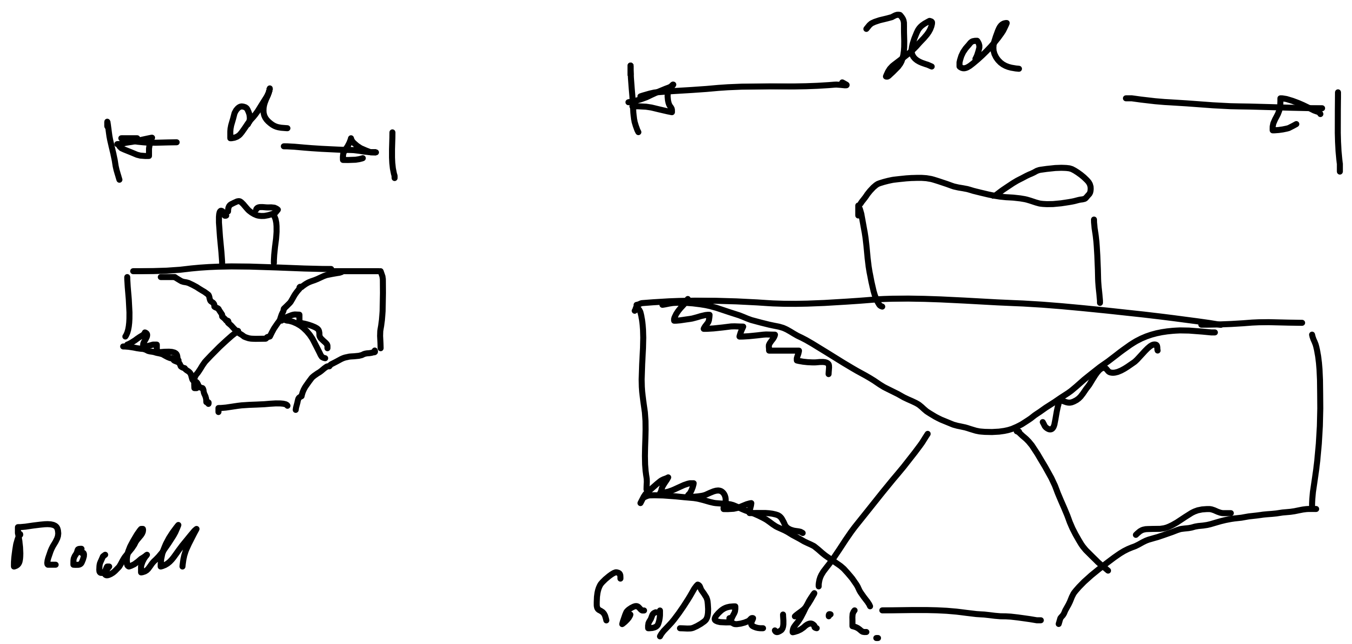
$$\kappa = \frac{\text{typische Länge Großausf.}}{\text{typische Länge Prototyp}}$$

geometrischer Skalierungsfaktor.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3



Präzisionsmaschine

$$\eta_P\left(\varphi, Re_P, \left(\frac{k}{d}\right)_P, \ldots\right) \neq \eta\left(\varphi, Re, \left(\frac{k}{d}\right)_G, \ldots\right)$$

Aufwertung.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Prototyp ist vermessen

A_P, D_P, B_P sind bekannt.

$$A_P \sim \eta \lambda \qquad A \sim \eta(\lambda \kappa) = \kappa A_P$$

$$D_P \sim \eta \lambda^3 \qquad D \sim \eta(\lambda \kappa)^3 = \kappa^3 D_P$$

$$B_P \sim \eta \lambda^2 \qquad B = \kappa^2 D_P.$$

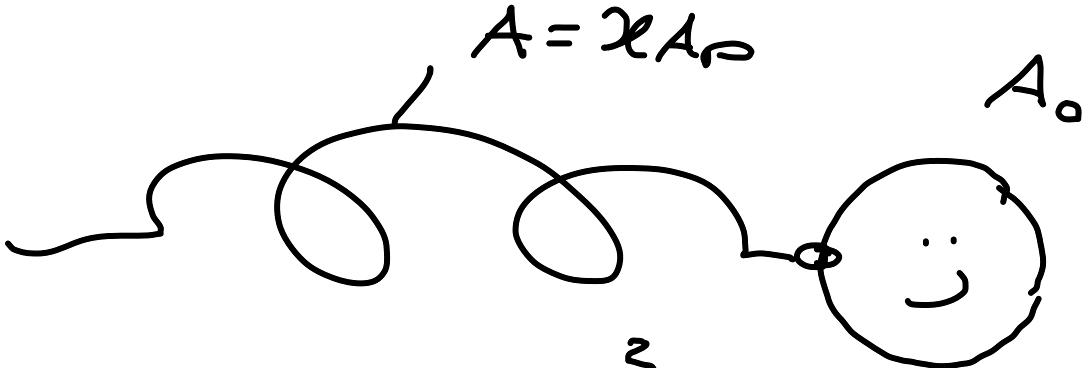
$$\eta_T = \frac{A_0 B^2}{(A_0 + A)^2 D} = \frac{A_0 B_P^2 \kappa^{\cancel{4}}}{D_P \cancel{\kappa^3} (A_0 + \kappa A_P)^2}$$

Optimaler Skalierungsfaktor.

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

$$\left.\frac{d\eta_F}{d\kappa}\right|_{\kappa_{opt}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow \quad \kappa_{opt} = \frac{A_0}{A_p}$$

$A = A_0$ im Optimum.



$$\eta_{F\,opt} = \frac{B_p^2}{4 A_p D_p}$$

keine Funktion der Gestalt des Widerstandskörpers!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

- Optimaler Wirkungsgrad ist allein durch die Gestalt der Antriebes bestimmt ?

- Im Optimum ist $A = A_0$

- Die Form (A_0, D_0) spielt keine Rolle ?

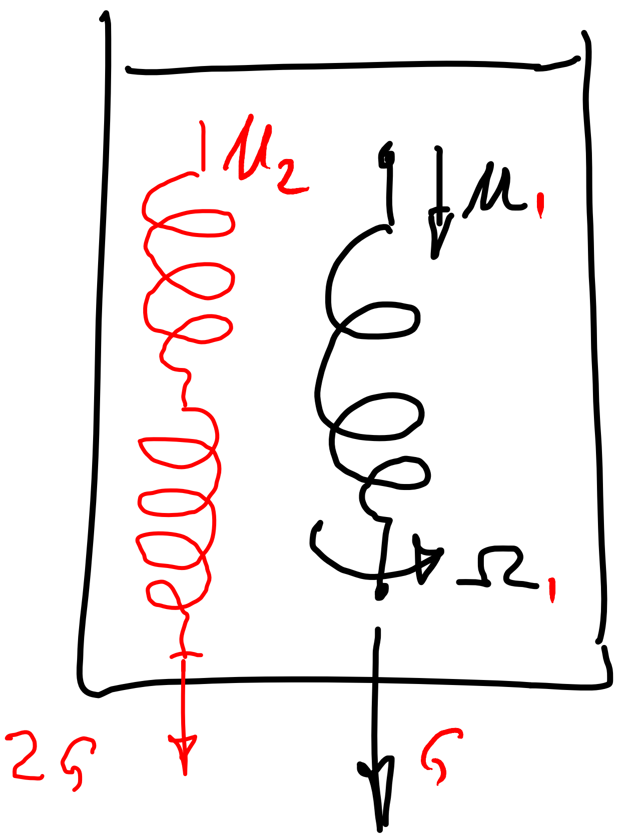
$$\underline{U_{max} = \frac{\varkappa B_p}{2 A_p} \Omega_m}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3

Bestimmung von A_p, B_p, D_p für eine spezielle Antrieb.



1. $\nabla p = \eta \Delta \vec{u}$; $\vec{u} = \vec{u}_w$

an der Wand.

$\nabla^4 \psi = 0$

Bipolarkoordinaten für

ψ Stromfunktion.

2. Versuch.

Ges: G, genauer M, Ω

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Wintersemester 2010/11
Biofluidmechanik
Vorlesung 3