4.3. Matrixdarstellung von SO

Bsp.: Transform von Vektor $\{x, y, z\}$

E:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Matrixdarst. $\Gamma(E)$

σ_{xy}

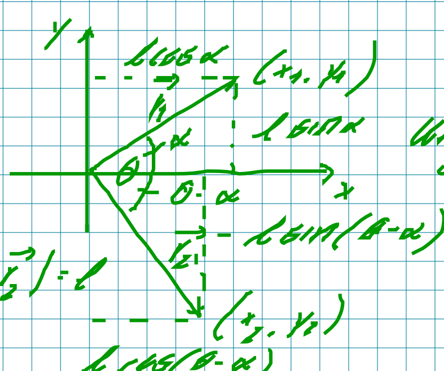
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

i:

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}$$

Rot um z-Achse:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & 0 \\ ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z \end{bmatrix}$$



$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = l$

Uhrzeiger-sinn

$x_1 = l\cos\alpha$

$y_1 = l\sin\alpha$

$x_2 = l\cos(\theta-\alpha)$

$y_2 = -l\sin(\theta-\alpha)$

Trig.: $\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$

$\sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

4.3. Matrixdarstellung von SO

Bsp.: Transform von Vektor $\{x, y, z\}$

E:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Matrixdarst. $M(E)$

σ_{xy}

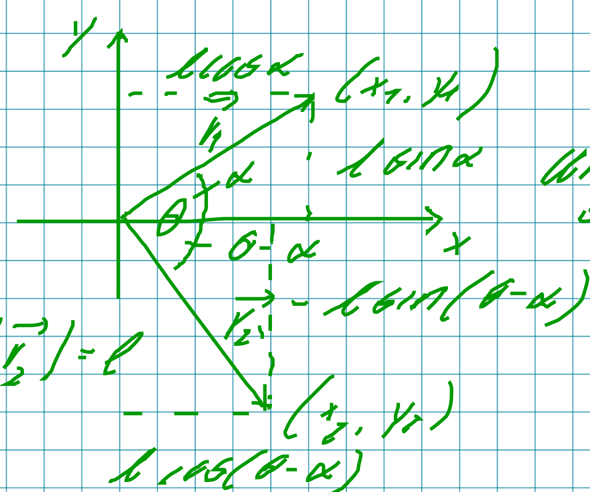
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

i:

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}$$

Rot. um z-Achse:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & 0 \\ ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z \end{bmatrix}$$



Uhrzeigersinn

$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = l$

$x_1 = l\cos\alpha$

$y_1 = l\sin\alpha$

$x_2 = l\cos(\theta-\alpha)$

$y_2 = -l\sin(\theta-\alpha)$

Trig.: $\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$

$\sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

$x_2 = l\cos\theta\cos\alpha + l\sin\theta\sin\alpha$

$y_2 = -l\sin\theta\cos\alpha + l\cos\theta\sin\alpha$

C_3

$x_2 = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta$

$y_2 = -x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z.B. C_3

$$\Gamma(C_3) = \begin{bmatrix} -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Übung: $\Gamma(C_3^{-1})$?

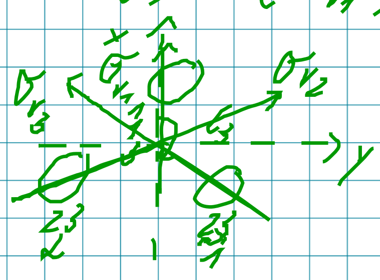
Zusammenfassung:

Geom SO $\to$ Algebra
Matrizenmultiplikation

Bsp. Punktgruppe $C_{3v} \to E, C_3, C_3^2, \sigma_{v_1}, \sigma_{v_2}, \sigma_{v_3}$

$$\Gamma(C_3)\Gamma(\sigma_{v_1}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \Gamma(\sigma_{v_2})$$



4.4. Eigenschaften von Matrixdarst.

a) Ähnlichkeitstransf. Q

Matrizen A, B, ...

$A' = Q^{-1} A Q$

$B' = Q^{-1} B Q$

$\vdots$

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{bmatrix}$$

Blockdiagonalisierung

$A, B, \ldots \rightarrow A', B', \ldots$ reduzible Matrizen

kein G irreduz. "

$\hookrightarrow$ $A, B, \ldots$ u A', B' folgen derselben Multiplikationstafel

z. B. $AB = C$

$A'B' = C'$

$$A' \cdot B' = (G^{-1} A G)(G^{-1} B G)$$
$$= G^{-1} A \, E \, B \, G$$
$$= G^{-1} A B G$$
$$= C'$$

Bsp. C_{3v}

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_3$

b) Charakter

Charakter $\rightarrow$ Spur

$$\chi(\underset{\substack{\uparrow \\ SO}}{R}) = \mathrm{tr}\, \Gamma(R) = \sum_i \Gamma(R)_{ii}$$

$\rightarrow$ bleibt erhalten bei Ähnlichkeitstransformation

z. B. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$

c) Klasse

bei $\underbrace{R' = S^{-1} R S}_{\text{konjungierte}}$

Bsp: C_{3v} C_3, C_3^2:

$$\sigma_{v1}^{-1}\, C_3\, \sigma_{v1} = \sigma_{v1}\, \sigma_{v2} = C_3^2$$

$\hookrightarrow$ SO einer Klasse besitzen den gleichen Charakter

$$\chi(R') = \mathrm{tr}\, \Gamma(R') = \mathrm{tr}\, \Gamma(S^{-1})\, \Gamma(R)\, \Gamma(S)$$

$$= \mathrm{tr}\, \Gamma(R) \underbrace{\Gamma(S)\, \Gamma(S^{-1})}_{\Gamma(E)}$$

Zyklische Permutation

$$\mathrm{tr}(ABC) = \sum_{ijk} A_{ij}\, B_{jk}\, C_{ki}$$

$$= \sum_{ijk} C_{ki}\, A_{ij}\, B_{jk}$$

$$= \sum_{ijk} B_{jk}\, C_{ki}\, A_{ij}$$

Bsp: $C_{3v} \rightarrow E,\ 2C_3,\ 3\sigma_v$

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
$\Gamma_1 = A_1$	1	1	1
Γ_2	?	?	?
$\Gamma_3 = E$	2	-1	0

„Charaktertafel"