

# 6. Übung Strömungslehre für die Mechatronik

Prof. Dr.-Ing Peter Pelz      Dipl.-Ing. Thomas Bedarff

18. Juli 2009

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>2 Korrektur zur Vorlesung vom 14.07.2009</b>	<b>2</b>
<b>3 laminare Schichtenströmung</b>	<b>2</b>
3.1 Dämpfer . . . . .	2
<b>4 Bernoulli mit Verlusten</b>	<b>4</b>
4.1 Messdüse . . . . .	4

## 1 Hinweise

Auf euren Wunsch hin wurde der Umfang dieses Übungsblattes reduziert und die Aufgaben wurden einfacher gehalten.

Für Fragen zum Stoff stehen noch folgende Tage zur Verfügung:

Montag, 20.07.09

Donnerstag, 23.07.09

Montag, 27.07.09

Für die Klausur können verwendet werden: Zwei Seiten DIN A4 handgeschriebene Formelsammlung, ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

Formeln, die in der Vorlesung, der Übung oder der Vorrechenübung hergeleitet wurden, werden als bekannt vorausgesetzt

## 2 Korrektur zur Vorlesung vom 14.07.2009

In der Vorlesung vom 14.07.2009 wurde der Verlauf des statischen Druckes in einem Kanal mit CPU angegeben. Hierbei ist ein Fehler aufgetreten, der korrekte Druckverlauf ist in Abbildung 1 dargestellt.

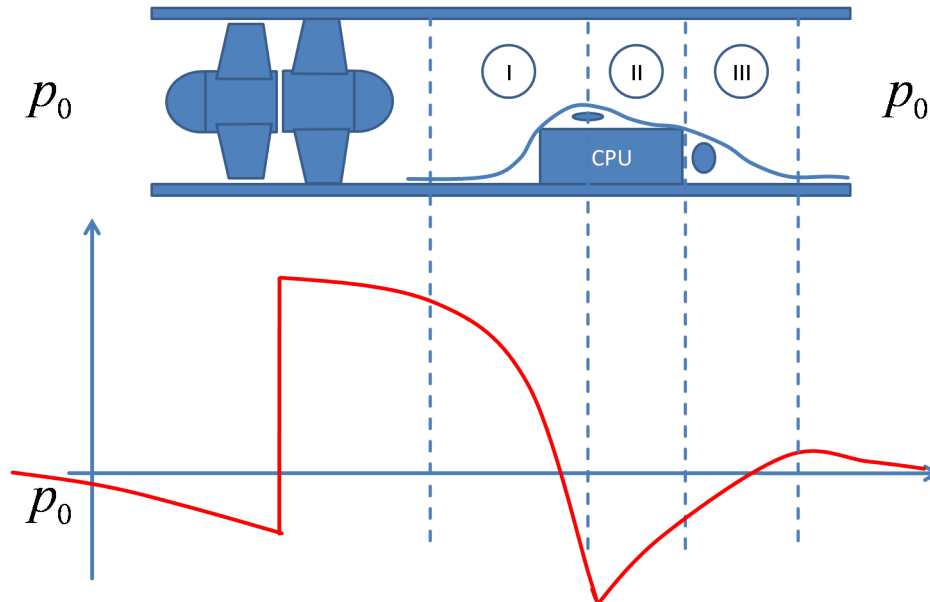


Abbildung 1: Druckverlauf über der Strecke

Im Einlauf sinkt der Druck, da die Strömung beschleunigt wird. Über der Turbine, hier als Unstetigkeit behandelt, steigt der Druck an. Aufgrund von Reibungsverlusten sinkt der Druck leicht (Druckverlust), bis er im Gebiet I aufgrund der steigenden Strömungsgeschwindigkeit (Düse) stark fällt. Dies ist eine Druckänderung und nur zum kleinen Teil ein Druckverlust! Die Gebiete II und III stellen einen Diffusor dar, hierbei steigt der Druck aufgrund verzögerter Strömungsgeschwindigkeit. Im Auslauf sinkt der Druck wieder leicht aufgrund von Reibungsverlusten.

## 3 laminare Schichtenströmung

### 3.1 Dämpfer

Der in Abbildung 2 dargestellte Kolben wird mit der Geschwindigkeit  $u_K$  bewegt. Zwischen Kolben und Zylinderwand bleibt ein zentrischer Spalt der Breite  $h$  und der Länge  $L$ . Im Zylinder befindet sich Fluid der Viskosität  $\eta$ . Die Querschnittsfläche der Kolbenstange sei zu vernachlässigen, die Spaltbreite  $b$  sei viel kleiner als der Kolbendurchmesser  $r_0$ :  $h \ll r_0$ .

1. Berechnen Sie die Kraft  $F$  in Abhängigkeit von der Kolbengeschwindigkeit  $u_K$  unter der Annahme, dass die Schlepplströmung im Spalt sowie die Kraft auf den Kolben durch die Schubspannung vernachlässigt werden können.

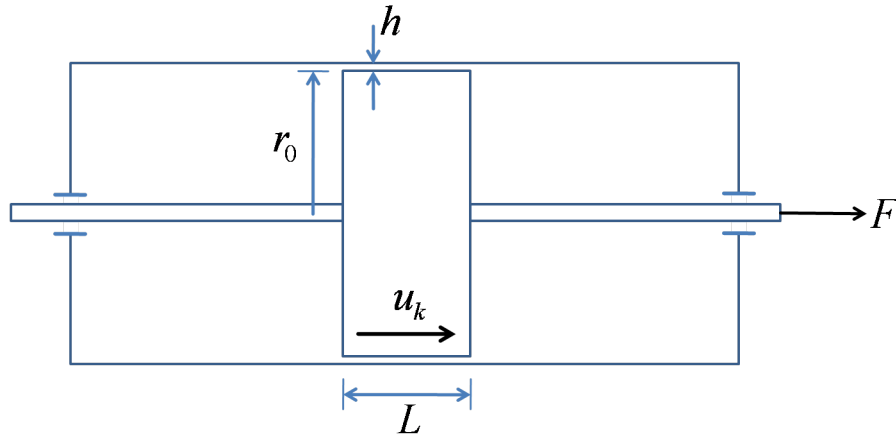


Abbildung 2: Kolben

Gegeben:  $h, L, r_0, \eta, u_k$

### Lösung

Die Kontinuitätsgleichung für die rechte Kammer liefert den Zusammenhang zwischen der Kolbengeschwindigkeit  $u_K$  und der *mittleren* Geschwindigkeit im Spalt  $\bar{u}$ :

$$A_{\text{kolben}} u_K = A_{\text{spalt}} \bar{u} \Rightarrow \bar{u} = \frac{\pi r_0^2}{2 \pi r_0 h} u_K = \frac{r_0}{2h} u_K \quad (1)$$

mit

$$\begin{aligned} A_{\text{spalt}} &= 2 \pi r_0 h \\ A_{\text{kolben}} &= \pi r_0^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Der Zusammenhang zwischen der Wandschubspannung  $\tau_w$  und der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}$  ist für einen Kanal der Höhe  $h$  gegeben über (VL 30.06.09, Achtung: hier definiert für ebenen Kanal der Höhe  $2h$ ):

$$\bar{u} = \frac{\tau_w h}{6\eta} \quad (3)$$

Die Wandschubspannung  $\tau_w$  ist in Abhängigkeit von der Druckdifferenz über den Spalt definiert durch (VL 30.06.09 oder 07.07.2009)

$$\tau_w = \frac{(p_2 - p_1)}{2L} \quad (4)$$

Setzt man die Gleichungen 1, 3 und 4 ineinander ein, so erhält man für die Druckdifferenz zwischen der rechten und der linken Zylinderkammer:

$$p_2 - p_1 = 6 \frac{r_0}{h^3} L \eta u_k, \quad (5)$$

was mit der Kraft

$$F = (p_2 - p_1) r_0^2 \pi \quad (6)$$

auf die gesuchte Kraft  $F$  führt:

$$F = 6 \pi L \eta \frac{r_0^3}{h} u_k \quad (7)$$

## 4 Bernoulli mit Verlusten

### 4.1 Messdüse

Zur Durchflussmessung einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho = \text{const}$  wird die in Abbildung 3 skizzierte Messdüse in eine Rohrleitung eingebaut. Die Strömungsgeschwindigkeit  $u_1$  am Eintritt der Messstrecke sei über den Querschnitt konstant. Am Austritt sei die Strömung wieder ausgeglichen. Die Reibung an den Rohrwänden kann vernachlässigt werden.

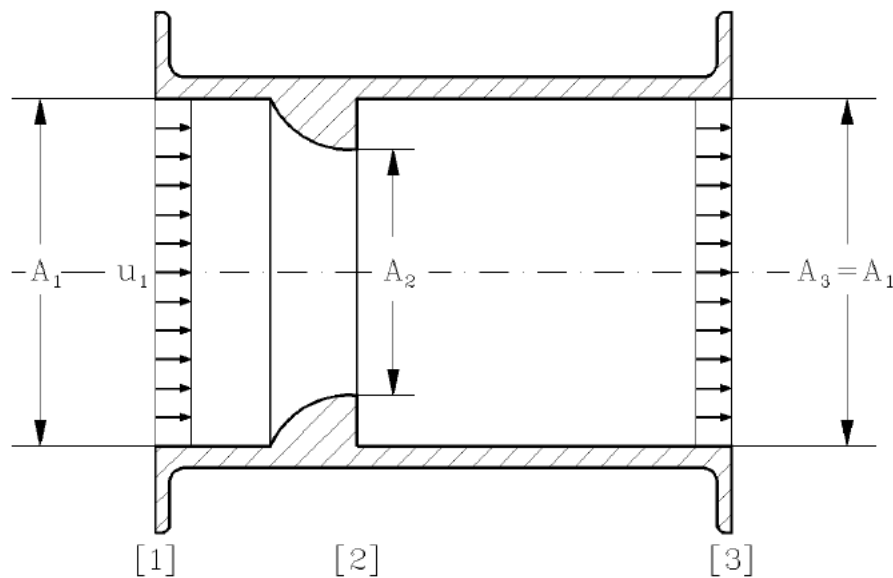


Abbildung 3: Messdüse

Wie groß ist

1. der Druckverlust dieser Messstrecke?
2. der Druck  $p_3$  am Austritt?
3. die Kraft der Flüssigkeit auf diese Messstrecke?

Gegeben:  $A_1, A_2, A_3, u_1$

### Lösung

Der Auftretende Druckverlust in der Strecke von [1] bis [3] ist der in der Übung hergeleitete Carnotsche Stoßverlust der unstetigen Querschnittserweiterung von  $A_2$  auf  $A_3 = A_1$ :

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} (u_2 - u_3)^2 \quad (8)$$

Die dabei noch unbekanntenen Geschwindigkeiten  $u_2$  und  $u_3$  können über die Kontinuitätsgleichung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} u_1 A_1 &= u_2 A_2 = u_3 A_3 \\ \Rightarrow u_1 &= u_3, u_2 = u_1 \frac{A_1}{A_2} \end{aligned} \quad (9)$$

Damit folgt für den Druckverlust:

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} u_1^2 \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \quad (10)$$

2) Der Druck  $p_3$  berechnet sich über die Bernoullische Gleichung, erweitert um den Verlustterm. Für stationäre Strömung von [1] nach [3] gilt:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 + \Psi_1 = p_3 + \frac{\rho}{2} u_3^2 + \Psi_3 + \Delta p_v \quad (11)$$

Mit  $\Psi_1 = \Psi_3$  und  $u_1 = u_3$  ergibt sich der Druck  $p_3$  zu:

$$p_3 = p_1 - \Delta p_v = p_1 - \frac{\rho}{2} u_1^2 \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \quad (12)$$

3) Die Kraft auf die Düse wird über den Impulssatz für das in Abbildung 4 eingezeichnete Kontrollvolumen bestimmt. Die Kraft wird nur eine Komponente in  $\vec{e}_x$ -Richtung haben, daher wird der Impulssatz in  $\vec{e}_x$ -Richtung verwendet:

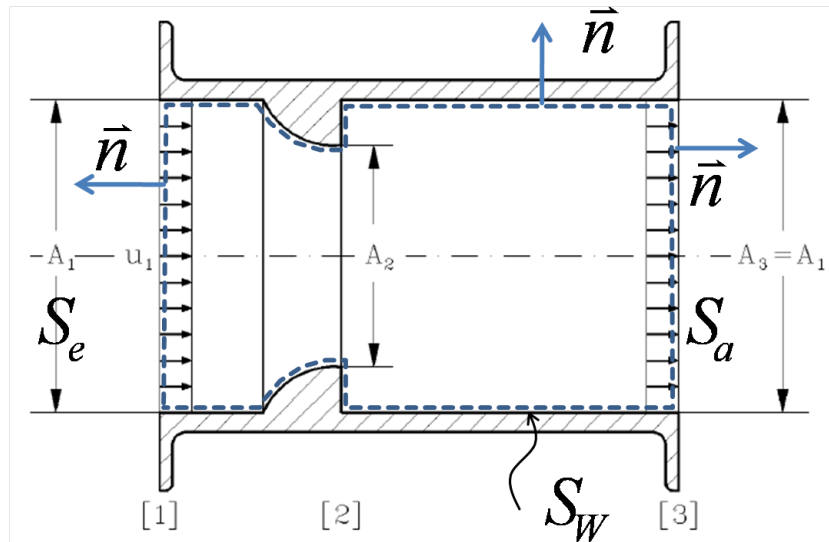


Abbildung 4: Messdüse

$$\oint \rho \vec{u} \cdot \vec{e}_x (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \vec{F}_{\rightarrow Fl} \cdot \vec{e}_x \quad (13)$$

Für die Wand  $S_w$  wird  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ , für die Flächen  $S_e$  und  $S_a$  gilt:

$$\begin{aligned} S_e : \vec{u} \cdot \vec{e}_x &= u_1, \vec{u} \cdot \vec{n} = -u_1 \\ S_a : \vec{u} \cdot \vec{e}_x &= u_3 = u_1, \vec{u} \cdot \vec{n} = u_3 = u_1 \end{aligned} \quad (14)$$

Die Kraft  $\vec{F} \cdot \vec{e}_x$  auf das Kontrollvolumen ergibt sich zu

$$\vec{F}_{\rightarrow Fl} \cdot \vec{e}_x = p_1 A_1 - p_3 A_3 + \vec{F}_{\text{Duese} \rightarrow Fl} \cdot \vec{e}_x \quad (15)$$

Einsetzen von Gleichung 14 und 15 in Gleichung 13 führt auf die gesuchte Kraft  $\vec{F}_{Fl \rightarrow \text{Duese}}$ :

$$\vec{F}_{Fl \rightarrow \text{Duese}} = (p_1 - p_3) A_1 = \Delta p_v A_1 = \frac{\rho}{2} u_1^2 A_1 \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \quad (16)$$