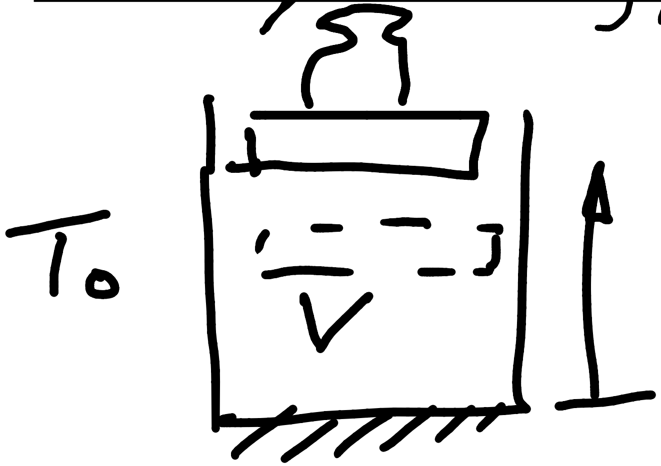
Störungsrechnung; Drallsatz



$$V = V_0 + zA$$

$$p_0 = p_a + \frac{mg}{A}$$

1. Konti $\quad \dot{\rho} V + A \dot{z} \rho = 0.$

2. Energie $\quad \dot{p} V + \gamma A \dot{z} p + (\gamma - 1) k S (T - T_0) = 0$

3. thermische Zustandsgl. $\quad p = \rho R T$

$q_n = k(T - T_0)$

Newton

Anfangsbeding.: $\quad p(0) = p_0$

$$T(0) = T_0$$

Linearisieren: Störansatz

Perturbation method

Lit. Milton van Dyke: Perturbation-method.

Störungsprobleme

reguläre

Typ der Dgl. bleibt erhalten.

singuläre

Typ der Dgl. ändert sich.

Grenzschichttheorie

Ludwig Prandtl.

Empfehlung: Milton van Dyke:
Album of Fluid Motion

---

① $p = p_0 + \tilde{p}$

$T = T_0 + \tilde{T}$

$\varrho = \varrho_0 + \tilde{\varrho}$

$V = V_0 + \tilde{V}$ $\qquad \tilde{V} = \hat{z} A \sin(\Omega t)$

$\mathcal{O}(\tilde{p}) = \varepsilon$

$\mathcal{O}(\tilde{p})$ Ordnung von $\tilde{p}$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_\infty^2}{L}$$

$\sim$ von der Ordnung

Spurk: Kap 5: hydrodynamische Schmierung

Kap 12: Grenzschichttheorie.

Einsetzen des Störansatzes in das Algebro Dgl-System

$$\dot{\tilde{\varrho}}\left(V_0+\tilde{V}\right) + \dot{\tilde{V}}\left(\varrho_0+\tilde{\varrho}\right) = 0$$

$$\dot{\tilde{\varrho}} V_0 + \dot{\tilde{V}} \varrho_0 + O(\varepsilon^2) = 0$$

$$\underline{\dot{\tilde{\varrho}} V_0 + \dot{\tilde{V}} \varrho_0 \approx 0}$$

$$\dot{\tilde{p}} V_0 + \dot{\tilde{V}} \gamma p_0 + (\gamma-1) \varrho k \tilde{T} = 0$$

$$\tilde{p} = \tilde{\varrho} R T_0 + \varrho_0 R \tilde{T}$$

$$\dot{\tilde{\varrho}} V_0 + \dot{\tilde{V}} \varrho_0 = 0$$

Totzeitverhalten.

Harmonische Anregung des linearen Systems.

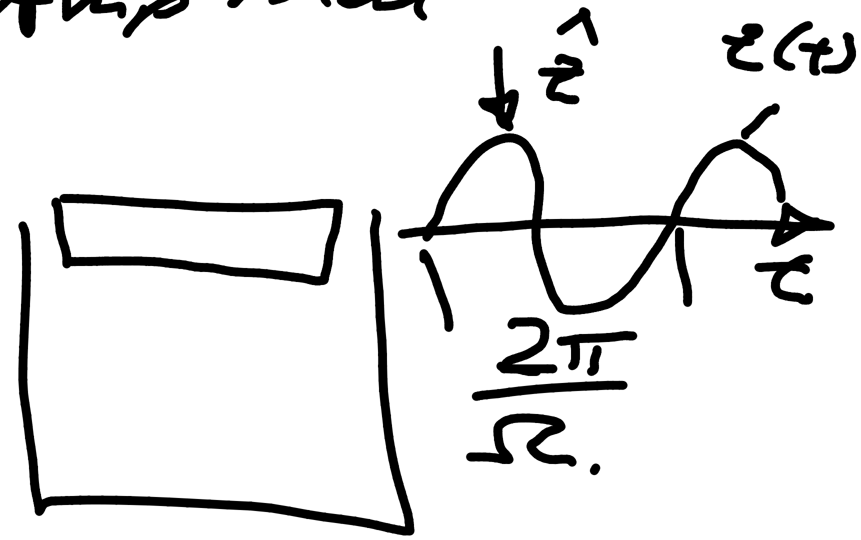
Ansatz. $$\tilde{p} = p_0 \, p_+ \, e^{i\Omega t}$$

p_+ ist eine dimensionslose Amplitude

$$\tilde{T} = T_0 \, T_+ \, e^{i\Omega t}$$

$$\tilde{V} = V_0 \, V_+ \, e^{i\Omega t}$$

$$\tilde{\varrho} = \varrho_0 \, \varrho_+ \, e^{i\Omega t}$$



$$\underbrace{\cancel{i\Omega}\,\cancel{\rho_0}\,\rho_+\,\cancel{e^{i\Omega t}}}_{\dot{\tilde{\rho}}}\;\cancel{V_0} + \cancel{V_0}\,V_+\,\cancel{i\Omega}\,\cancel{\rho_0}\,\cancel{e^{i\Omega t}} = 0$$

$\Pi_2 \leadsto f_r = \frac{\Omega}{2\pi}$

Π_1

$$\rho_+ + V_+ = 0$$

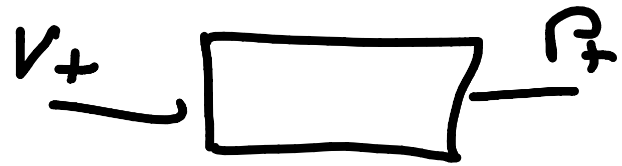
$$p_+ + \gamma V_+ - i\,(\gamma-1)\,\frac{\lambda k T_0}{\Omega V_0 p_0}\,T_+ = 0$$

$$p_+ = \rho_+ + T_+$$

$\leadsto$ Durch „scharf Hinschauen" folgen aus den Dgln. die dimensionslosen Produkte.

$\longrightarrow$ <u>inspektionelle Dimensionsanalyse</u>.

Übertragungsverhalten



$$K_+ := c_+ = \frac{\text{dynamische Größe}}{\text{kinematische Größe}} = \frac{P_+}{V_+}$$

▽ Kompressionsmodul

$$K := -V\frac{dp}{dV}$$

Nachgiebigkeit

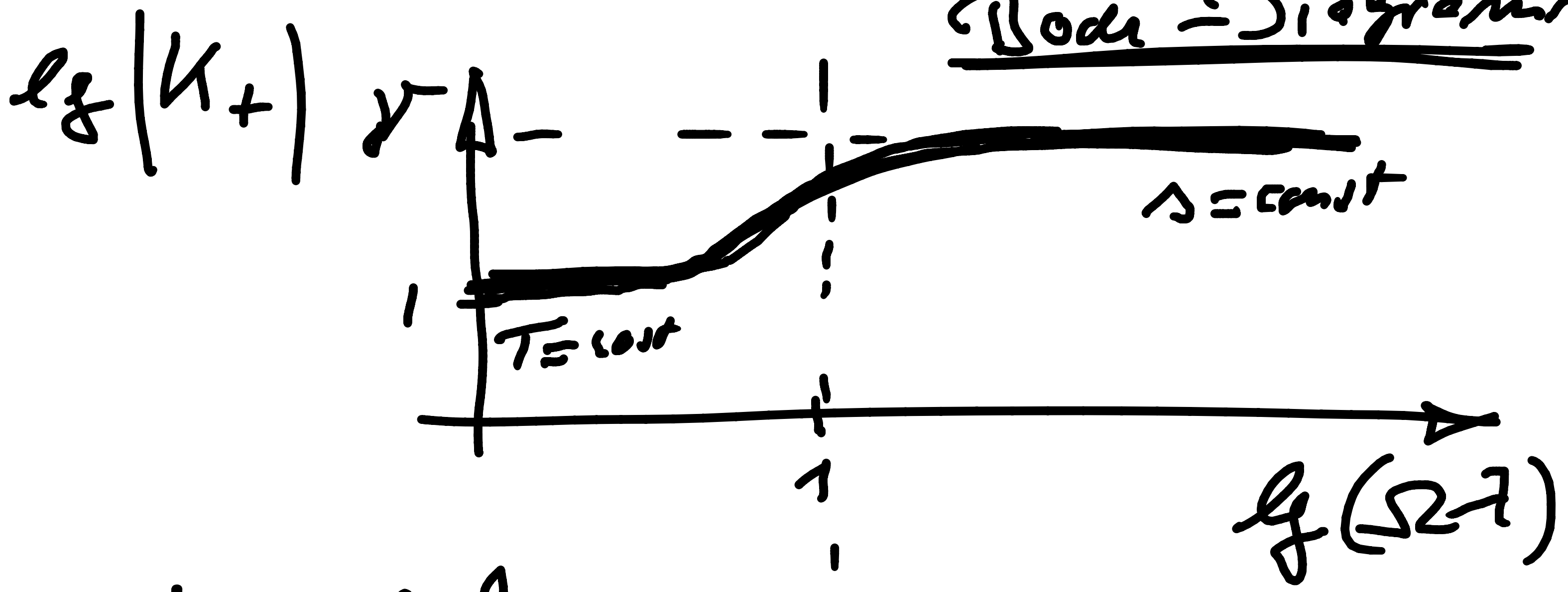
$$\kappa = \frac{1}{K}$$

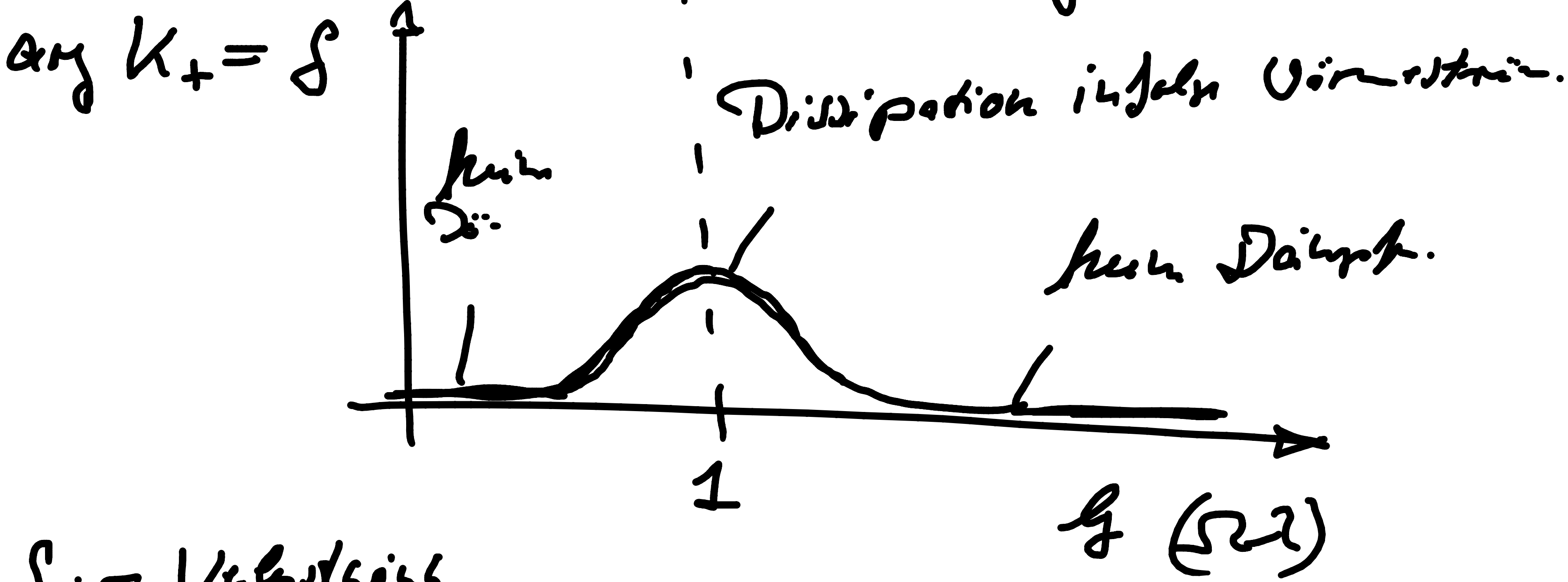
$$K_+ = \frac{p_+}{V_+} = \frac{1 + i\Omega\lambda}{1 + \frac{1}{\gamma} i \Omega \lambda} \qquad i\Omega\lambda \mathrel{\hat{=}} \Pi_2, \quad \frac{1}{\gamma} \mathrel{\hat{=}} \Pi_1$$

$$\lambda := \frac{V_0 \, \rho_0 \, c_p}{A\, k}$$

thermische Relaxationszeit des Systems.

Bode-Diagramm





δ: - Verlustwinkel.

Rückblick:

Kontinuität

Energiegleichg.

Drallsatz

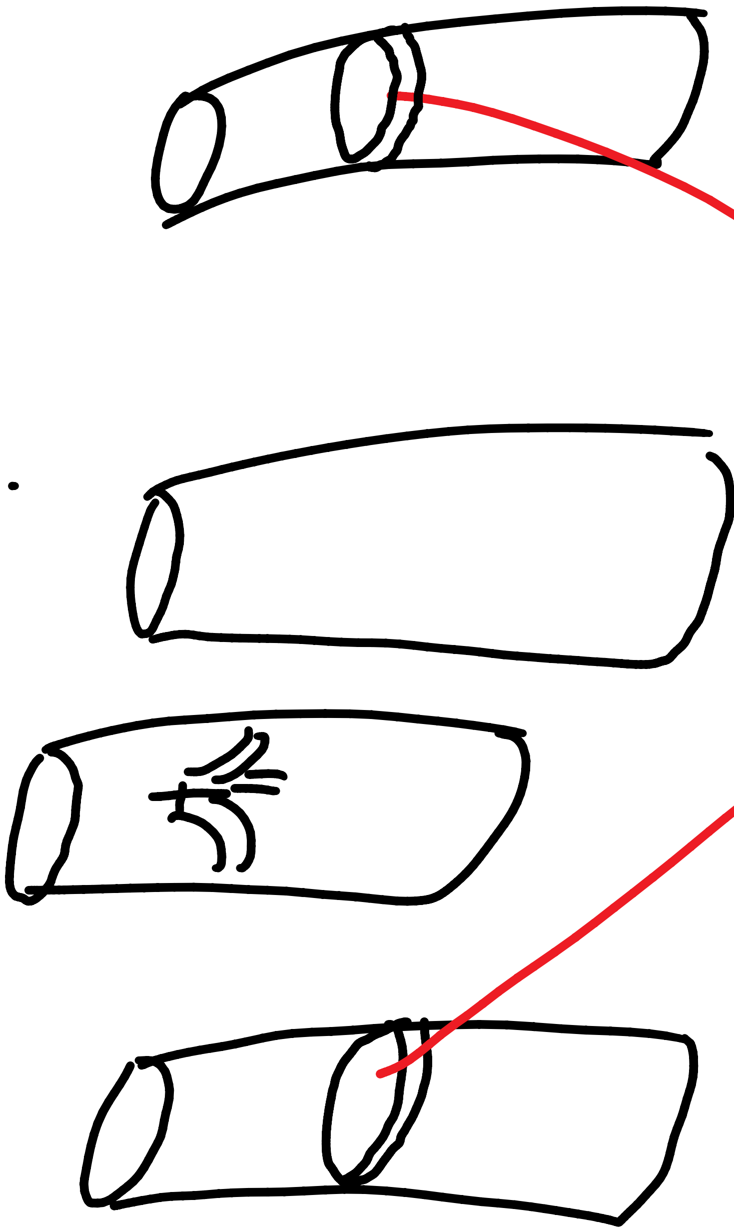
Impulssatz

2.-Hauptsatz

Stromlinie

eine Turbom.

Charakteristik



Drallsatz

Truesdell: Über die Historie des Drallsatzes.

> 1756 Leonard Euler hat den Drallsatz als unabhängiges Axiom erkannt

axiale Komponente des Drallsatzes:
Eulersche Turbinengleichung.

In der Starrkörpermechanik kann der Drallsatz aus dem Impulssatz hergeleitet werden.

In der differentiellen Formulierung der Drallsatz $\Longleftrightarrow$ Symmetrie des Spannungstensors.

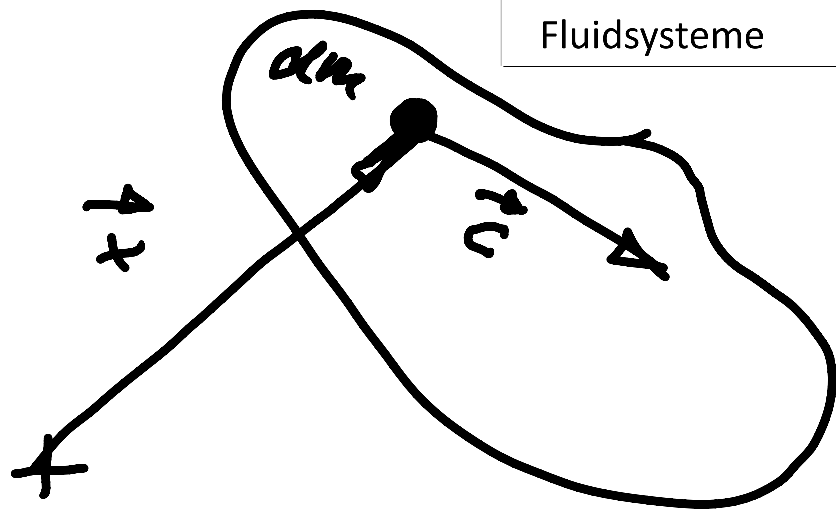
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Die zeitliche Änderung des Dralles eines materiellen Körpers ist gleich dem Moment auf den Körper

Drall $\vec{D} = \int d\vec{D}$

$$= \int \vec{x} \times d\vec{I} = \int_V \vec{x} \times \rho \vec{c} \, dV$$

$$\cancel{\neq \vec{x} \times \underbrace{\int d\vec{I}}_{\vec{I}}}$$



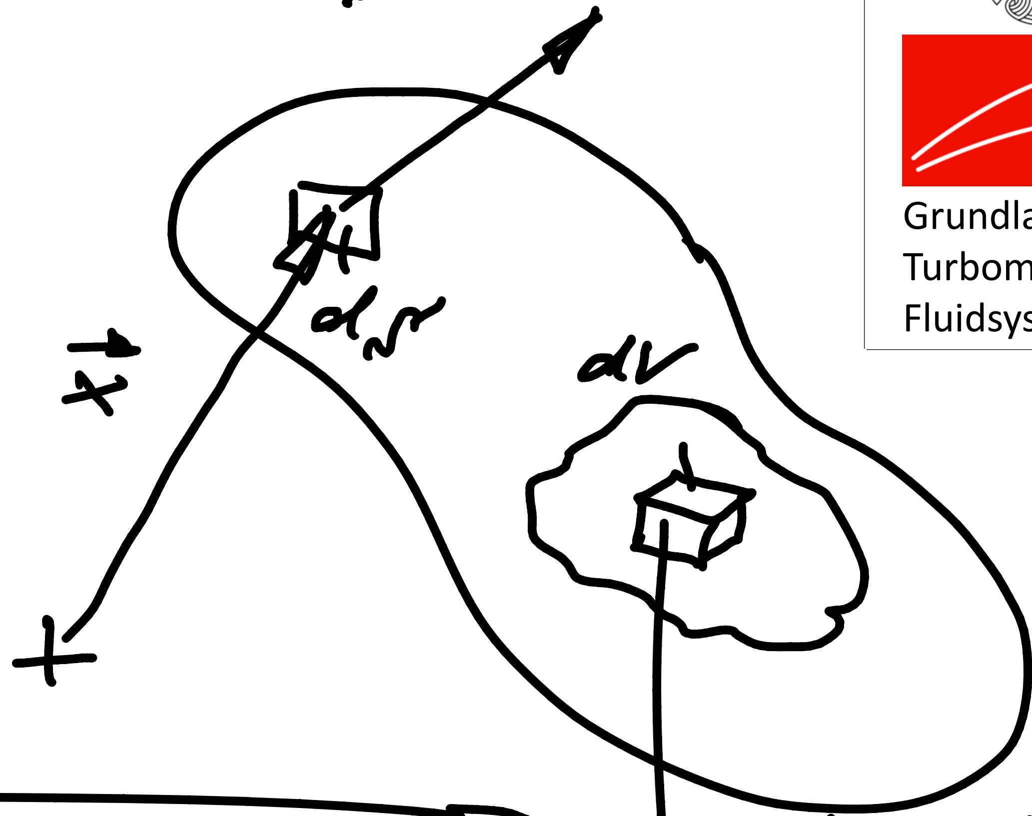
$$\int x \sin x \, dx \neq x \int \sin x \, dx$$

Moment

$$\vec{M} = \oint_S \vec{x} \times \vec{t} \, dS \; +$$

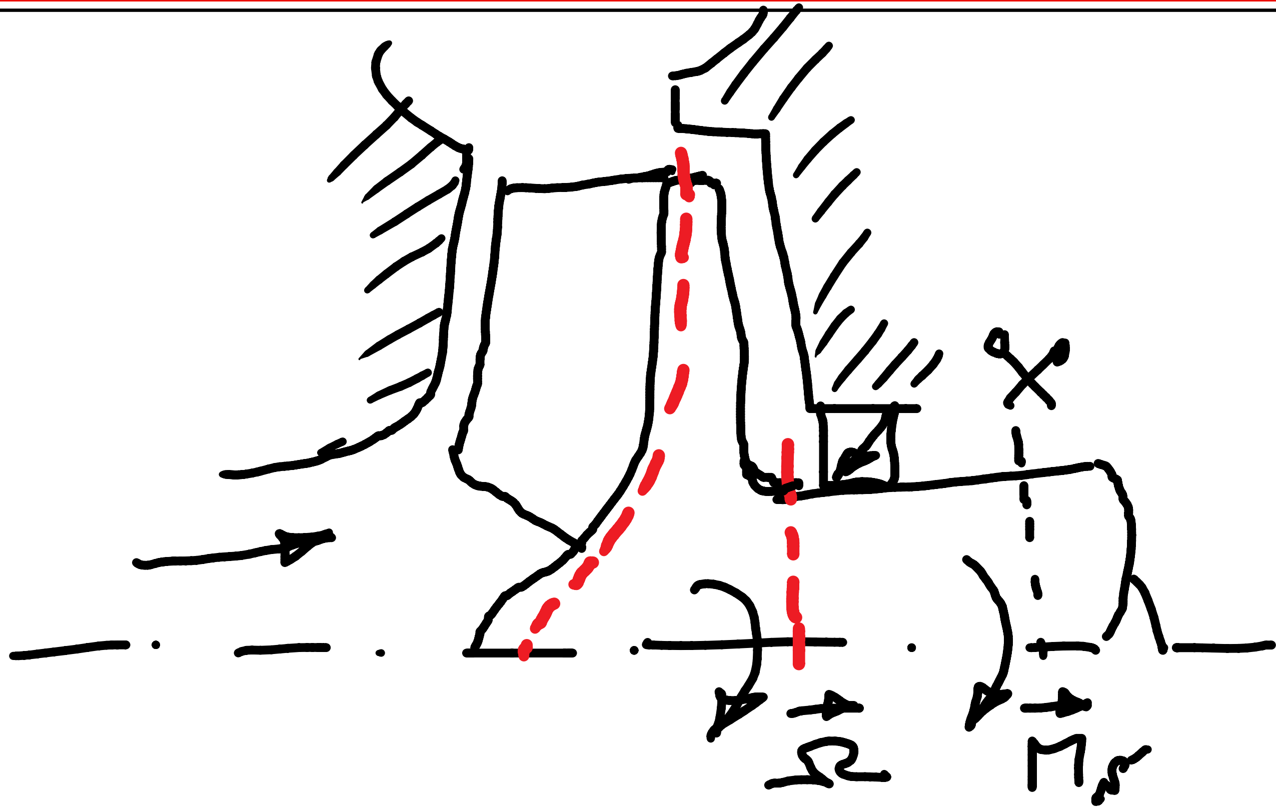
$$+ \int_V \vec{x} \times \rho \vec{k} \, dV$$

$$d\vec{F}_S = \vec{t} \, dS$$



$$d\vec{F}_V = \rho \vec{k} \, dV$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \vec{x} \times \rho \vec{c} \, dV = \oint_S \vec{x} \times \vec{t} \, dS + \int_V \vec{x} \times \rho \vec{k} \, dV$$



M.

$$P_s = \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_s$$
$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$$

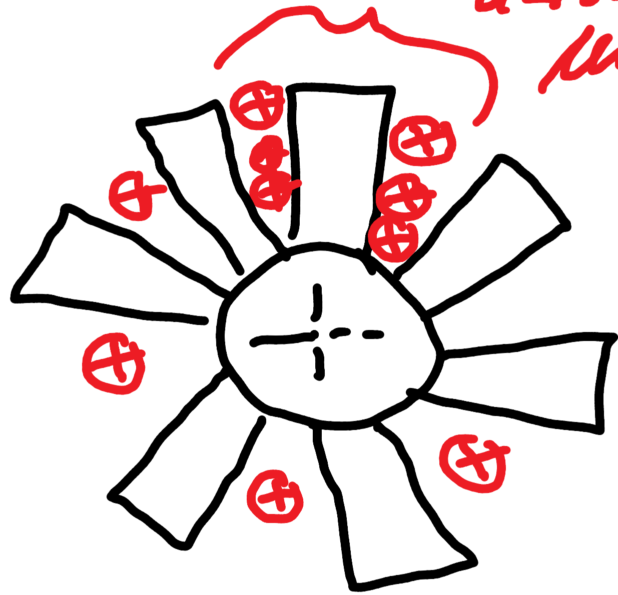
$$P_s = \underbrace{\Omega \vec{e}_z \cdot \vec{M}_s}_{} = \Omega M_{sz} \;?$$

Drallsatz

Für die Leistungsübertragung ist die axiale Komponente des Drallsatzes wichtig!

Wenn ein System ideal gewuchtet ist, dann $\vec{D} = D_z \vec{e}_z$.

$$\underset{\sim}{\Theta} = \Theta_{zz} \vec{e}_z \vec{e}_z + \ldots$$



hydraulische od. aerodynamische Unwucht.

Hydraulische Unwucht tritt beim sog. rotating stall / Ventilatorheulen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FLUID SYSTEM TECHNIK

Grundlagen der Turbomaschinen und Fluidsysteme

$\overline{\frac{\partial}{\partial t}}$: $dM_{Sz} = d\dot{m}\left(r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}\right)$

Eulersche Turbinengleichung