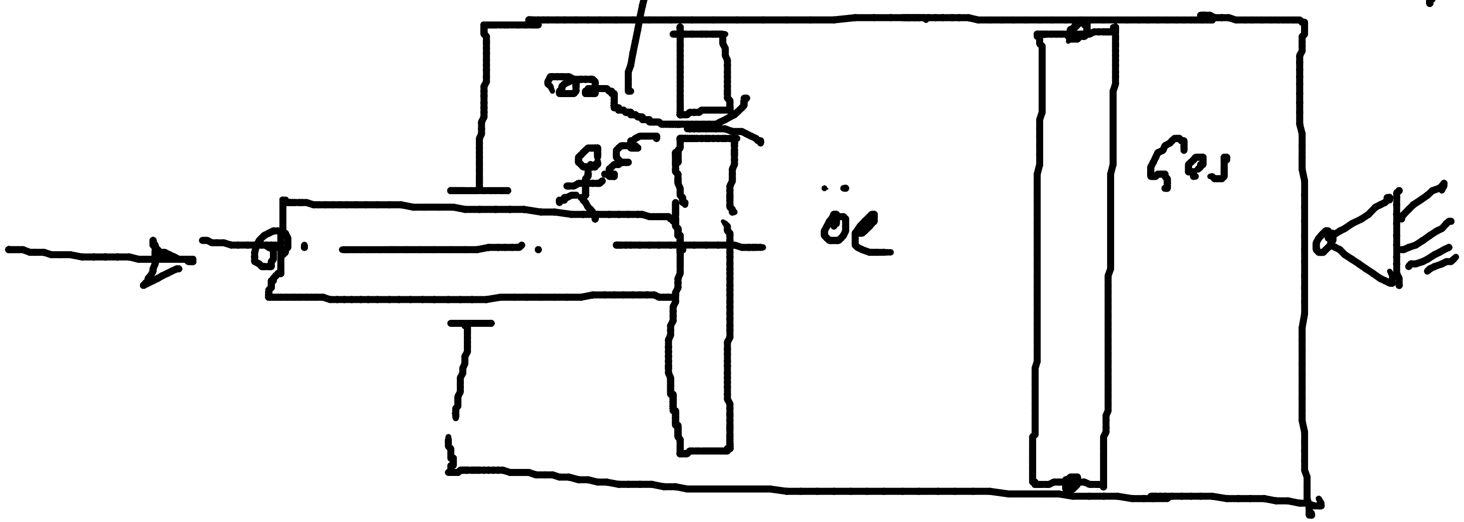
Einfache Flüssigkeit:

- Reibungsfreie Flüssigkeit

$\tau = 0$ $\qquad \frac{\rho}{2} u^2 \qquad$ u Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen.



- Newtonsche Flüssigkeit

$$\tau = \eta \dot{\gamma}$$

Tensorielle Verallgemeinerung der einfachen Materialgesetze

Schubspannung τ $\longrightarrow$ Reibungsspannungstensor

$$\underset{\sim}{\tau} = \tau_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1 + \tau_{12}\vec{e}_1\vec{e}_2 + \tau_{13}\vec{e}_1\vec{e}_3 + \tau_{21}\vec{e}_2\vec{e}_1 + \dots \tau_{33}\vec{e}_3\vec{e}_3 .$$

$\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ Reibungs-normalspannung.

$$\tau_{12} = \tau_{21}$$

$$\tau_{13} = \tau_{31}$$

Der Spannungstensor ist symmetrisch.

Die Symmetrie ist Folge des Drallsatzes

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{P}$$

$\underset{\sim}{I}$ Einheitstensor

p statischer Druck

spez.
reibungsfreie Fl.

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I}$$

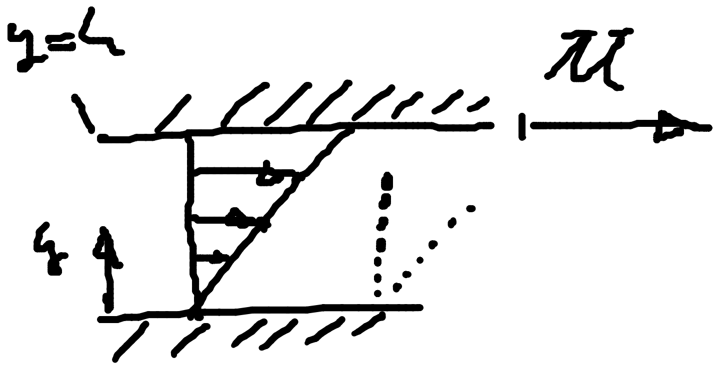
Tensorielle Verallgemeinerung des
Newtonschen Reibungsgesetz

$$\tau = \eta \dot{\gamma}$$

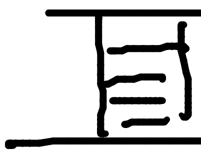
$$\tau \rightarrow \underset{\sim}{T}$$

$$\dot{\gamma} \rightarrow \underset{\sim}{E}$$

Deformations-
geschwindigkeitstensor.

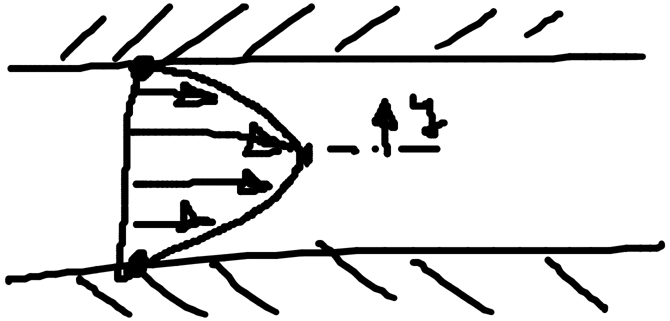


$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dy} u(y)$$



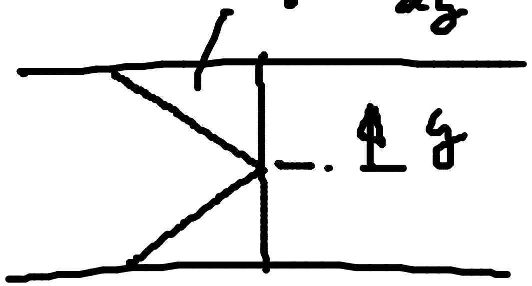
$$\dot{\gamma} = \frac{U}{h} = \text{const.}$$

p_1



$p_2 < p_1$

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$$



$$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^{T}\right)$$

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \longrightarrow \underset{\sim}{T} = 2\eta \underset{\sim}{E}$$

Kurzer Einschub zur Darstellung von Tensoren

Skalar — Druck p

Tensor 0-ter Stufe — Temperatur T

Dichte ρ

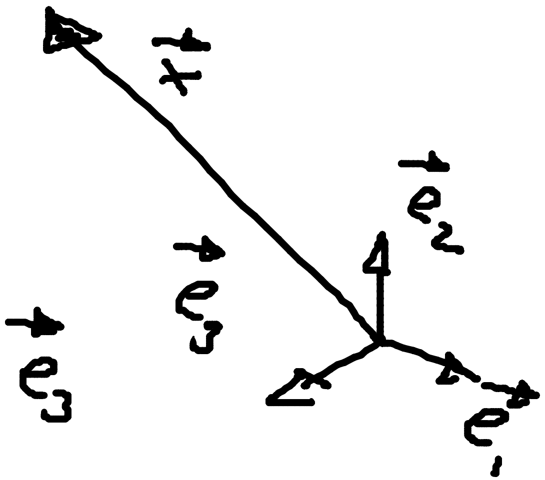
Vektor — Ortsvektor

Tensor 1-ter Stufe

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

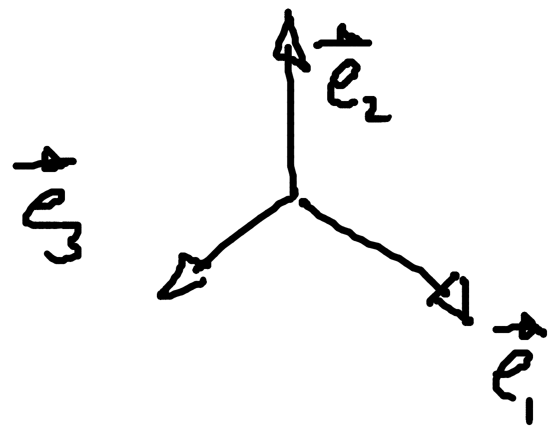
$$= \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$$

$$= x_i \vec{e}_i$$



$\vec{x} \quad \hat{=} \quad x_i \qquad i = 1, 2, 3$

Symbolische Schreibweise — kartesische Indexnotation



Andere Tensoren 1. Stufe

Vektor

Kraft $\vec{F} \quad \hat{=} \quad F_i$

Moment $\vec{M} \quad \hat{=} \quad M_i$

Massenkraft der Schwere

$$\vec{g} \;\hat{=}\; g_i$$

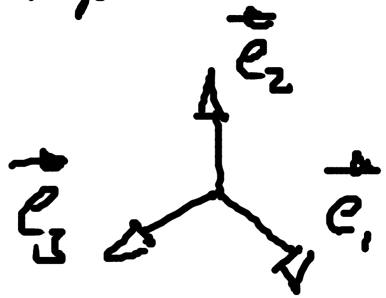
Spannungsvektor

$$\vec{t} \;\hat{=}\; t_i$$

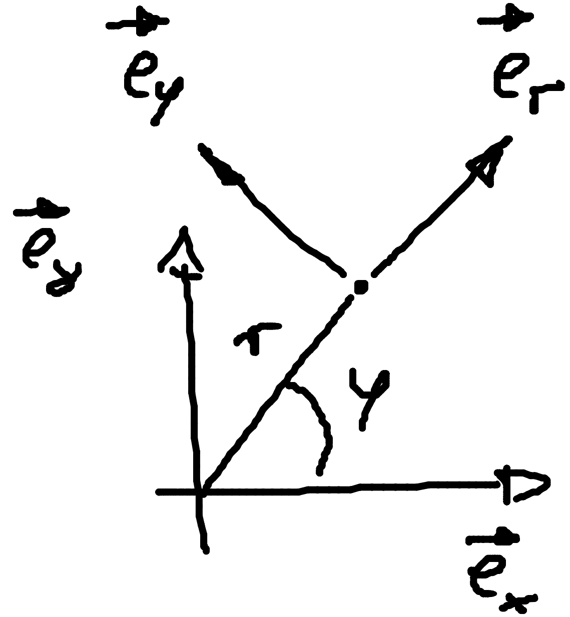
$$\vdots$$

Tensoren zweiter Stufe

Spannungstensor



$$\underset{\sim}{T} = \tau_{11}\,\vec e_1\vec e_1 + \tau_{12}\,\vec e_1\vec e_2 + \dots + \tau_{33}\,\vec e_3\vec e_3 \;\hat{=}\; \tau_{ij}, \qquad i,j = 1,2,3$$



$$\underset{\sim}{T} = \tau_{rr}\,\vec e_r\vec e_r + \tau_{r\varphi}\,\vec e_r\vec e_\varphi + \tau_{rz}\,\vec e_r\vec e_z + \dots \tau_{zz}\,\vec e_z\vec e_z\,.$$

Zylinderkoordinaten

Achtung: Die Basis muß bei räumlicher Ableitung differenziert werden!

Verknüpfungen von Tensoren

1. Skalarprodukt

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i \qquad = a_i \vec{e}_i \cdot b_j \vec{e}_j$$

$$\vec{b} = b_j \vec{e}_j \qquad = a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{array}\right\} \text{Einheitst.}$$

$$\underset{\sim}{I} \mathrel{\hat{=}} \delta_{ij} \quad \text{Kroneckersymbol}$$

$$c = \underbrace{a_i b_j \delta_{ij}} = \underbrace{a_i b_i} =$$

$$c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Symbolisch

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Indexnotation

$$c = a_i b_i$$

$$c = a_i b_j \delta_{ij}$$

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a_i \vec{e}_i \times b_j \vec{e}_j$$

$$= a_i b_j \; \vec{e}_i \times \vec{e}_j$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = 0 \, , \quad \text{für} \; \cancel{i \neq j} \; i = j$$

$$\vec{e}_k = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{Permutationstensor.}} \vec{e}_i \times \vec{e}_j$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{wenn mindest zwei Indices gleich sind.} \\ 1 & \text{wenn } i,j,k \text{ eine gerade Permutation bild} \\ -1 & \text{wenn } i,j,k \text{ eine ungerade Permutation bildet.} \end{cases}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \hat{=} \quad c_k = \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j$$

Räumlich Operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i \;\hat{=}\; \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Divergenz

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{T} \;\hat{=}\; \frac{\partial}{\partial x_i}\delta_{ij}\,\tau_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ik} = b_k$$

Gradient

$$\nabla p \;\hat{=}\; \frac{\partial}{\partial x_i}p$$

Rotation.

$$\nabla \times \vec{t} \;\hat{=}\; \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}t_k = b_i$$

über die doppelt vorkommende wird summiert: Einstein'sche Summations-konvention.

Einfach vorkommende Indices nennt man freie Indices.

Die Anzahl der freien Indices bestimmt die Tensorstufe.

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{k} + \nabla \cdot \left(\eta \nabla \vec{u} \right)$$

Symbolische Schreibweise

Impulsbilanz für ein Flüssigkeitsteilchen

Vektor-Glg.

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \rho k_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \right)$$

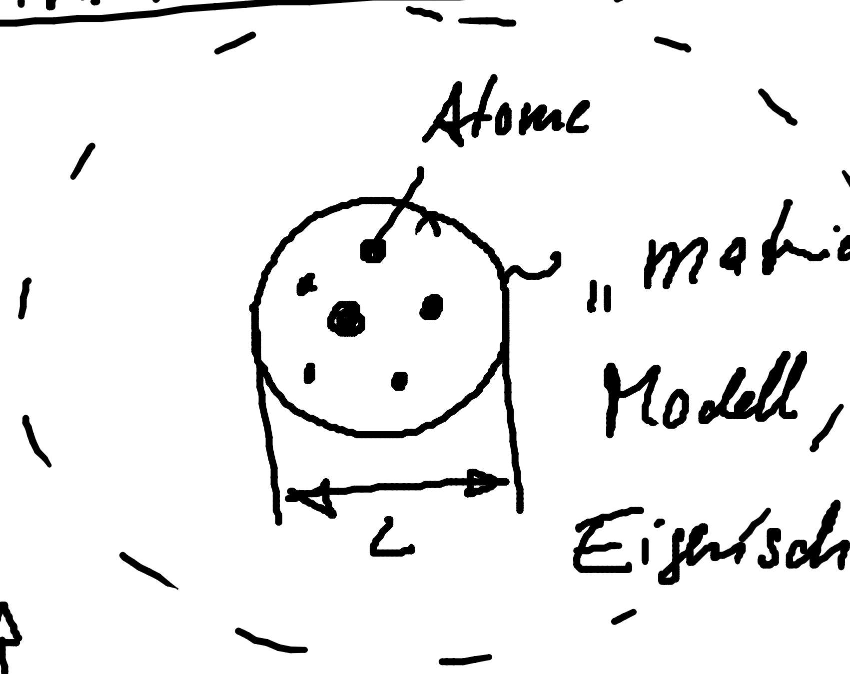
Indexnotation.

$$\nabla \cdot \vec{b} = \operatorname{div} \vec{b} \qquad \nabla \times \vec{b} = \operatorname{rot} \vec{b} = \operatorname{curl} \vec{b}$$

$$\nabla p = \operatorname{grad} p$$

Einfühung in die Hydrodynamik

Strömungsmechanik ist ein Teil der Kontinuumsmechanik.



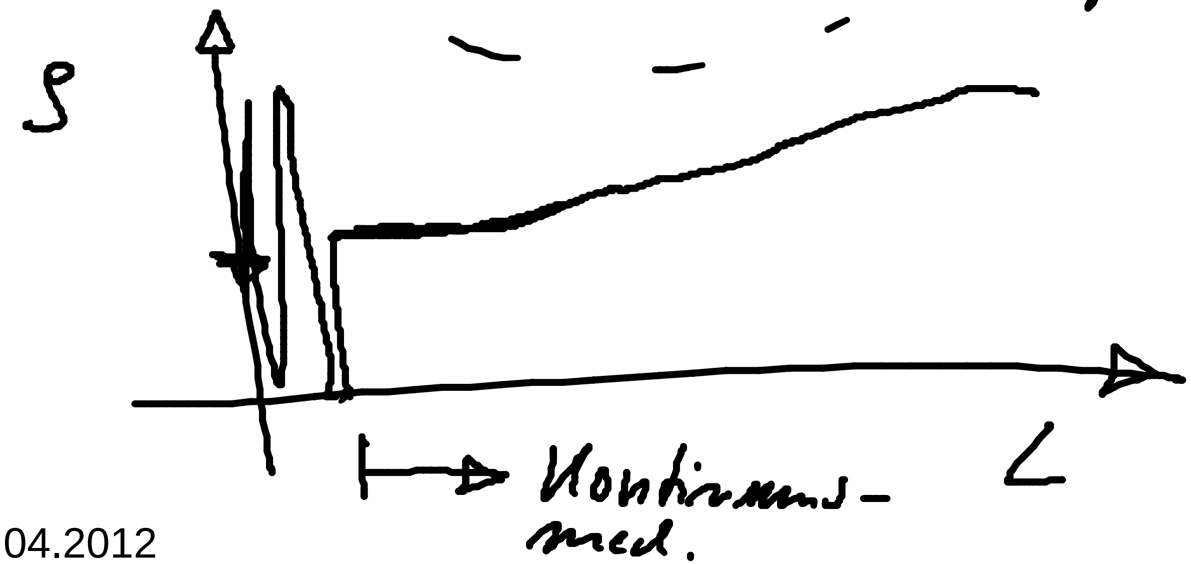
„materielle Teilchen"

Modell,

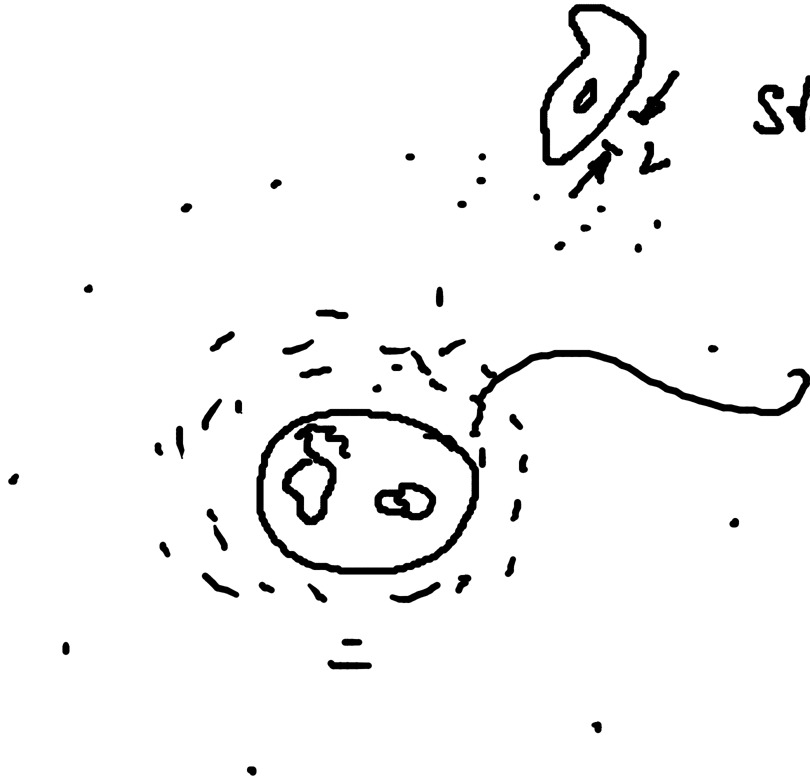
Eigenschaft z.B. Dichte ρ

Temperatur T

⋮



Prof. Dr. Ing. Peter Pelz



Statistische Physik

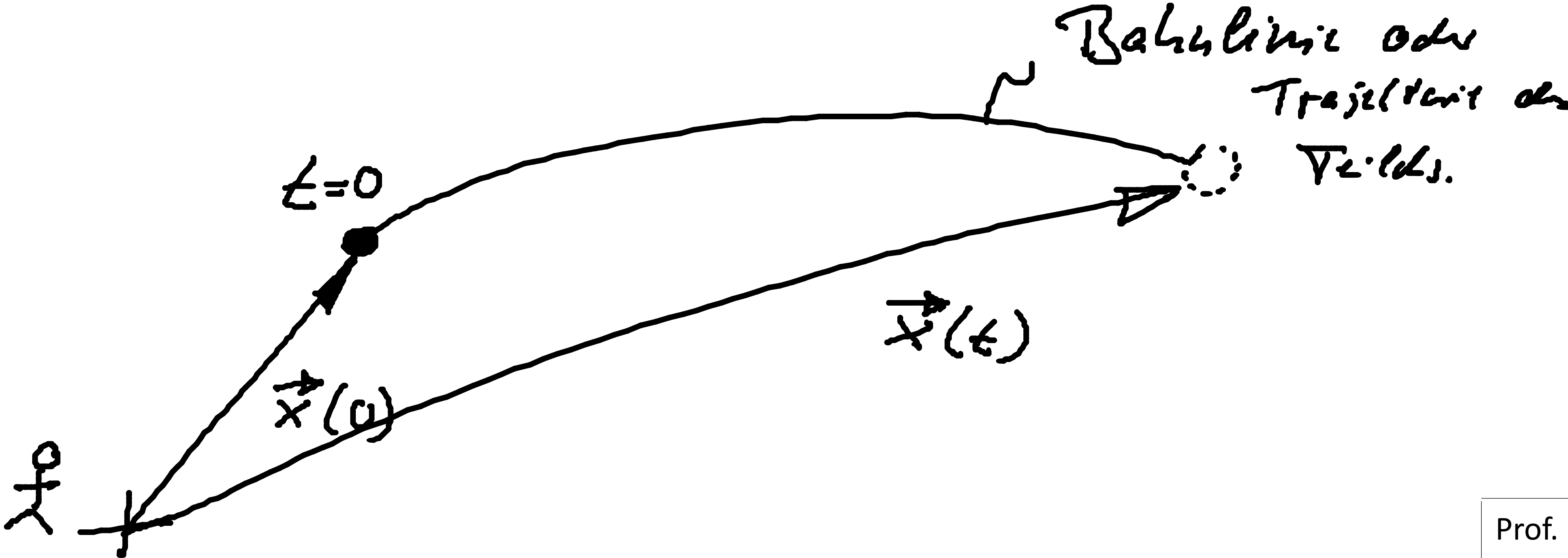
ρ Kontinuumsmodell.

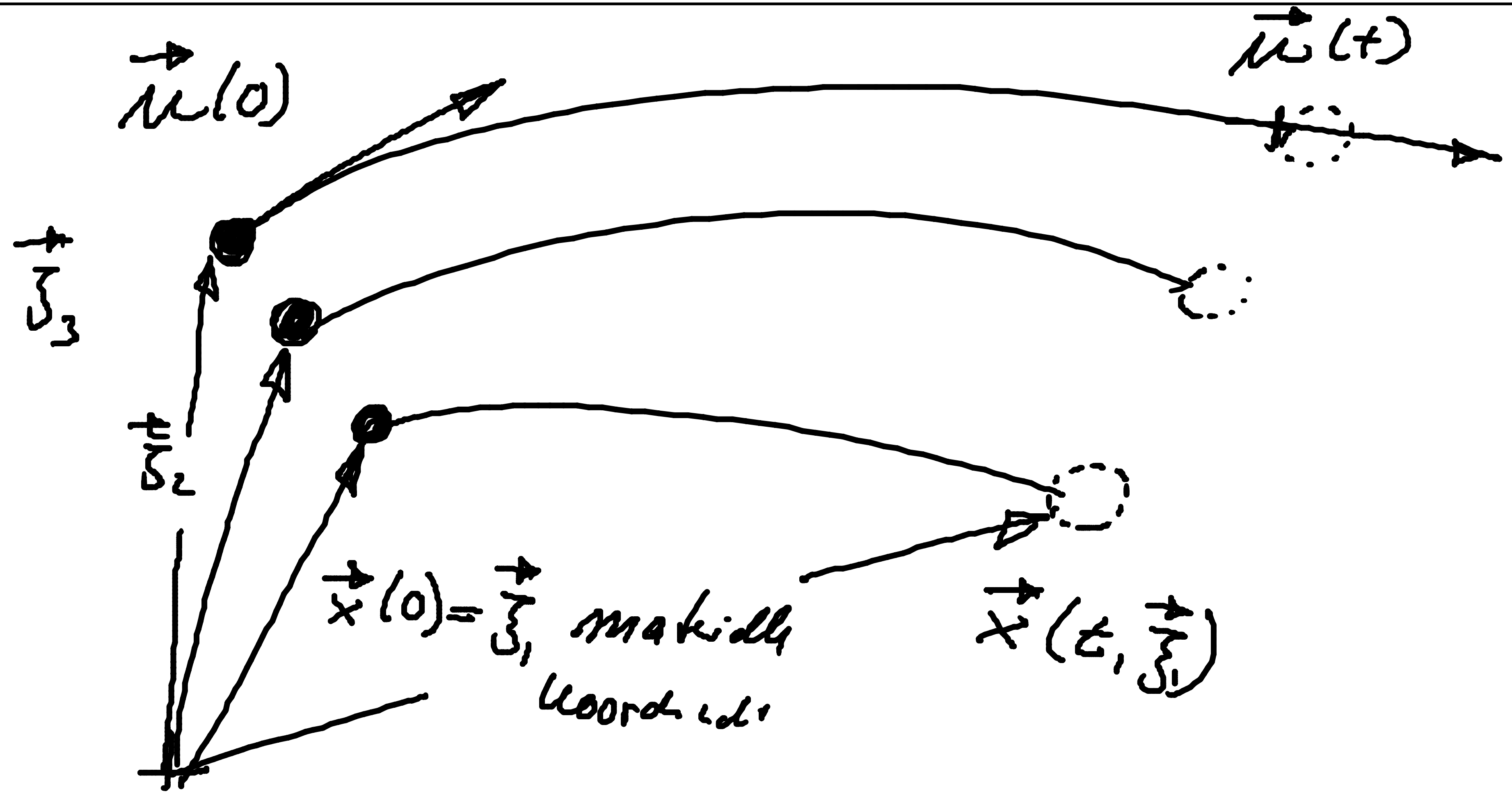
Vakuumtechnik $\neq$ Kontinuumsmech.

~~Grundl~~

Kinematische Konzepte

Bahnlinie eines Flüssigkeitsteilchens.



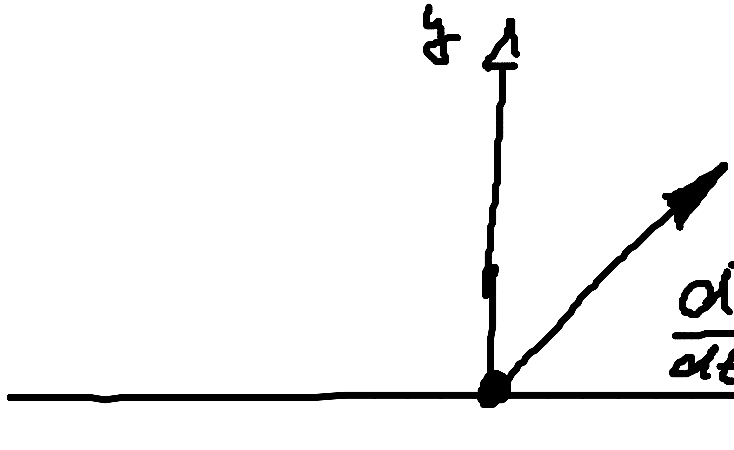


Die Geschwindigkeit $\vec u$ ist die zeitliche Änderung der Lagekoordinate (Ortsvektor)

$$\boxed{\frac{d\vec x}{dt}=\vec u,\quad \vec x(0)=\vec\xi}$$

Bsp.:

$$\vec{u} = ax\,\vec{e}_x - ay\,\vec{e}_y$$



$$\vec{x} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y \overset{!}{=} \vec{u} = ax\,\vec{e}_x - ay\,\vec{e}_y$$

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \qquad \frac{dx}{dt} = ax \qquad x(0) = \xi_x \qquad \frac{dy}{dt} = -ay$$

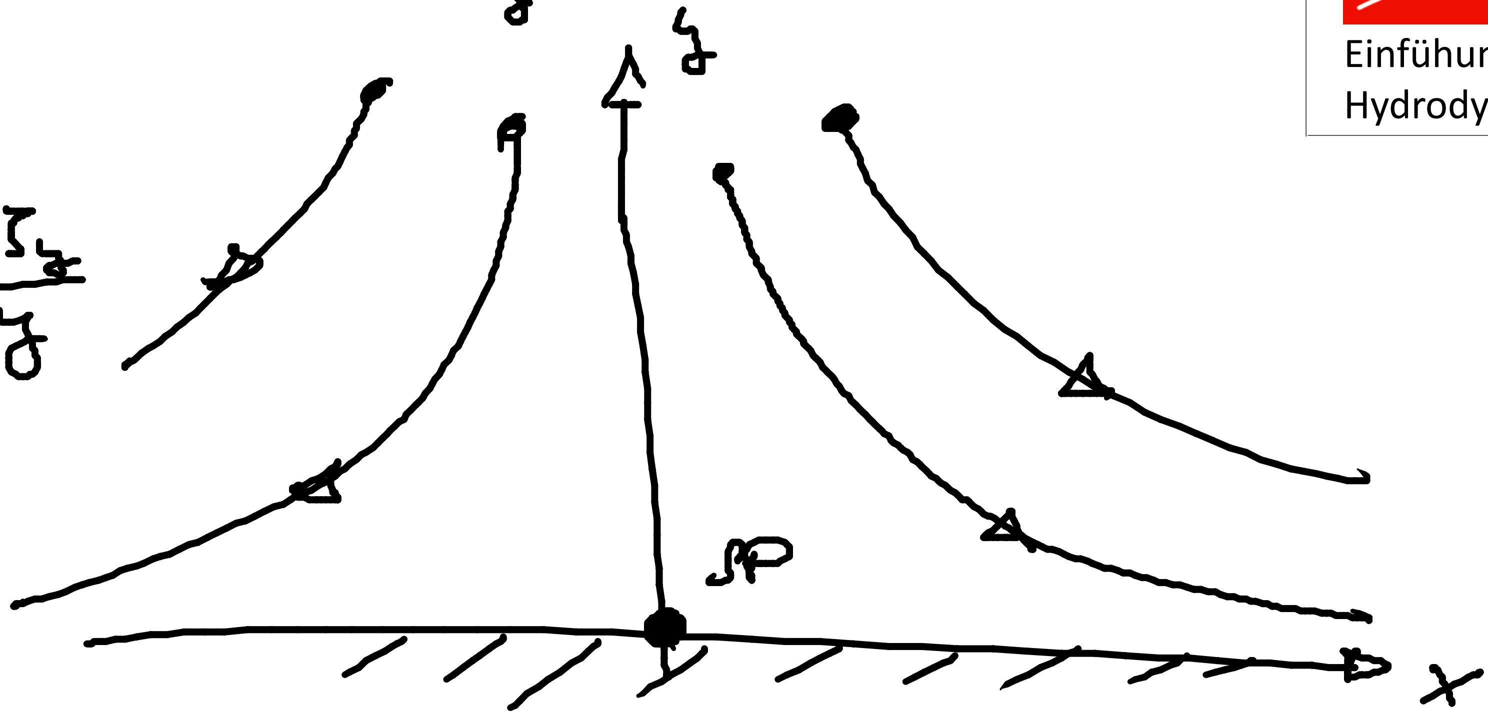
$$\frac{dy}{dt} = -ay \qquad y(0) = \xi_y$$

$$\frac{dx}{x} = a\,dt \;; \qquad \frac{dy}{y} = -a\,dt$$

$$\ln\frac{x}{\xi_x} = at \qquad \ln\frac{y}{\xi_y} = -at$$

$$\frac{x}{\xi_x} = \exp at \qquad \frac{y}{\xi_y} = \exp(-at)$$

$$\frac{x}{\xi_x} = \frac{\xi_y}{y}$$



ebene Staupunktströmung.