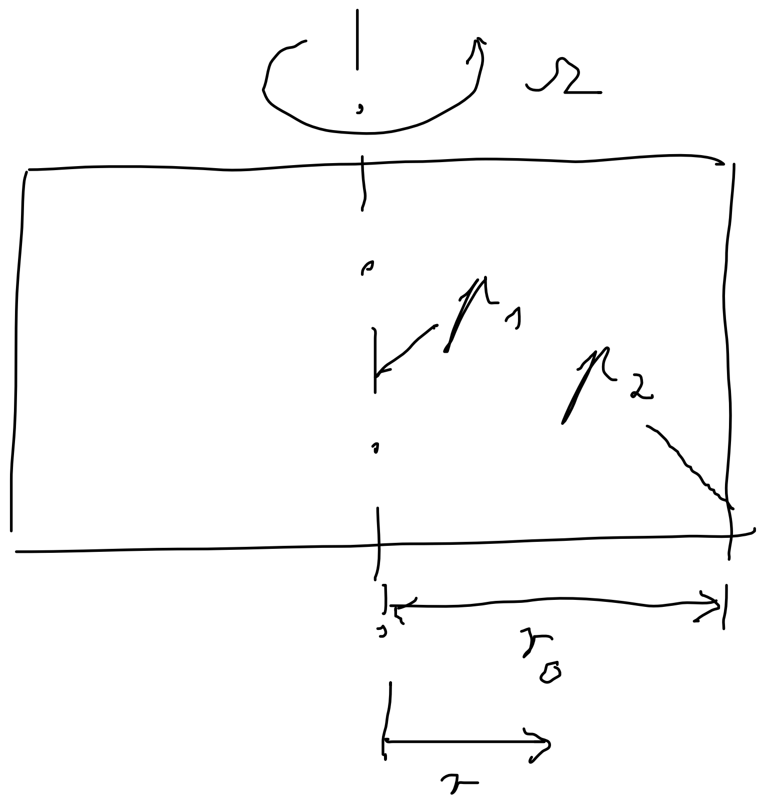
1.4 Gaszentrifuge



Hinweis: $\nabla p = -\nabla \psi$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

a)

$$\nabla p = \vec{f} \quad \text{hydrostat. Grundgl.}$$

$$\vec{f} = -\nabla \psi$$

$$\nabla p = -\nabla \psi$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_r$$

$$= - \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \right) \cdot \vec{e}_r$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d\psi}{dr}$$

$$\psi = -\frac{\rho}{2}\left(\Omega^2 r^2\right) \underbrace{\left(+\rho g z\right)}_{\text{vernachlässigt}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dr} = \underset{\sim}{\rho}\, \Omega^2 r$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

$$p = \rho R T \iff \rho = \frac{p}{RT}$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p}{RT}\,\Omega^2\, r$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{\Omega^2}{RT}\, r\, dr$$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{\Omega^2}{RT}\, r\, dr$$

$$\Rightarrow p(r=0) = p_1$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

$$p(r) = p_1 \exp\left(\frac{\Omega^2 r^2}{2RT}\right)$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

b)

Zustand A: still stehend

Zustand B: rotierend

A: $\Omega = 0 \qquad p_1 = p_0$

B: $\Omega \neq 0 \qquad p_1 \neq p_0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
FLUID SYSTEM TECHNIK
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

$$m = m_a = m_b$$

$$m = \int_V \rho_a \, dV = \int_V \rho_b \, dV$$

$$\rightarrow \quad dV = r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$p = \rho R T$$

$$p_a = p_0$$

$$p_b = p(r)$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{p_0}{RT}\, r\, dr\, d\varphi\, dz =$$

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{p(r)}{RT}\, r\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$p(r) = p_1 \cdot \exp\left(\frac{\omega^2 r^2}{2RT}\right)$$

$$\Rightarrow \quad p_0 \frac{h \pi r_0^2}{RT} = p_1 \frac{h \cdot 2\pi}{RT} \int_0^{r_0} r \exp\left(\ldots\right) dr$$

Formelsammlung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

$$p_1 = p_0 \frac{\Omega^2 r_0^2}{2RT} \left(\exp\left(\frac{\Omega^2 r_0^2}{2RT}\right) - 1 \right)^{-1}$$

$$p_2 = \underbrace{p(r = r_0)}_{a)} = p_1 \cdot \exp\left(\frac{\Omega^2 r_0^2}{2RT}\right)$$

$$p_2 = \ldots$$

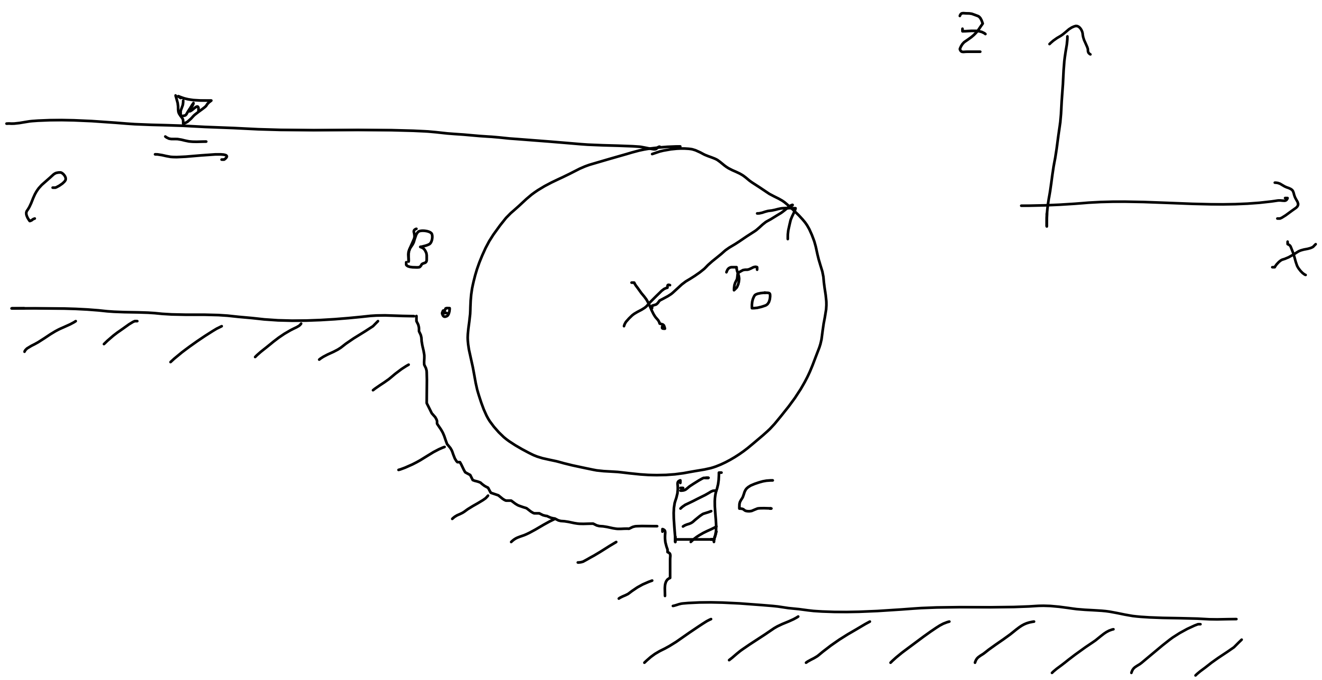
c) ρ_1, ρ_2 aus p_1, p_2 über die ideale Gasgleichung $p = \rho R T$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

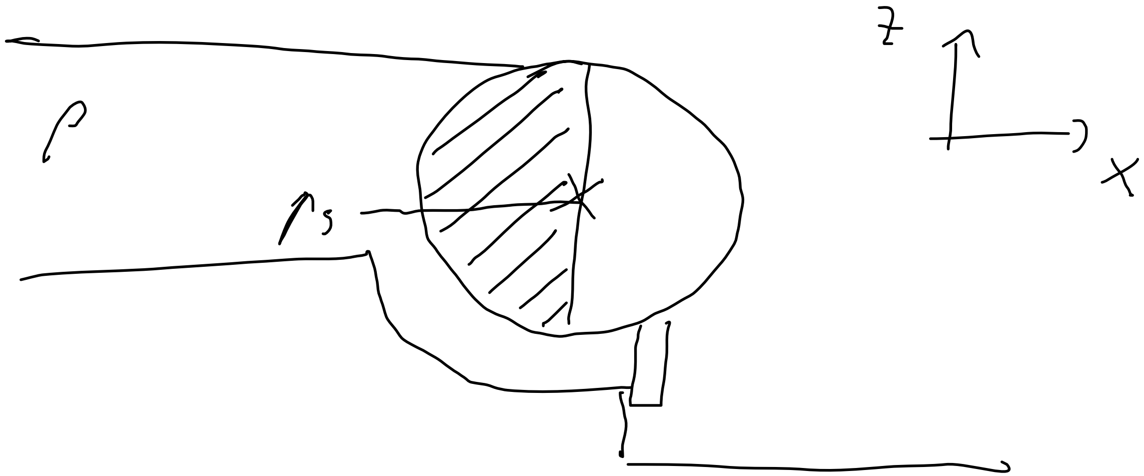
Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

1.5 Walzenwehr



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

a) $F_x = ?$; $F_z = ?$

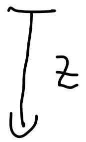


$$F_z = \rho g V = \rho g \frac{\pi r_0^2 b}{2}$$

$$\boxed{F_x} = \rho_s A_{proj} = \rho g r_0 \cdot 2 r_0 b$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz

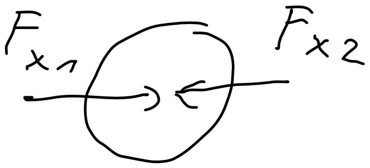
$$p + \rho g z = C$$



$$p_0 + \cancel{\rho g \cdot 0} = p_B + \rho g r_0$$

$$p_B = p_0 - \rho g r_0$$

$$F_{x1} = (p_0 - \rho g r_0) \cdot 2 r_0 b$$



$$F_{x2} = p_0 \cdot 2 r_0 b$$

$$\longrightarrow : \quad F + F_{x1} - F_{x2} = 0$$

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

$$F = p_0 \, 2 r_0 \, b - p_0 \, 2 r_0 \, b + \rho g \, r_0 \, 2 r_0 \, b$$

$$F = \rho g \, r_0 \, 2 r_0 \, b = 2 \rho g \, r_0^2 \, b$$

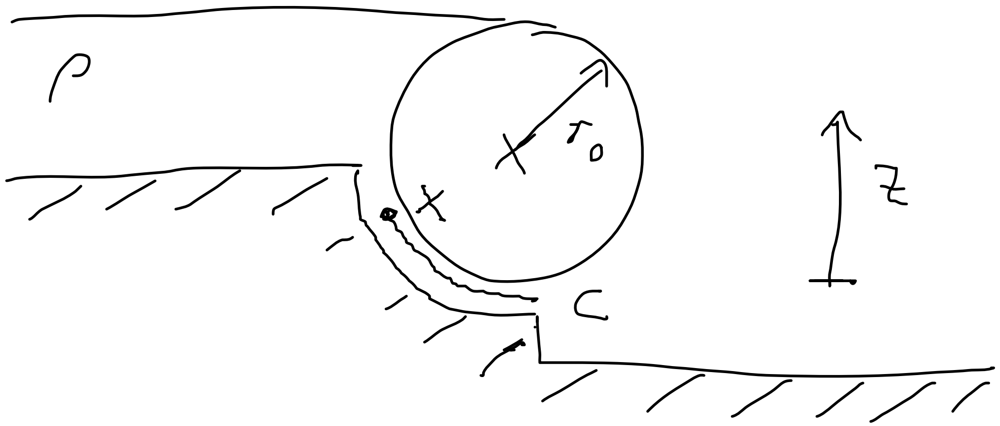
F_x F_z

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

b)



Bernoullische Gleichung:

$$p + \rho g z + \frac{\rho}{2} u^2 = C$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

$$p_x + \rho g z_x + \frac{\rho}{2} u_x^2 =$$

$$p_c + \rho g \cdot 0 + \frac{\rho}{2} u_c^2$$

$$p_c = p_0$$

$$\dot m_x = \dot m_c$$ Kontinuitäts-gleichung

$$u_x \cdot \rho_x A_x = u_c \cdot \rho_c A_c$$

$$\Rightarrow u_x = u_c$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2

$$p_x = p_0 - \rho g z_x$$

$$p_B = p_x(z_x = r_0) = p_0 - \rho g r_0$$

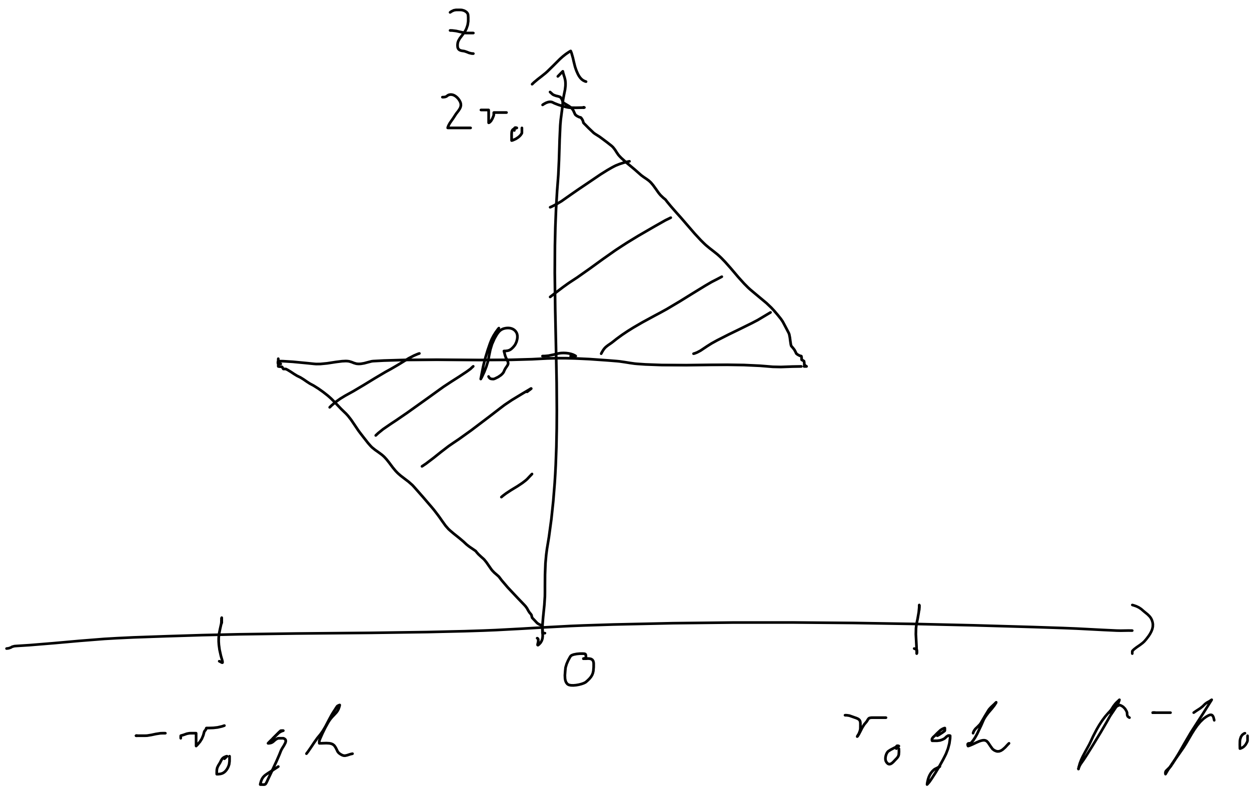
$$p(z) = p_0 + \rho g (2 r_0 - z_x)$$

$$p_B = p(z = r_0) = p_0 + \rho g r_0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2



$F_x = 0$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Prof. Dr. Ing. Peter Pelz
Sommersemester 2010
Strömungslehre für Mechatronik
Vorrechenübung 2