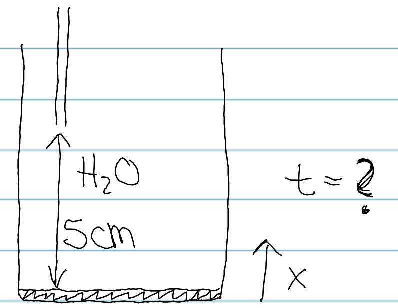
PC III 28.5.13

6. Transporteigenschaften

6.1 Einführung



mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$

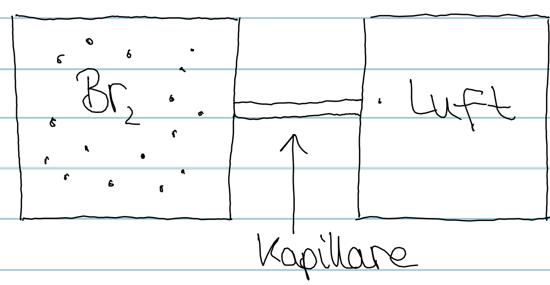
$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

mittlere freie Weglänge λ

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, N_V\, \sigma}$$

6.2 Diffusion in Gasen

Bsp.:



großes Reservoir $\longrightarrow$ Konzentrationsverhältnisse nahezu zeitunabhängig

stationäres nicht-GG!

↳ konstanter Teilchenstrom

Fluss $\propto$ Gradient (treibende Kraft)

hier: Konzentrationsgradient

$$\vec{J}_{N_V} = -D\left(\frac{dN_V}{dz}\right) \qquad \text{1. Fick'sches Gesetz}$$

$\vec{J}_{N_V}$ = Fluss von Teilchen

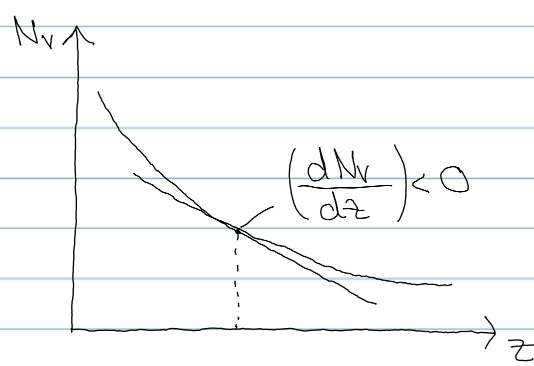
= Anzahl Teilchen pro Zeiteinheit durch Flächeneinheit wandern

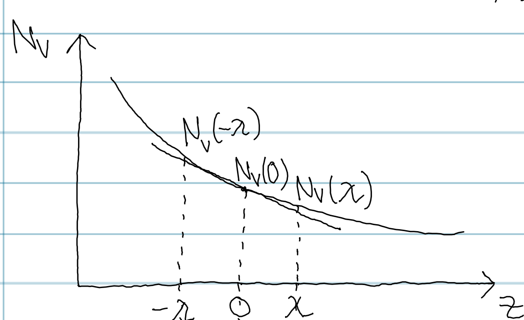
D = Diffusionskoeffizient

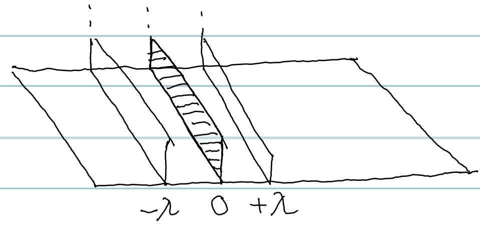
$$\boxed{D = \frac{1}{3}\lambda \bar{v}} \quad ?$$

$$[D] = m\,\frac{m}{s} = \frac{m^2}{s}$$

$$[j] = \frac{m^2}{s}\,\frac{\text{Teilchen}}{m^4} = \frac{\text{Teilchen}}{m^2\,s}$$







Fluss von links nach rechts

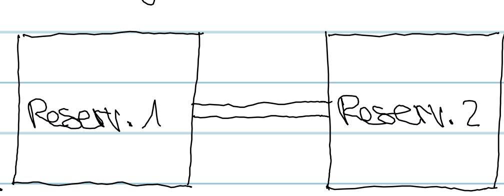
$$\vec{j}_{\rightarrow} = \frac{1}{6}\underbrace{N_v(-\lambda)\,\bar{v}}_{\frac{1}{m^3}\,\frac{m}{s}\;=\;\frac{1}{m^2 s}} = \frac{1}{6}\,\bar{v}\left[N_v(0) - \lambda\left(\frac{dN_v}{dz}\right)_0\right]$$

Fluss von rechts nach links

$$\vec{j}_{\leftarrow} = -\frac{1}{6}N_v(+\lambda)\,\bar{v} = -\frac{1}{6}\,\bar{v}\left[N_v(0) + \lambda\left(\frac{dN_v}{dz}\right)_0\right]$$

$$\vec{j} = \vec{j}_{\rightarrow} + \vec{j}_{\leftarrow} = -\underbrace{\frac{1}{3}\,\bar{v}\,\lambda}_{D}\left(\frac{dN_v}{dz}\right)_0$$

6.3 Allgemeine Transportgleichung



$$\boxed{\vec{j} = -a \,\mathrm{grad}\, A}$$

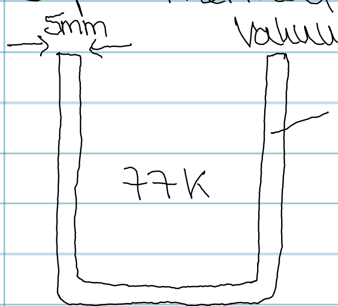
A = Transportgröße: physikalische transp. Größe (z.B. Teilchen, Impuls, Energie, Ladung)

$\vec{j}_A$ = Fluss von A: resultierende Menge an A, die pro Zeit- und Flächeneinheit transportiert wird

a = Koeff. : D, η, κ, σ

Konzentrationsgradient	: Diffusion	Koeff. $D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}$
Geschwindigkeitsgradient	: Viskosität	$\eta = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} m N_V$
Temperaturgradient	: Wärmeleitung	$\kappa = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} C_{V,m} [A]$
Ladungsgradient	: elektrische Leitfähigkeit	

Bsp.: Thermosflasche, mit flüssigem N_2 gefüllt
Vakuummantel " " " "



p? N_2
298 K

Abhängigkeit des Wärmestroms vom Druck?

$$\vec{J} = -\frac{1}{3} \lambda \bar{v} C_{V,m} [N_2] \frac{\Delta T}{\Delta z}$$

$$\vec{J} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \lambda C_{V,m} \frac{N_V}{N_L} \frac{\Delta T}{\Delta z} \qquad N_V = \frac{p}{kT}$$

$$\vec{J} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \lambda C_{V,m} \frac{p}{RT} \frac{\Delta T}{\Delta z}$$

$$\boxed{\vec{J} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi M R T}} \lambda C_{V,m} p \frac{\Delta T}{\Delta z}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} N_V \sigma} = \frac{kT}{\sqrt{2} p \sigma}$$

$$p_{gr.} = \frac{kT}{\sqrt{2} \lambda \sigma} = 0{,}73 \text{ Pa} \quad (\lambda = 5 \text{ mm})$$

$p > p_{gr.}$: Moleküle stoßen untereinander, bevor sie die Wand erreichen

$p < p_{gr.}$: Moleküle stoßen an Wand vor Stoß untereinander

$p > p_{gr.}$: κ unabhängig vom Druck!

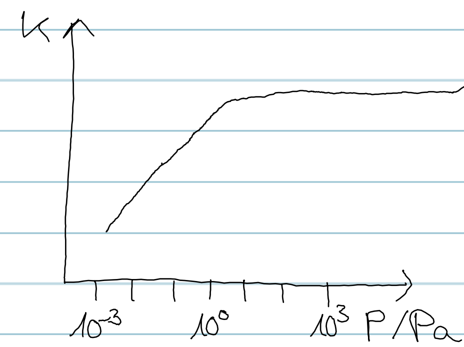
$$\vec{J} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi M R T}} \lambda C_{V,m} p \cdot \frac{\Delta T}{\Delta z} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi M R T}} \frac{kT}{\sqrt{2} \cancel{p} \sigma} C_{V,m} \cancel{p} \frac{\Delta T}{\cdot}$$

$$= -271 \frac{J}{s m^2}$$

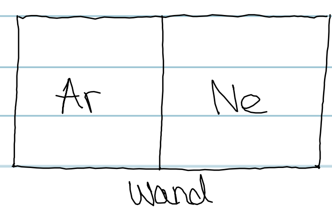
$p < p_{gr.}$: K abhängig vom Druck!

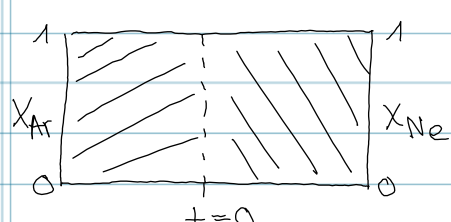
$$\vec{J} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{\pi M R T}}\, C_{V,m}\, p\, \Delta T =$$

p/Pa	$10^3 \dots 10^0$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$\vec{J} / \frac{J}{m^2 s}$	$2{,}7 \cdot 10^2$	$3{,}7 \cdot 10^1$	$3{,}7$	$3{,}7 \cdot 10^{-1}$



6.4 Diffusionsgleichung





nicht stationärer (zeitabhängiger) Konzentrationsausgleich

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$ Diffusionsgleichung (2. Fick'sches Gesetz)

Bsp.: Lsg: $c(x,t) = \frac{N_0}{N_L A (\pi D t)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

Teilchen in Quader mit Länge dx: $N_V A dx$

$N_V = c N_L$

$c N_L A dx$

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x \underbrace{\frac{c N_L A dx}{N_0}}_{\text{Wahrscheinlichkeit}} = \frac{1}{(\pi D t)^{\frac{1}{2}}} \int x \, e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = 2\left(\frac{Dt}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\langle x \rangle = 0$

$\langle x^2 \rangle = 2Dt \longrightarrow \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt}$

Saccharose in H_2O: $D = 0{,}5 \cdot 10^{9} \frac{m^2}{s}$

$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 1\,cm \longrightarrow t = 10^5\,s$