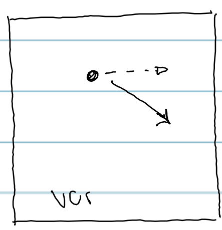
PC III 27.05.

5. Kinetische Gastheorie

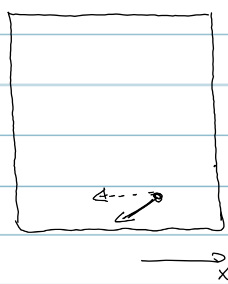
5.1 Gasdruck

Stöße von Teilchen mit einer Wand $\longrightarrow$ Kraft



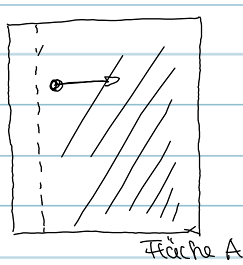
|-- x-Komponente

Impuls: $p_x = m \cdot v_x$



Impuls: $-p_x$

Änderung: $\Delta p_x = 2m|v_x|$



in Δt zurückgelegte Strecke: $s = |v_x| \Delta t$

Volumen, aus dem die Teilchen die betrachtete Wand in Δt erreichen können: $V = A|v_x|\Delta t$

Teilchen pro Volumeneinheit $N_V = \frac{N}{V} = \frac{nN_L}{V}$

$$N = \frac{nN_L}{V} \cdot A\,|v_x|\,\Delta t$$

$$\text{Gesamtimpulsänderung} = \cancel{2}m\,|v_x| \cdot \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \frac{nN_L}{V} A\,|v_x|\,\Delta t$$

$$\text{Kraft} = \frac{\text{Impulsänderung}}{\text{Zeitintervall}} = m\,|v_x|^2 \frac{nN_L}{V} \cdot A$$

$$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{F}{A} = m \cdot |v_x|^2 \frac{nN_L}{V} = \frac{nM|v_x|^2}{V}$$

gemessener Druck ist Mittelwert!

$$p = \frac{n \cdot M \cdot \langle v_x^2 \rangle}{V}$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \quad \boxed{c^2 = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle}$$

c: quadratisch gemittelte Geschwindigkeit

$$\Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} c^2$$

$$\boxed{pV = \frac{1}{3} n M c^2}$$

ideales Gasgesetz: $pV = nRT$

$$\cancel{n} R T = \frac{1}{3} \cancel{n} M c^2$$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$

mittlere Translationsenergie.

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} m c^2 = \frac{3}{2} kT$$

Bsp.: N_2, 25°C

$$c = \sqrt{\frac{3RT}{m}} = 515 \ \frac{m}{s}$$

5.2 Geschwindigkeitsverteilung

$$F(v_x, v_y, v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z = f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f(v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

v_x, v_y, v_z: unabhängige Variablen; $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$$F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\, dv_x\, dv_y\, dv_z = f(v_x)\, f(v_y)\, f(v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z$$

wird erfüllt: $f(v_x) = \cancel{k}\, \exp(-\gamma v_x^2)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x)\,dv_x = 1 \longrightarrow K\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\gamma v_x^2\right) dv_x = 1$$

Int.: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$

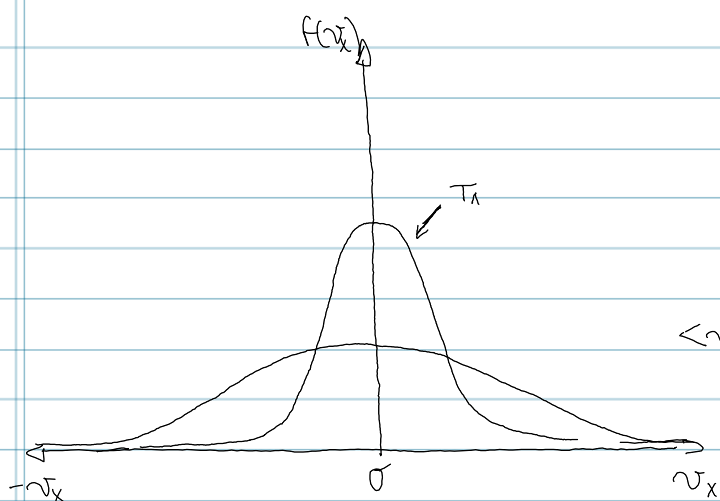
Boltzmann

$$f(v_x) = K\cdot \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2kT}\right) \longrightarrow \gamma = \frac{m}{2kT}$$

$$K = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/2} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2kT}\right)}$$

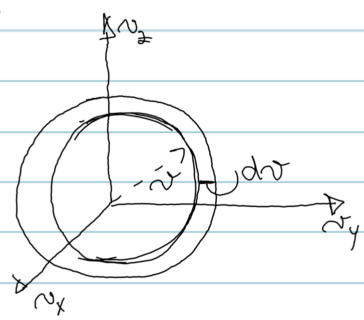
Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung 1D



$T_1 < T_2$

$\langle v_x \rangle = 0$

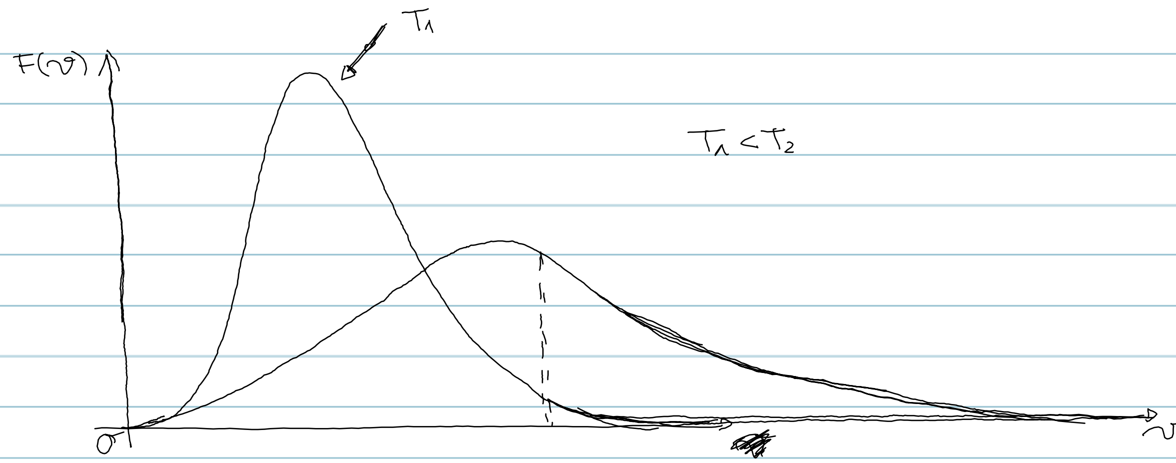
$F(v) = ?$



$$\underbrace{4\pi v^2 dv}_{\text{Volumen Kugelschale}} = dv_x\,dv_y\,dv_z$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(v) &= 4\pi v^2 f(v_x) f(v_y) f(v_z) \\ &= 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v^2}{2kT}\right) \end{aligned}}$$

3D Maxwell-Boltzmann-Vert.



Teilchen ~~Moleküle~~ sind zur Reaktion fähig, wenn ihre Geschwindigkeit rechts der gestrichelten Linie liegt

mittlere Geschwindigkeit

$$\langle v\rangle = \bar{v} = \int_0^{+\infty} v\, F(v)\, dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

Int.: $\int_0^{\infty} x^3 \cdot \exp\left(-ax^2\right) dx = \frac{1}{2a^2}$

$$\langle v\rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = \boxed{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \langle v\rangle}$$

Bsp.: N_2, 25°C

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 475\ \frac{m}{s}$$

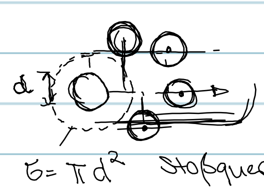
analog: $\langle v^2\rangle = \int_0^{\infty} v^2\, F(v)\, dv$

5.3 Mittlere freie Weglänge

$$\lambda = \bar{v}\,\Delta t = \frac{\bar{v}}{z}$$

mittlere freie Weglänge

Stoßfrequenz „Stoßzahl“, Stöße pro s



$\Rightarrow$ Stoßvolumen: $\sigma\, \bar{v}\, dt$

$\sigma = \pi d^2$ Stoßquerschnitt

$dN_{Stoß} = N_V \sigma \bar{v} \, dt$

$$z = \frac{dN_{Stoß}}{dt} = N_V \cdot \sigma \cdot \bar{v} = N_V \sigma \sqrt{\frac{8kT}{\pi M}}$$

$$m^{-3} \quad m^2 \quad \frac{m}{s} = \frac{1}{s}$$

bisherige Annahme: ein Molekül bewegt sich, alle anderen in Ruhe

Bewegung zweier Moleküle mit den Massen m_1 und m_2 entspricht der Bewegung eines Moleküls mit der reduzierten Masse μ

mit $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

hier: $\mu = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$

$\hookrightarrow \bar{v}_r = \sqrt{2}\, \bar{v}$

$\hookrightarrow z = \sqrt{2}\, N_V \sigma \bar{v}$

$$\hookrightarrow \lambda = \frac{\bar{v}}{z} = \frac{\cancel{\bar{v}}}{\sqrt{2}\, N_V \sigma \cancel{\bar{v}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}\, N_V \sigma} = \lambda}$$

ideales Gas: $pV = NkT$

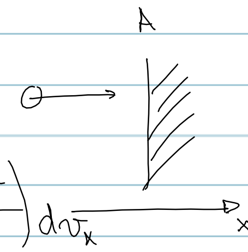
$N_V = \frac{p}{kT}$

$$\hookrightarrow \boxed{\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\sigma p}}$$

Bsp.: N_2; 1bar; 25°C; $\sigma(N_2) = 0{,}450 \text{ nm}^2$

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\sigma p} = 6{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 65 \text{ nm}$$

Stöße mit einer Oberfläche



$$Z = N_V A \int_0^\infty v_x f(v_x)\, dv_x$$

$$= N_V A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^\infty v_x \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2kT}\right) dv_x$$

Int.: $\int_0^\infty x \exp(-ax^2)\, dx = \frac{1}{2a}$

$$Z = N_V A \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right) = N_V A \left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2}$$

$$Z_W = \frac{Z}{A} = N_V \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{p}{kT}\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2}$$

$$Z_W = \frac{p}{\sqrt{2\pi m kT}}$$

Bsp.: 1 bar; 300 K; Luft: 29 g/mol

$$Z_W = 3{,}0 \cdot 10^{27} \frac{1}{s\, m^2} = 3{,}0 \cdot 10^{23} \frac{1}{s\, cm^2}$$