Energieangebot bei Wellenkraft

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

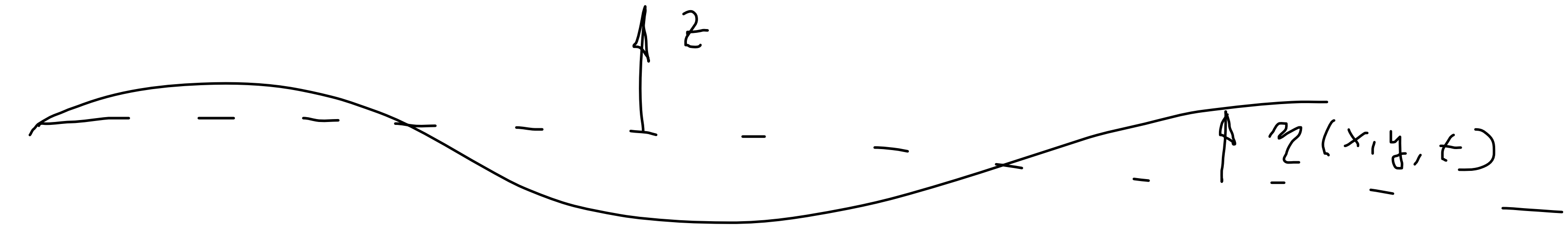
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Wintersemester 2011/12

Optimierung und Skalierung von Fluidsystemen

Vorlesung 13

08.02.2012

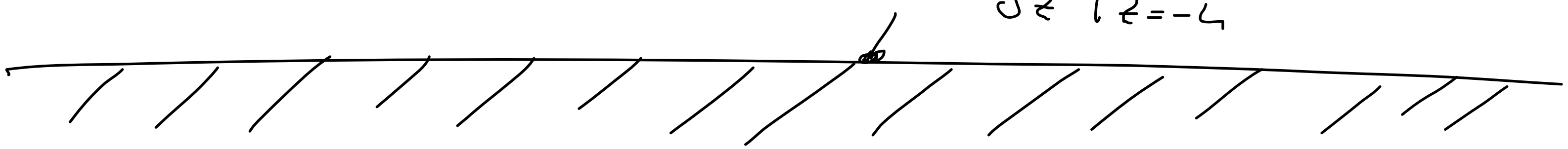


$$\frac{\partial \phi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$ kinematische R.B.

$$\Delta \phi = 0$$

$$g\eta + \underbrace{\frac{p_a}{\rho}}_{=0} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|_{z=0} = 0$$ dynamische R.B. (Bernoullische Gl.)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}\bigg|_{z=-h} = 0$$ kinematische R.B.



Ansatz

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\,\hat{\phi}(x,y,z)\right] \\ \hat{\phi}(x,y,z) &= H(x,y)\,Z(z) \end{aligned}\right\}$$ 2x Separationsansatz.

$$\Delta \phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta \hat{\phi} = 0$$

$$\hat{\vec{u}} = \nabla \hat{\phi}$$

$$\hat{p} \approx -\varrho i \omega \hat{\phi} \qquad |\vec{u}|^2 \ll g z$$

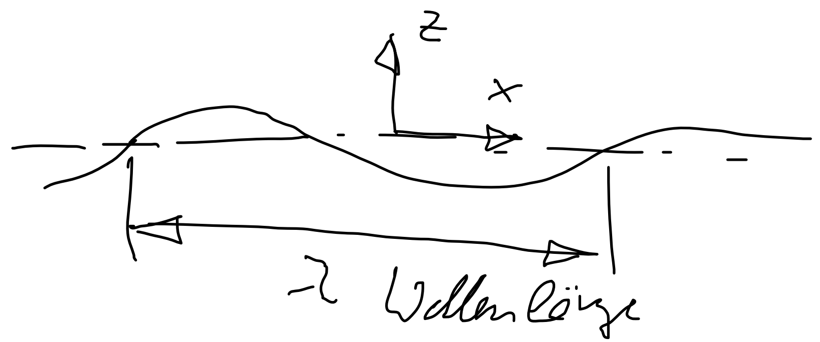
Bernoulli

$$\hat{\eta} = -\frac{i\omega}{g} \hat{\phi} \Big|_0$$ kinematische Randbedingung an $z = 0$

$$\left[-\omega^2 \hat{\phi} + g \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right]_{z=0} = 0$$ dynamische Randbedingung.

$$\hat{\Phi} = H(x,y)\, Z(z)$$

$$\Delta \hat{\Phi} = 0$$



$$\Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)}^{\Delta_H H} \frac{1}{H}}_{f_n(x,y)} = \underbrace{-\frac{Z''}{Z}}_{f_n(z)} = \underbrace{-k^2}_{\text{Seperationskonstante.}}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=-h} \equiv 0$$

Hier ist $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl.

$\Leftrightarrow \quad \Delta_H H + k^2 H = 0$ Helmholtzsche Differentialgleichung.

$Z'' - k^2 Z = 0$ Ansatz $Z = c_+ e^{kz} + c_- e^{-kz}$

Um die kinematische R.B. an $z=-h$ zu erfüllen, muß gelten.

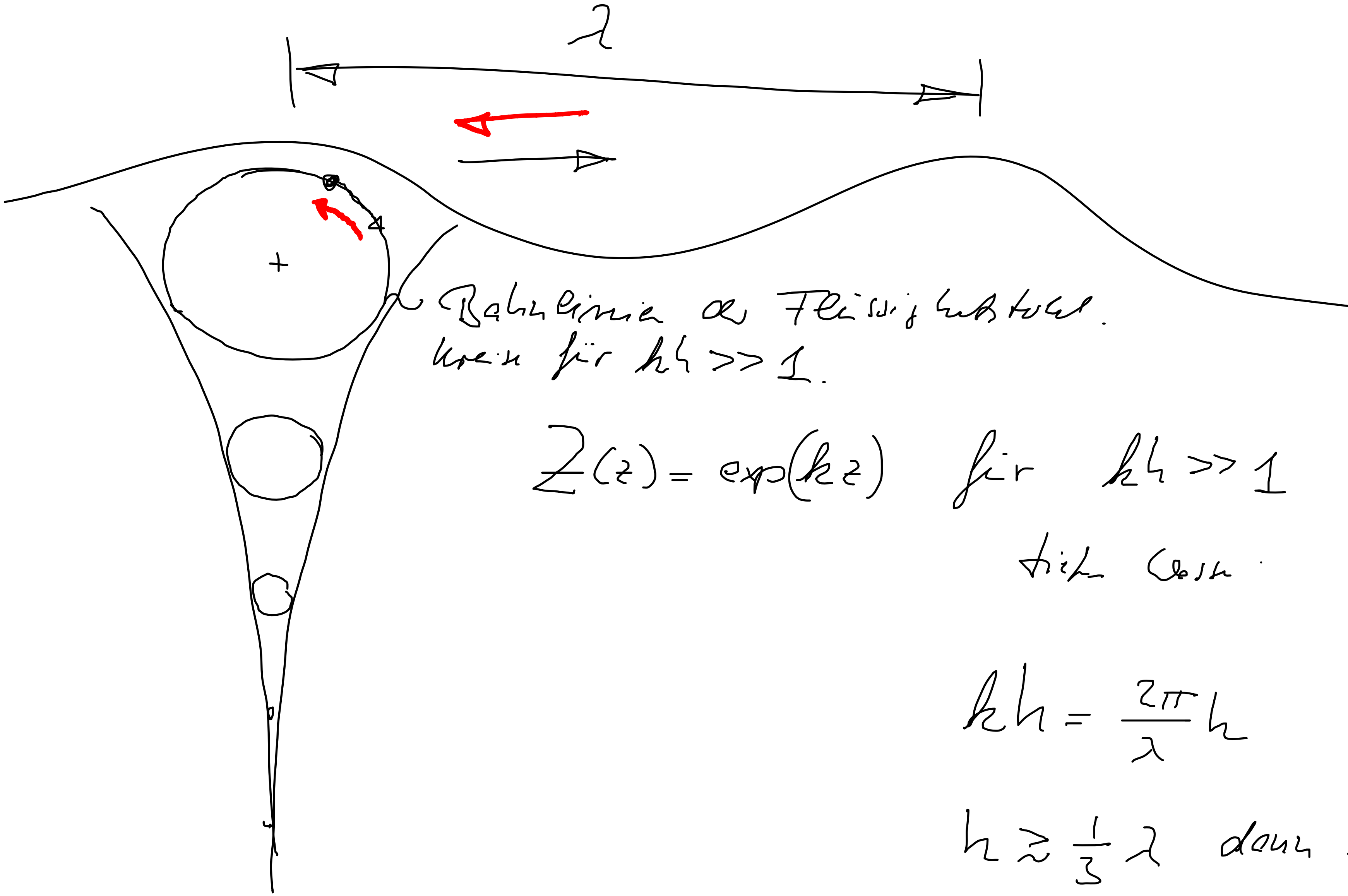
$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0 \Rightarrow H Z'(z=-h) = 0$$

$$\Rightarrow Z'(z=-h) = 0.$$

$Z = e(zk)$, mit der Tiefenfunktion

$$e(zk) := \frac{\cosh(kz+kh)}{\cosh(kh)} \approx e^{kz} \quad \text{für } kh \gg 1$$

Für tiefes Wasser ($kh \gg 1$) klingt die Tiefenfunktion exponentiell ab.



Bahnlinie der Flüssigkeitsteilchen.
Kreis für $kh >> 1$.

$$Z(z) = \exp(kz) \quad \text{für} \quad kh >> 1$$

tiefes Wasser.

$$kh = \frac{2\pi}{\lambda} h$$

$h \gtrsim \frac{1}{3}\lambda$ dann kann von tiefem Wasser gesprochen werden

Dispersionsrelation für Schwerwellen

Zweite Bedingung für die Tiefenfunktion.

$$\left[-\omega^2 \hat{\Phi} + g \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z}\right]_{z=0} = 0$$

dynamische Randbedingung für $p_u \equiv 0$.

$$\hat{\Phi} = H Z$$

$$-\omega^2 H Z|_0 + g H Z'|_0 = 0 \quad \Big| \frac{1}{H}$$

$$-\omega^2 Z(0) + g Z'(0) = 0$$

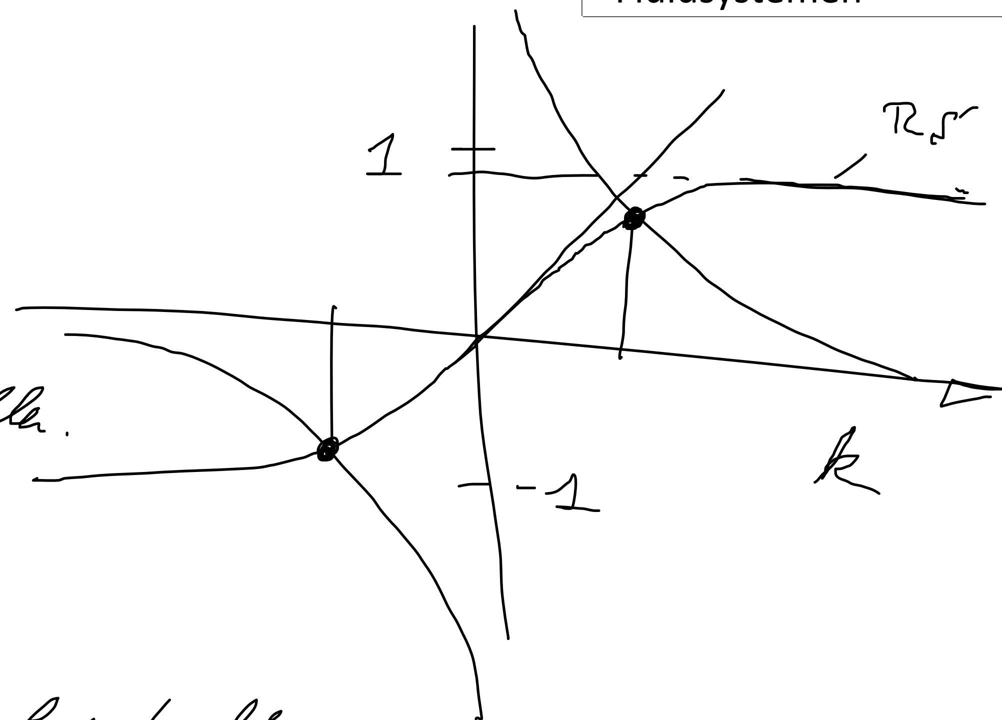
$$-\omega^2 \underbrace{\frac{\cosh(0+kh)}{\cosh(kh)}}_{1} + kg \underbrace{\frac{\sinh(0+kh)}{\cosh(kh)}}_{\tanh(kh)} = 0$$

$\Rightarrow$ Zusammenhang zwischen Wellenlänge

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ und Wellenfrequenz.

$$\boxed{\underbrace{\frac{\omega^2}{g k}}_{LS} = \underbrace{\tanh(kh)}_{RS}}$$

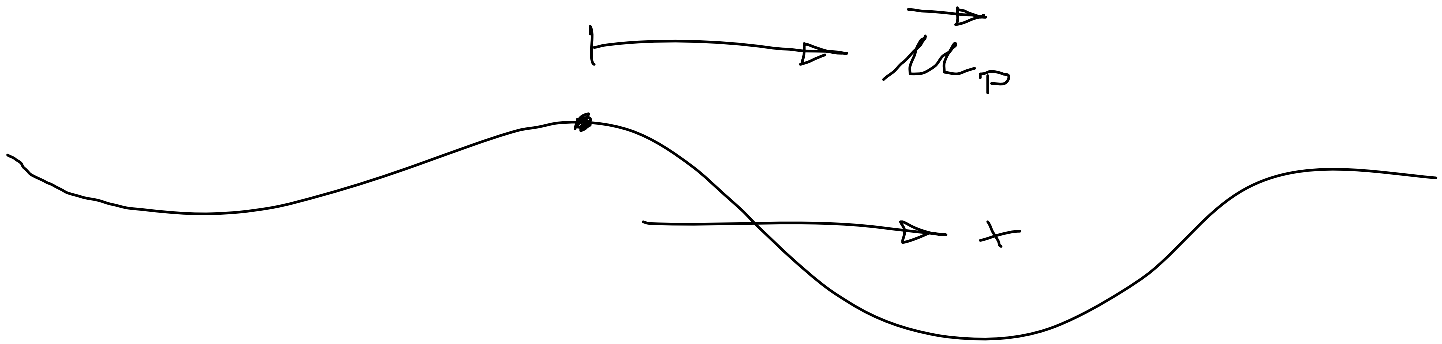
Dispersionsrelation für Schwerewelle.



Für kleine Wassertiefe (Flachwasser)

$$\tanh(kh) = kh + O\left((kh)^3\right) \quad \text{Taylorentwicklung}$$

$$\frac{\omega^2}{g k} = kh \quad \text{Dispersionsrelation für Flachwasser.}$$



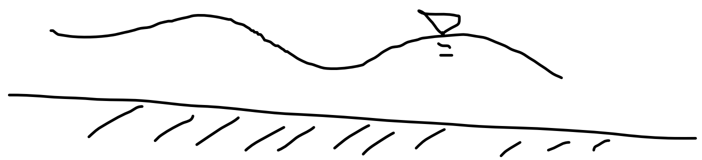
Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich z.B. der Wellenberg fortbewegt ($\neq$ Flüssigkeitsgeschw. $\neq$ Energietransportgeschw.)

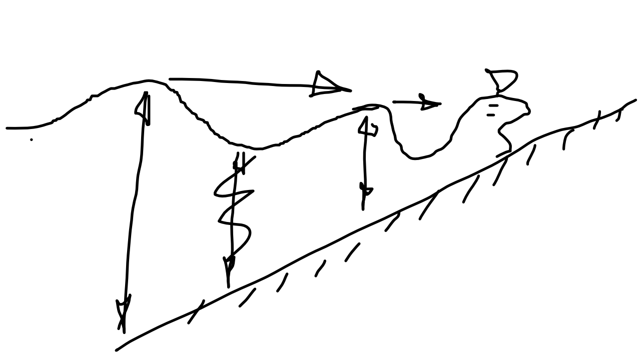
Für $\vec{u}_p = u_p \vec{e}_x$

$$u_p = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega}\tanh(kh) = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh kh}.$$

u_p für $kh \ll 1$

$$u_p = \sqrt{gh}$$





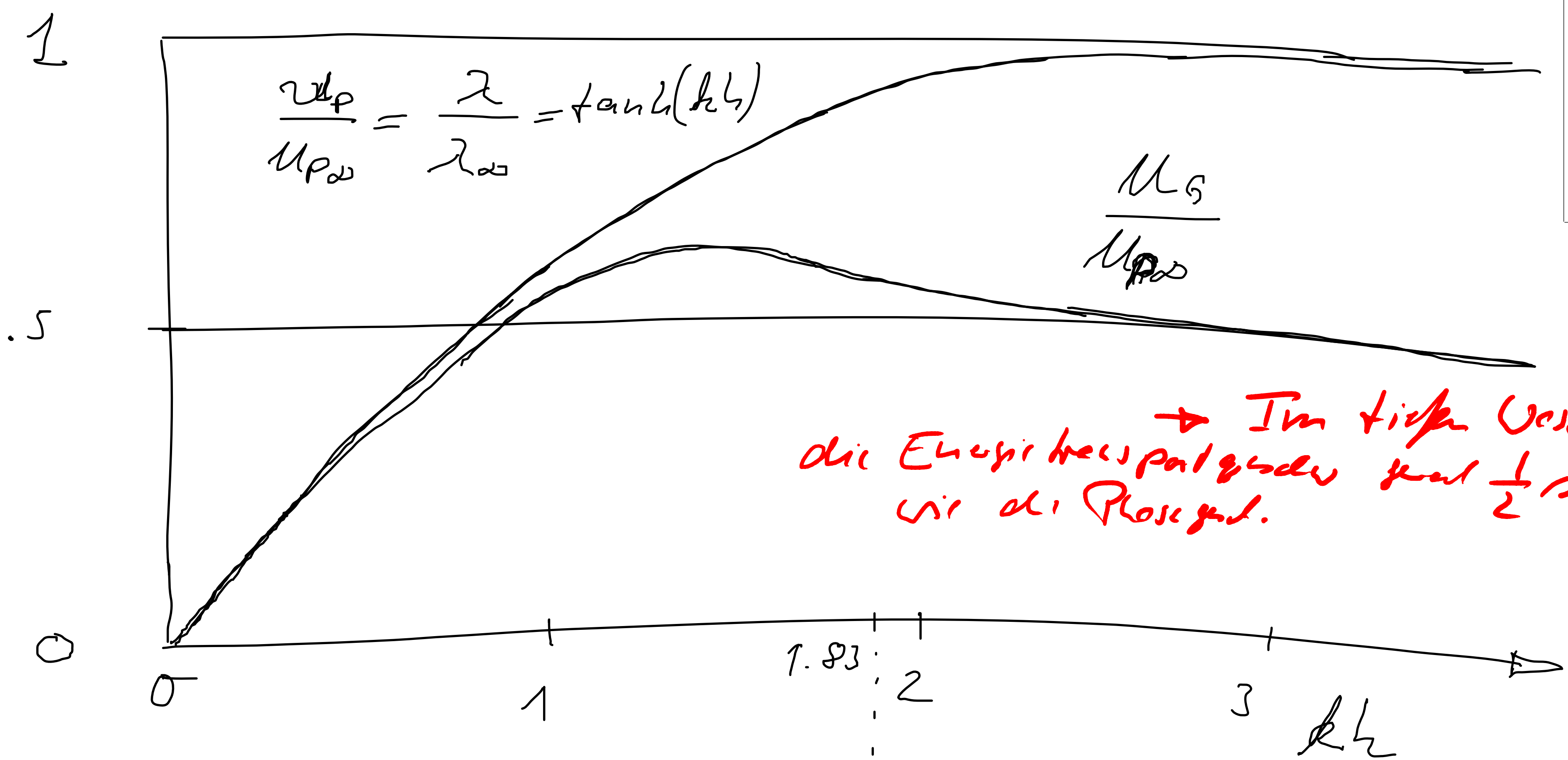
Achtung:
Brechen von Welle
nichtlinear
→ linearer Theorie
[illegible]

Gruppengeschwindigkeit group velocity

$$u_g := \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{2k}\left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right].$$

Dispersion relation

Das ist die Geschwindigkeit, mit der Wellenenergie transportiert wird.



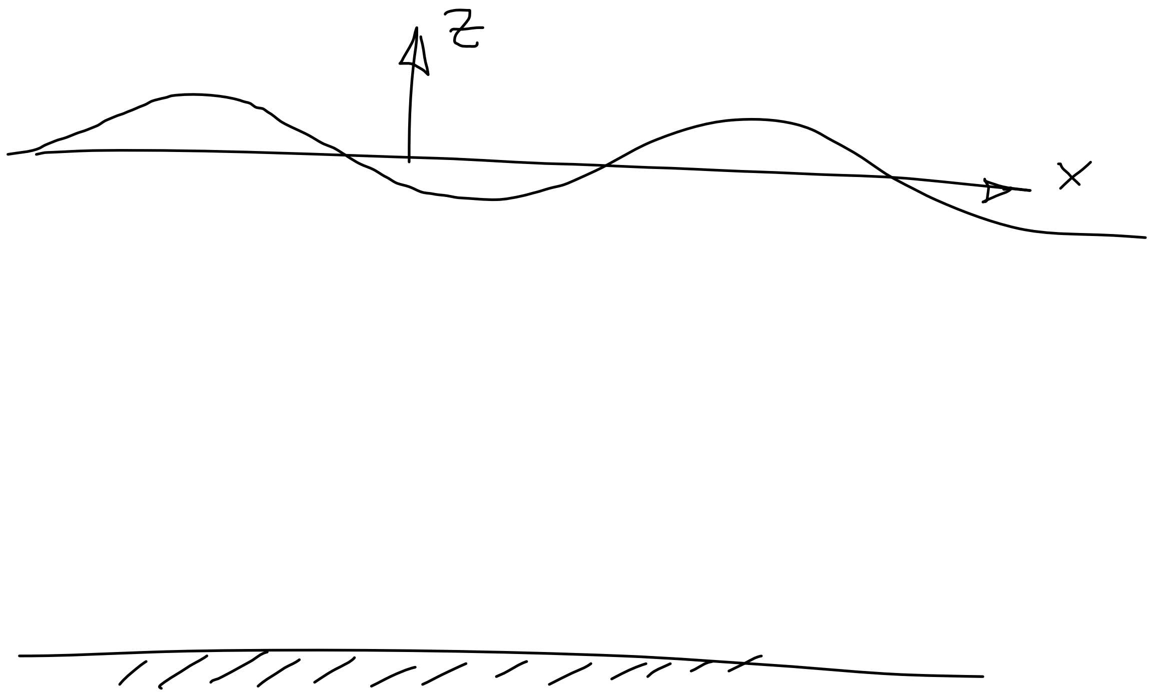
→ Im tiefen Wasser ist die Energietransportgeschwindigkeit genau $\frac{1}{2}$ so groß wie die Phasengeschw.

flaches Wasser $h \lesssim \frac{1}{3}\lambda$

tief Wasser $h \gtrsim \frac{1}{3}\lambda$

Im flachen Wasser sind u_p und u_G gleich.

Spezialfall: In y-Richtung ∞ ausgedehnte Welle.

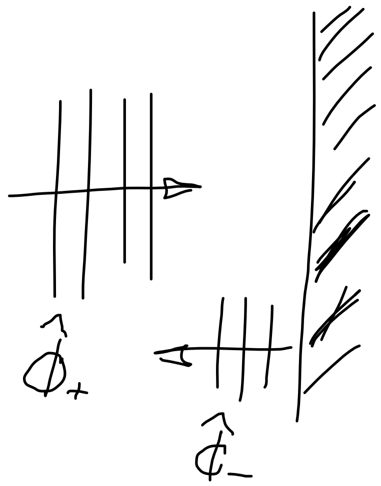


$$\Delta_H H + k^2 H = 0$$ allgemein

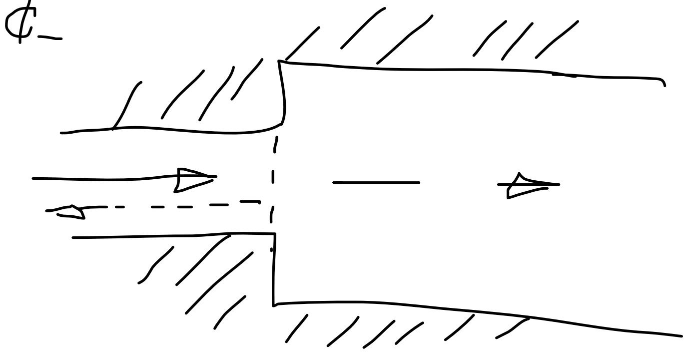
$$\frac{d^2 H}{dx^2} + k^2 H = 0$$ für das ebene Problem.

H von $\frac{d^2H}{dx^2} + k^2 H = 0$ wird

durch $H = a e^{-ikx} + b e^{ikx}$



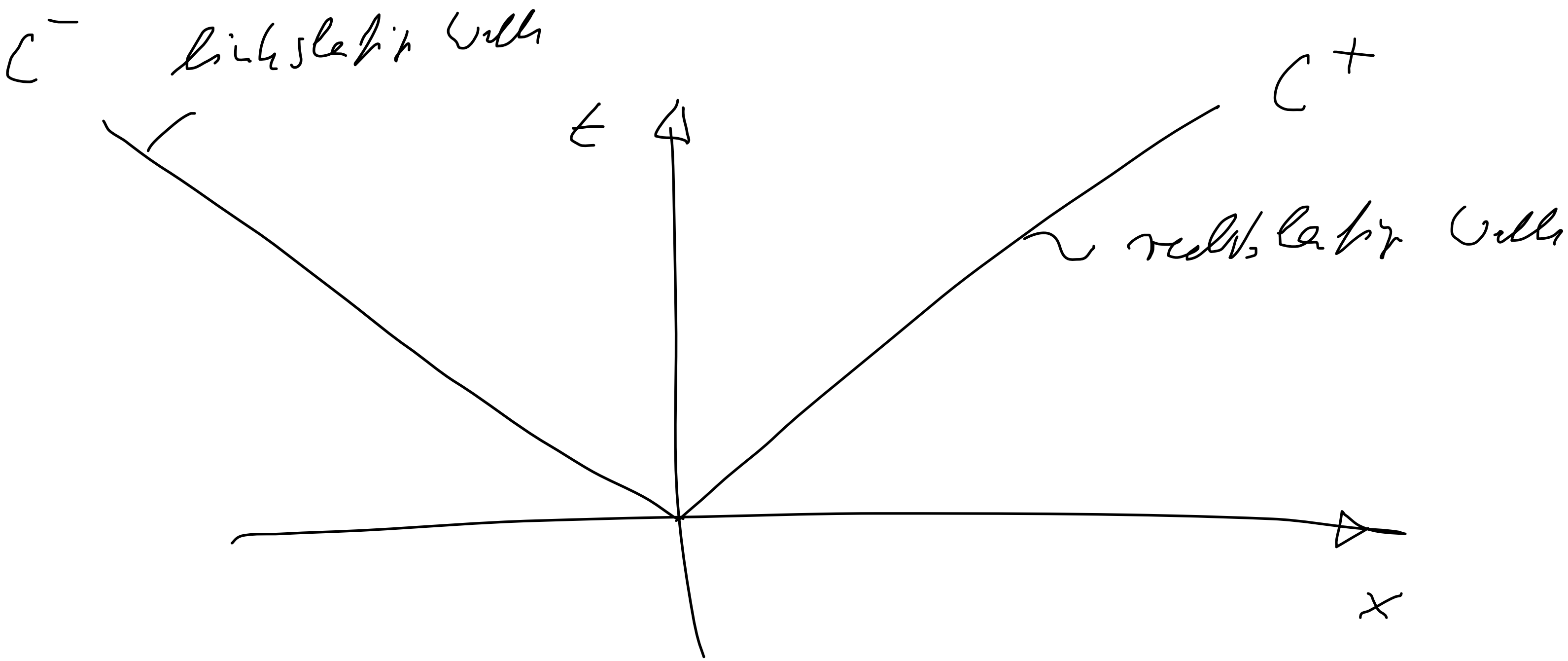
$$\hat{\phi} = e(kz)\left[a e^{-ikx} + b e^{ikx}\right].$$



$$\phi = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{a e^{i(\omega t - kx)}}_{\text{rechtslaufende Welle}} + \underbrace{b e^{i(\omega t + kx)}}_{\text{linkslaufende Welle.}}\right\} e(kz) = \mathrm{Re}\left\{e^{i\omega t}\left(\hat{\phi}_+ e^{-ikx} + \hat{\phi}_- e^{+ikx}\right)\right\} e(kz)$$

$\omega t - kx = \text{const}$ C^+-Charakteristik

$\omega t + kx = \text{const}$ C^--Charakteristik

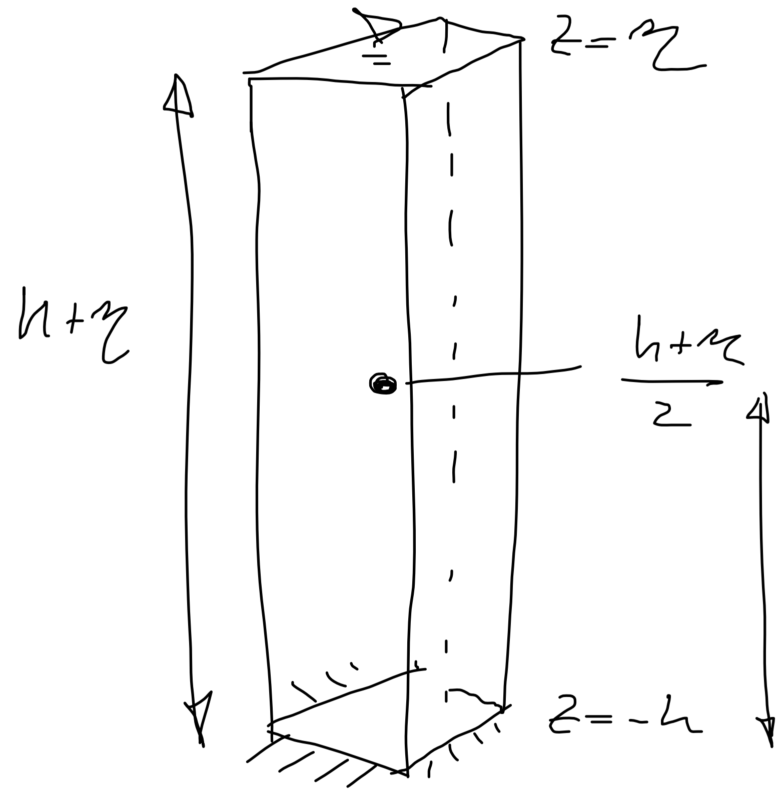


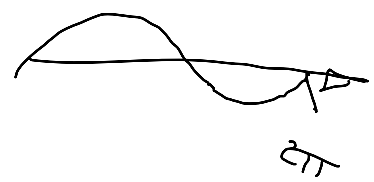
→ x–t–Diagramm funktioniert bei quasi-1D-Probleme.

Energieangebot einer Welle

Potentielle Energie pro Flächeneinheit

$$\underbrace{\rho g (h+\eta)}_{\sim \text{Gewicht}} \; \underbrace{\frac{h+\eta}{2}}_{\text{Schwerpunkt}} \quad \text{im ausgelenkten Zust.}$$





$$\rho g h \frac{h}{2} \quad \text{im Gleichgew...}$$

Änderung der Potentielle Energie $\rho g h \eta + \frac{\rho g}{2} \eta^2$

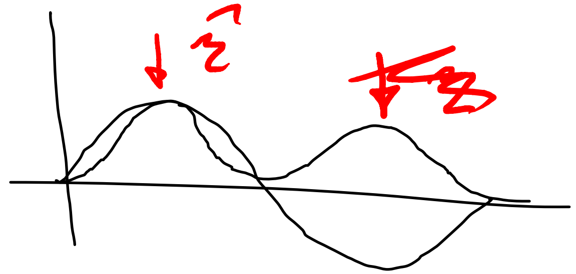
Zeitliches Mittel über eine Schwingungsperiode.

$$\overline{\phi} := \frac{1}{T}\int_0^T \phi \, dt$$

$$E_p = \underbrace{\overline{\rho g h \zeta}}_{\equiv 0} + \frac{\rho g}{2}\overline{\zeta^2}$$

potentielle Energie pro Flächeneinheit im zeitlichen Mittel

$$E_p = \frac{\rho g}{4}\left|\hat{\zeta}(x,y)\right|^2$$

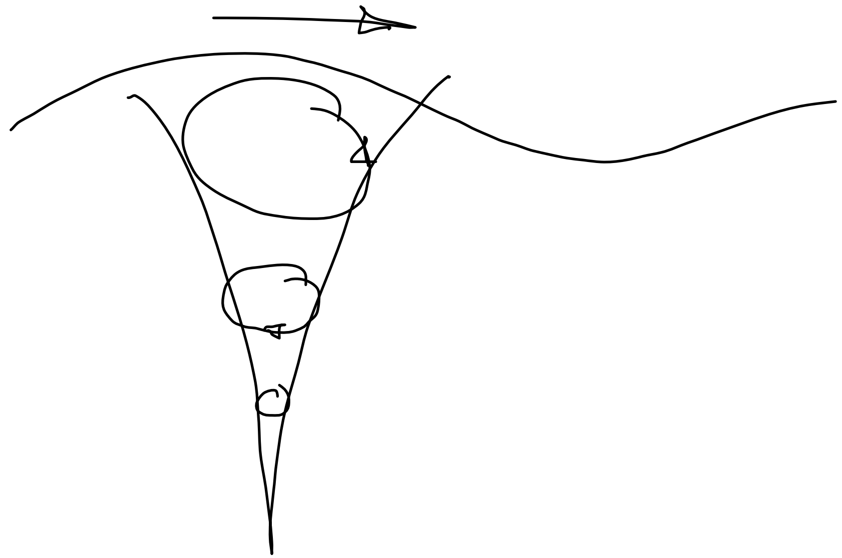


Kinetische Energie der Welle

$$\hat{u}_x = \omega \hat{z} e^{kz} \qquad kh >> 1.$$

$\hat{u}_z = -i \hat{u}_x$, d.h. um $\frac{\pi}{2}$ Phasenverschoben zu $\hat{u}_x$

↳ Kreisbewegung



Kinetische Energie

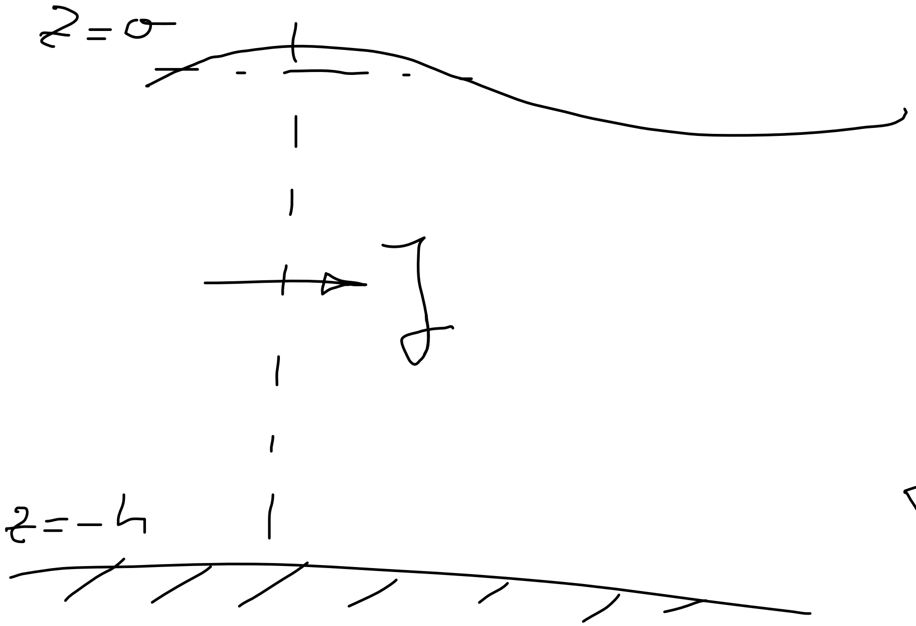
$$E_k = \frac{1}{2}\rho \, \frac{1}{2} Re\left\{\hat{u}_x^2 + \hat{u}_z^2\right\} = E_p$$

Intensität (lokale Größe, oder integrale Größe)

$$I = \overline{p u_x}$$

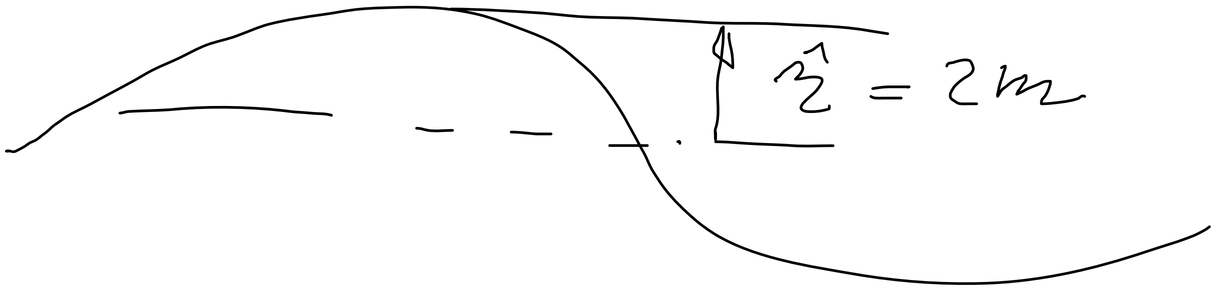
Erinnerung 1. HS. Leistung des Spannungsvektors $\overline{\int \vec{t} \cdot \vec{u} \, dS}$

$$\overline{-p\vec{n} \cdot \vec{u}} = \overline{p u_x}$$



$$J = \int_{-h}^{0} I \, dz$$ integrale Größe

flächenspezifische Energie pro Einheit Wellenfront.



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ Schwingdauer $= 10$ sec. (Atlantik)

(14 sec. Pazifik)

$$J = \frac{\rho g^2}{32\pi} T H^2$$

$$J \approx 40 \frac{kW}{m}$$ typischer Wert für den Atlantik in dieser Gegend.

$\rightarrow$ Energieangebot für Wellenergie.

$$\frac{\overline{DU}}{Dt} + \frac{\overline{DE}}{Dt} = \overline{\int_{S'} \vec{t}\cdot\vec{u}\, dS'} + \overline{\int_V \rho \vec{k}\cdot\vec{u}\, dV}$$

$$\underbrace{S_1' + S_2 + S_3}$$

$$J = \int_{-h}^{0} \overline{\rho u_x}\, dz$$