1. Hauptsatz: Wirkungsgrad

Energiegleichung für eine Stromröhre (1. Hauptsatz)

Erfahrungssatz (Axiom)

Die zeitliche Änderung von innerer Energie $E := \int_{V(t)} \rho e \, dV$

und kinetischer Energie $K := \int_{V(t)} \frac{\rho}{2} u^2 \, dV$

ist gleich der Arbeit

pro Zeit (Leistung), die durch Oberflächenkräfte $\oint_{S(t)} \vec{u} \cdot \underbrace{\vec{t}\, dS}_{d\vec{F}}$

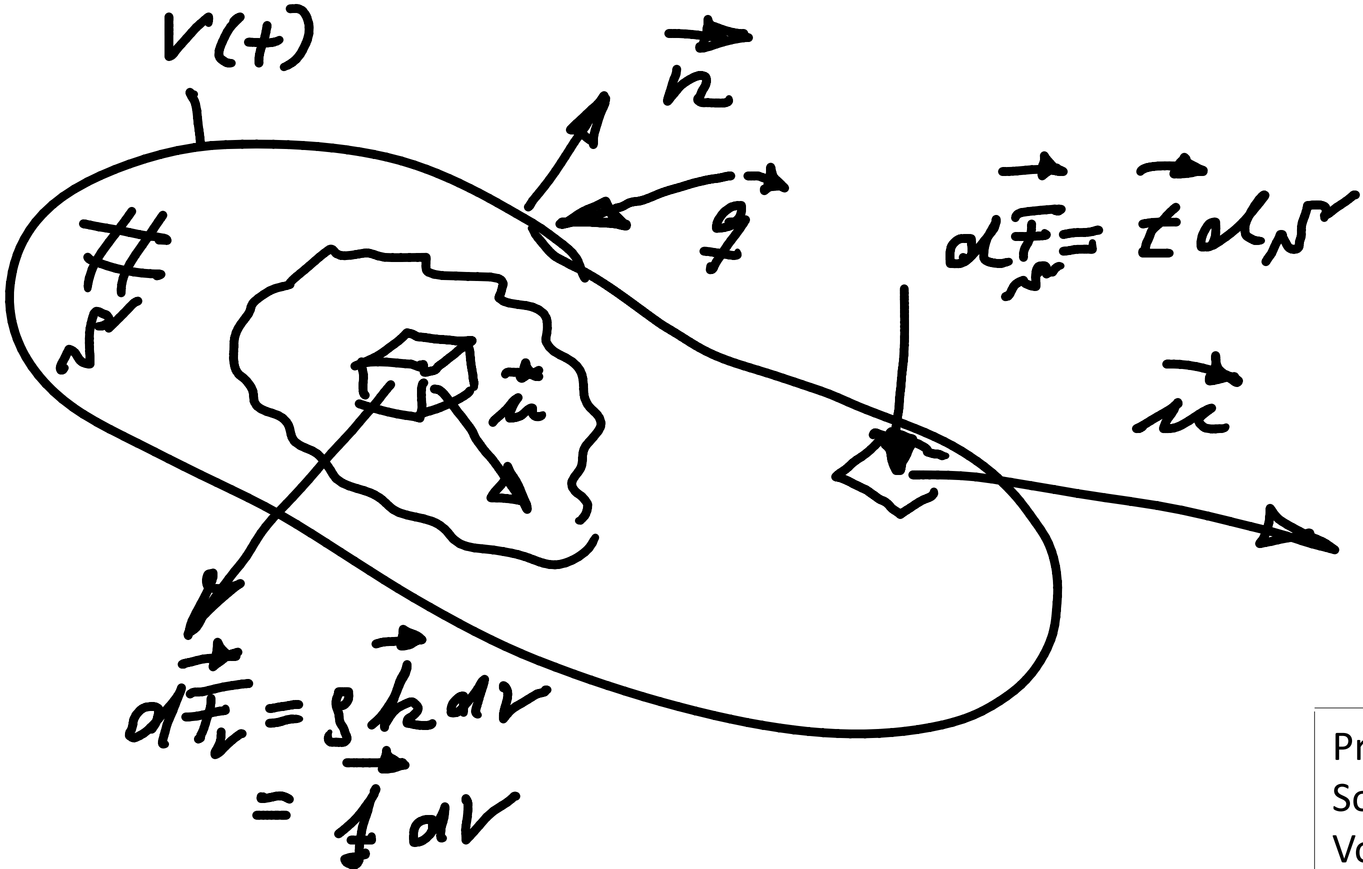
und durch Volumenkräfte $\int_{V(t)} \vec{u} \cdot \underbrace{\rho \vec{k}\, dV}_{d\vec{F}}$

an dem Körper verrichtet wird ....

plus der Wärme, die dem Körper pro Zeiteinheit zugeführt wird

$$\dot{Q} := -\oint_{S} \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS$$

Zugeführte Wärme > 0
abgeführte Wärme < 0.



+

$$\frac{D}{Dt}(K+E) = P + \dot{Q}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)dV = \oint_S \vec{u}\cdot\vec{t}\,dS + \int_V \vec{u}\cdot\rho\vec{k}\,dV - \oint_S \vec{q}\cdot\vec{n}\,dS$$

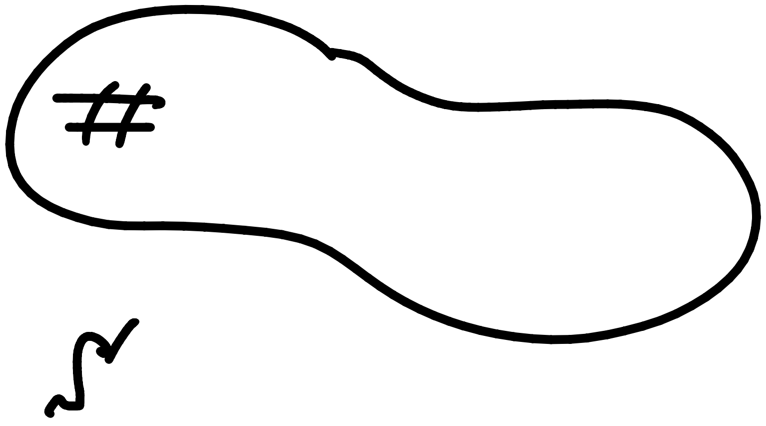
e spezifische innere Energie: Für kalorisch ideale Materialien ist $e \sim$ Absoluttemperatur T

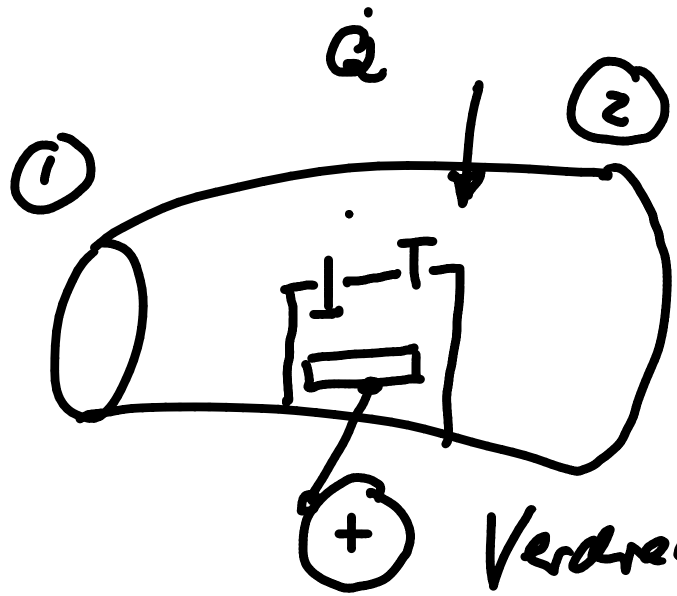
$$\frac{D\rho}{Dt} \neq 0 : \quad e = c_v T + e_0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 : \quad e = cT$$

Anm.: Die Axiome (Konti, Impulssatz ...) sind aus Symmetriebedingungen ~~herleitbar~~

Sind äquivalent zu Symmetriebedingungen (vgl. Physikbuch von Landau.)



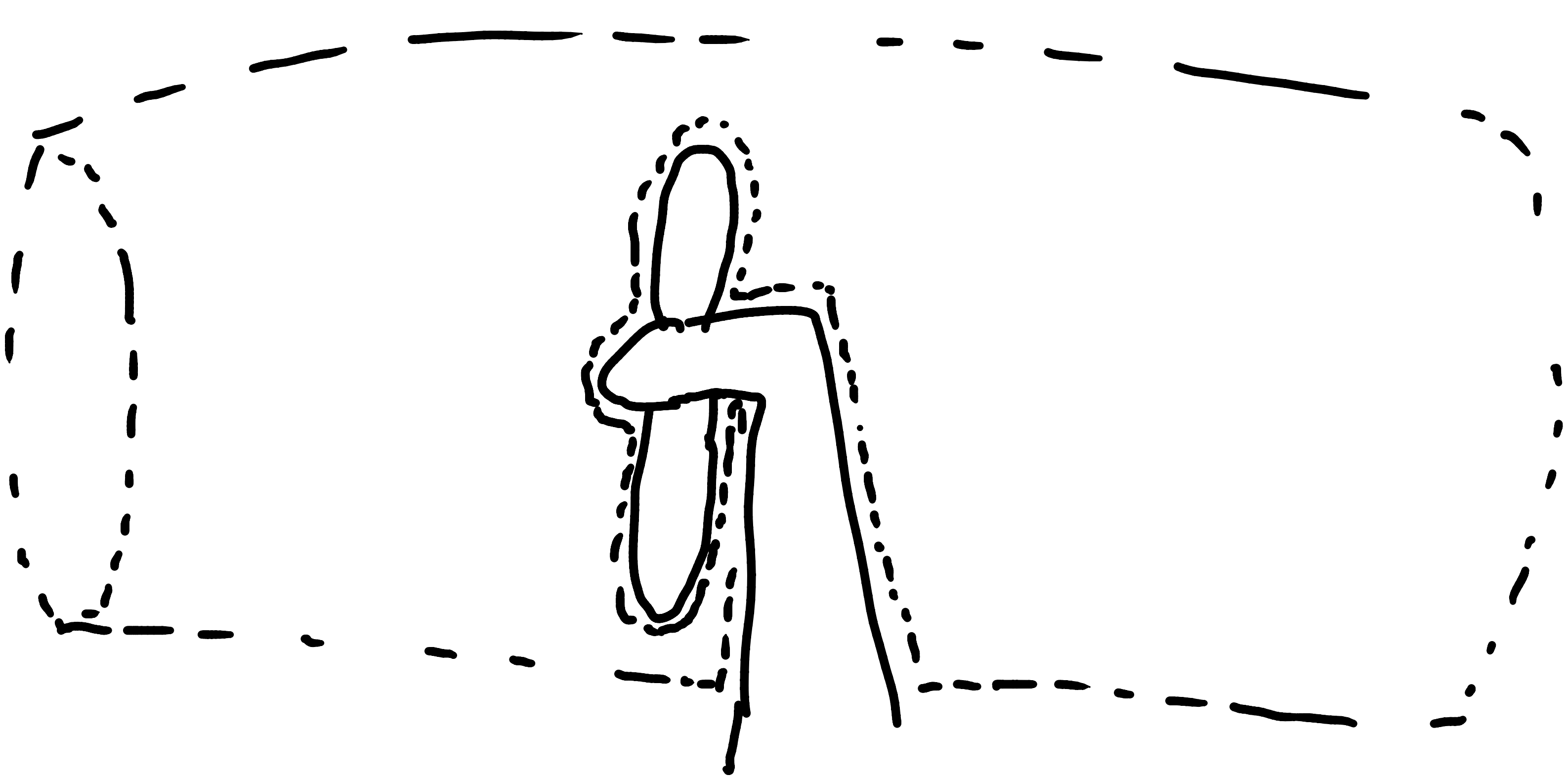


Verdrängungsmaschine

$$S = A_1 + A_2 + S_W + S_S$$

Eintritt Austritt Wand Shaft (Welle)

Turbomaschine

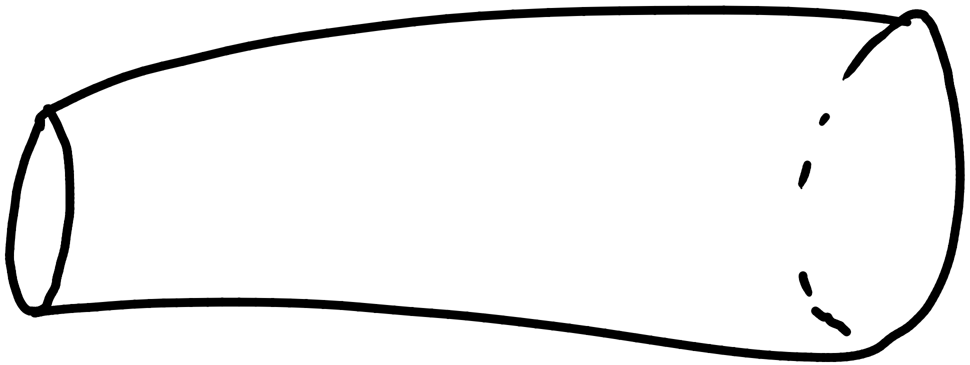


$$P_w = \int_{\partial V_w} \vec{t} \cdot \vec{u} \, dA$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme



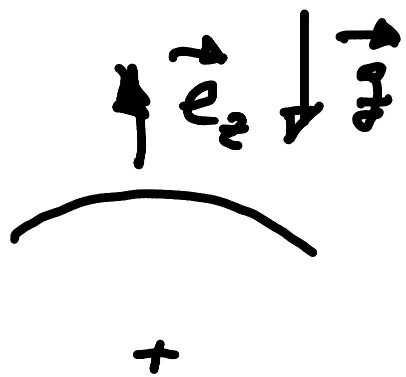
$\downarrow \; \vec{k} = -\nabla\psi$

Annahme: Die ~~Volumen~~ Massenkraft $\vec{k}$ hat ein eindeutiges Potential ψ, so dass

$$\vec{k} = -\nabla\psi$$

z.B.: Spezifische Massenkraft der Schwere

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z \Rightarrow \psi = gz + \text{const.}$$



Notwendige Bedingung für ein Potential

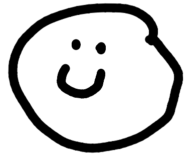
$$\mathrm{rot}\,\vec{k} = 0$$

z.B. Zentrifugalkraft

$$\vec{k} = r\Omega^2 \vec{e}_r \quad \rightsquigarrow \quad \psi = -\frac{1}{2} r^2 \Omega^2 + \mathrm{const}$$

Anm.: Die Integrationskonstante ist beliebig.

$$\vec{k} = \rho_e \left(\vec{E} + \vec{w}_e \times \vec{B} \right) \to \psi$$



ρ_e Ladungsdichte $\dfrac{\text{Zahl der Ladungen}}{\text{Volumeneinheit}}$

$\vec{E}$ elektrische Feldstärke

$\vec{w}_e$ Wanderungsgeschwindigkeit der Ladung

$\vec{w}_e \rho_e = \vec{i}$ Stromdichtevektor

$\vec{B}$ magnetische Feldstärke

Achtung: Nicht alle Massenkräfte haben ein Potential

z.B. Corioliskraft hat kein Potential.

Kontinuität in differentieller Form.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\rho + \rho\,\nabla\cdot\vec{u} = 0$$

Zur Leistung der Volumenkräfte

$$\int_V \rho\,\vec{k}\cdot\vec{u}\,dV = \int_V -\nabla\psi\cdot\rho\vec{u}\,dV = -\int_V \nabla\cdot(\psi\rho\vec{u})\,dV + \int_V \psi\,\overbrace{\nabla\cdot(\rho\vec{u})}^{-\partial\rho/\partial t}\,dV$$

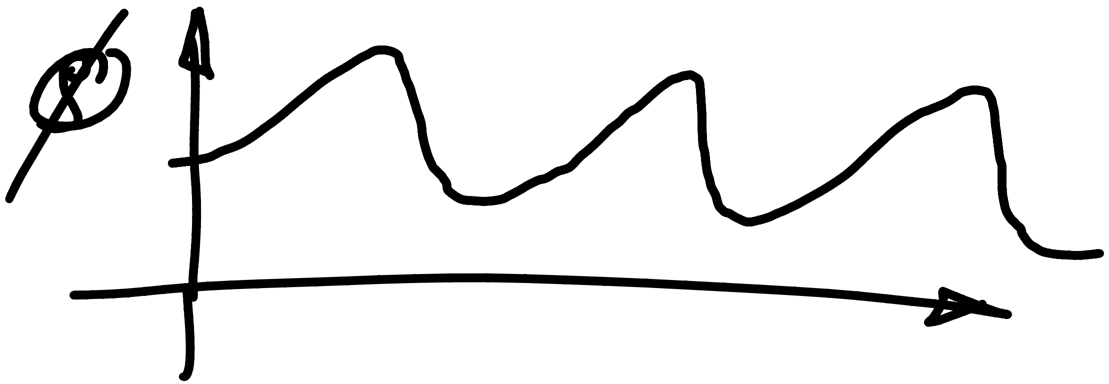
Ziel: Umwandlung in ein Oberflächenintegral

Satz von Gauß $\nabla\cdot(\ )\,dV = \vec{n}\cdot(\ )\,dS$

Gesetz der Volumenkräfte

$$\int_V \rho \vec{k}\cdot\vec{u}\, dV = \underbrace{-\oint_S \rho\psi\vec{u}\cdot\vec{n}\, dS}_{\text{Flußintegral vgl. Reynoldsschen Transporttheorem.}} - \int_V \psi \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV$$

2. Annahme: Im zeitlichen Mittel stationärer Prozess.



$$\overline{\frac{\partial\phi}{\partial t}} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)dV + \oint_{S} \rho\psi\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{V} \rho\frac{\partial\psi}{\partial t}dV =$$

$$= \int_{A_1+A_2} -p\vec{n}\cdot\vec{u}\,dS + \underbrace{\int_{S_W} \vec{t}\cdot\vec{u}\,dS}_{P_W \text{ Wellenleistung}} + \dot{Q}$$

3. Annahme:

An A_1 und A_2 herrscht eine ausgeglichene Strömung. $\rightsquigarrow$ Stromlinien sind //

$\rightsquigarrow \vec{t} = -p\vec{n}$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\psi\, dV +$$

$:= h$ Enthalpie

$$+ \oint \underbrace{\left(e+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+\psi\right)}_{h_t} \rho\, \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS' = P_S + \dot{Q}$$

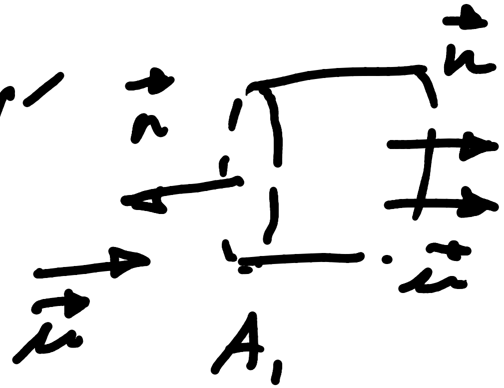
$A_1 + A_2$ $h_t :=$ Totalenthalpie

Im zeitlich mittel stationären Prozess.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int (\ )\, dV = 0.$$

Prof. Dr.-Ing. Peter Pelz

$$\dot{m} = -\int_{A_1} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA = + \int_{A_2} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA$$



$$\boxed{\dot{m}\left(h_{t2} - h_{t1}\right) = P_S + \dot{Q}}$$

$$h_{t2} - h_{t1} = w + q$$

$$w := \frac{P_S}{\dot{m}} \qquad q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

Im Folgenden: 1. Wirkungsgrad bei Fluidenergiemaschinen.

2. Anwendungsbeispiel

↳ Druckspeicher oder Luftfeder.

Wirkungsgrad von Fluidenergiemaschinen

- mit Dichteänd. $\frac{D\rho}{Dt} \neq 0$
- ohne Dichteänd. $\frac{D\rho}{Dt} = 0$
  - Wärme
    - mit Wärme $\dot{Q} \neq 0$
    - ohne Wärme $\dot{Q} \equiv 0$
- Kraftmaschine $P_S < 0$
- Arbeitsmaschine $P_S > 0$
  - Bewegung
    - translatorisch
    - rotatorisch
- Turbomaschine: Drallsatz
- Verdrängermaschine: Hydrostatik
  - Schnellläufigkeit σ
    - „langsam“
    - „schnell“

Der Wirkungsgrad ist ein dimensionsloses Maß für die Dissipation in einer Maschine.

Unterscheidung nach Kraft- und Arbeitsmaschine ist notwendig:

$$\eta^{\pm 1} := \frac{\dot{m} g H}{P_{sr}}$$

$+1$ Arbeitsmasch.: $P_{sr} > 0$

-1 Kraftmasch.: $P_{sr} < 0$.

$$[gH] = \frac{L^2}{T^2}$$

$$gH := \underbrace{\left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} + \psi_2\right)}_{\varsigma_2} - \underbrace{\left(\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} + \psi_1\right)}_{\varsigma_1}$$

$$gH = Y$$

H Förderhöhe > 0 Arbeitsmaschine

H Fallhöhe < 0 Kraftmaschine

$$gH = (h_{t2} - h_{t1}) - (e_2 - e_1)$$

$\dot{Q} \equiv 0$ einsetzen in den 1. H.S.:

$\rho = \text{const.}$

$$\eta^{\pm 1} P_S = \dot{m} g H$$

Speziell $\rho \equiv \text{const}$

$$\boxed{\begin{aligned} \eta^{\pm 1} P_S &= Q \rho g H \\ &= Q (p_{t2} - p_{t1}) \end{aligned}}$$