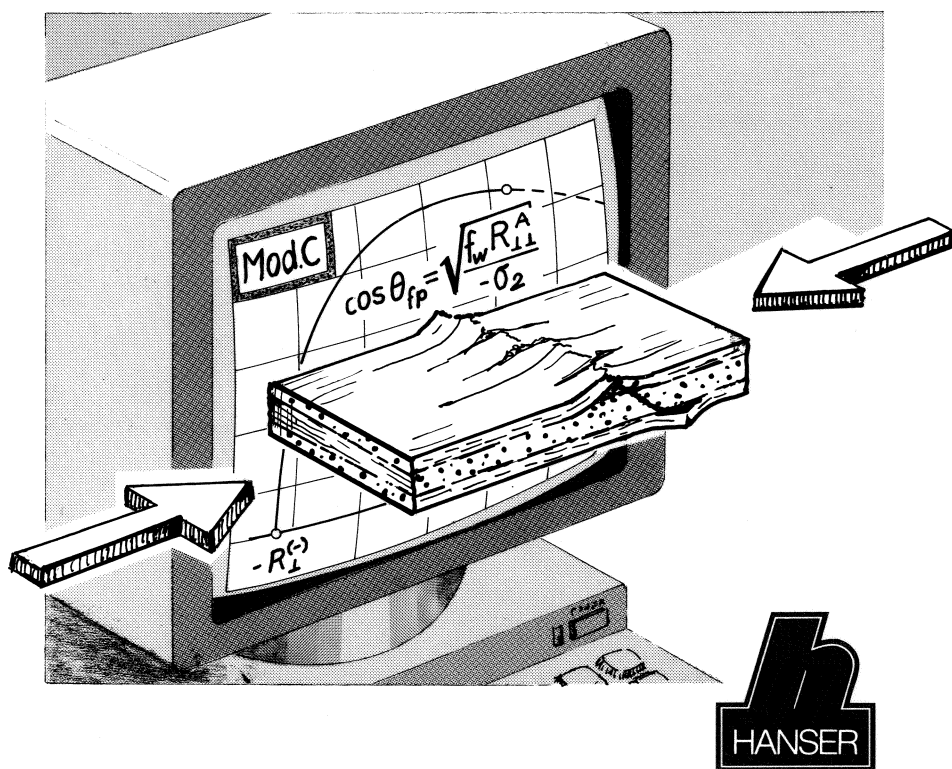


A. Puck

Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten

Modelle für die Praxis



Puck
Festigkeitsanalyse von
Faser-Matrix-Laminaten

Alfred Puck

Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten

Modelle für die Praxis



Carl Hanser Verlag München Wien

Der Autor:

Professor Dr.-Ing. Alfred Puck, Immenhausen-Mariendorf

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Puck, Alfred:

Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten : Modelle für
die Praxis / Alfred Puck. - München ; Wien : Hanser, 1996

ISBN 3-446-18194-6

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 1996 Carl Hanser Verlag München Wien

Umschlaggestaltung: Kaselow Design, München,

unter Verwendung eines Bildes von Prof. Dr.-Ing. A. Puck

Datenbelichtung: Wolfram's Doku Werkstatt, Attenkirchen

Gesamtherstellung: Joh. Walch GmbH & Co., Augsburg

Printed in Germany

Geleitwort und Widmung

In den 50-er Jahren studierte der Autor an der Ingenieurschule Hamburg und der Technischen Hochschule Darmstadt Maschinenbau mit dem Vertiefungsfach Leichtbau, und zwar sowohl in der Theorie als auch in der Praxis. Die Konstruktions-Praxis erlebte ich schon als Student, als ich bei der Konstruktion der ersten Segelflugzeuge aus Glasfaserkunststoff mitwirken konnte. Während dieses Lernens von der Pike auf hörte ich von meinen Lehrmeistern häufig den Satz "Konstruieren ist keine Wissenschaft, Konstruieren ist eine Kunst!" Diese Behauptung hat vielleicht auch heute noch eine gewisse Gültigkeit, wenn wir auch inzwischen die wissenschaftliche Basis des Konstruierens etwas höher bewerten als damals. Mit der Zeit dürfte sich immer mehr der Ausspruch bewahrheiten, der von Ludwig Prandtl überliefert wird: "Es gibt nichts Praktischeres als eine gute Theorie!", wobei die Betonung sicher auf dem Wörtchen *gute* liegen muß. Ich hoffe, daß die vorliegende Arbeit sich in diesem Sinne als ein "praktisches" Buch erweisen wird.

Wenn es bereits beim Konstruieren mit konventionellen Werkstoffen berechtigt sein soll, von einer Kunst zu sprechen, dann nähern wir uns mit einer Faserverbund-Struktur schon allmählich einem "Gesamt-Kunstwerk". Jetzt sind auch die Fesseln gesprengt, die dem Konstrukteur durch die in engen Grenzen vorgegebenen Eigenschaften der Standard-Werkstoffe angelegt waren. Nun kann er nach dem großartigen Vorbild der Natur den "Stoff", aus dem das Bauteil entstehen soll, nach seinen Vorstellungen von idealen Kraftflüssen und "intelligenten" Verformungen selbst gestalten. Sogar ein Laie wird nachempfinden können, welch starke Faszination diese neue Freiheit auf den konstruierenden Ingenieur ausübt.

Es sollte uns aber stets bewußt bleiben, daß die Faserverbundtechnik – genau so wie jede andere moderne Technologie – ambivalent ist. So können ihre Ergebnisse in Form wunderschöner Segelflugzeuge erscheinen, mit denen Menschen sich über den Alltag erheben, in Form ultraleichter Prothesen, die Behinderten den Alltag meistern helfen, oder als robuste und aerodynamisch hochwertige Rotorblätter in ressourcenschonenden Windkraftanlagen, aber eben auch in Form von Tarnkappen-Bombern und furchtbaren Raketenwaffen. Kaum jemand, der sich der Faserverbundtechnik verschreibt, wird dieser Problematik und den damit verbundenen Entscheidungen ausweichen können.

Dies Buch ist all jenen Menschen gewidmet, die sich bei ihren Entscheidungen nicht von der Faszination der modernen Technik, sondern allein von ihrem Gewissen leiten lassen.

Vorwort

Hochbeanspruchte Bauteile aus Faserkunststoffverbunden sind nun schon seit Jahrzehnten im Einsatz, und zwar als Sportgeräte, Segelflugzeuge, Boote, Hubschrauber- und Windkraftrotoren, Satellitenstrukturen und Leitwerke von Großraumflugzeugen, um nur die bekanntesten zu nennen. Deshalb dürfte man gar nicht mehr von einer "neuen Technologie" sprechen, wie es immer noch geschieht. Auch existiert bereits eine solche Fülle von Literatur zur Faserverbundtechnologie, daß sie auch für den Experten nicht mehr überschaubar ist. Um so verwunderlicher ist es, daß es im Know-how der Faserverbundtechnik immer noch unterentwickelte Gebiete gibt. Zu diesen gehört die Festigkeitsanalyse der Lamine. Obwohl es sich hierbei zweifellos um einen zentralen Problemkreis handelt, ist dies Gebiet möglicherweise das am weitesten zurückgebliebene. Dies hat viele Gründe:

- Das Festigkeitsverhalten der Faser-Matrix-Lamine, insbesondere wenn es sich um vielschichtige Lamine handelt, ist analytisch außerordentlich schwer zu erfassen, weil sich sukzessive Bruchvorgänge abspielen, bei denen nacheinander sehr unterschiedliche Versagensvorgänge eintreten, die sich häufig auch noch gegenseitig beeinflussen.
- Bei den frühen wissenschaftlichen Arbeiten zum Problem der Bruchkriterien für Faserverbunde hat man sich zu sehr von den so erfolgreichen Fließkriterien für duktile metallische Werkstoffe leiten lassen anstatt von dem ganz anders gearteten Sprödbbruchverhalten, das bei fast allen Hochleistungs-Faserverbundstoffen zu beobachten ist.
- Nachdem die unter mehr mathematischen als werkstoffkundlichen Aspekten entstandenen "anisotrop gemachten" Fließkriterien Eingang in kommerziell vertriebene Rechenprogramme gefunden hatten, waren sie offenbar weitgehend der Kritik entzogen.
- Experimente mit mehreren gleichzeitig wirkenden Spannungen, mit denen man die Gültigkeit von Bruchkriterien überprüfen könnte, sind außerordentlich schwierig. Dies macht es verständlich, weshalb die Unhaltbarkeit mancher Bruchkriterien und Degradationsmodelle über Jahrzehnte unbemerkt blieb.

Bei der Entwicklung festigkeitsmäßig voll ausgenutzter Faserverbund-Bauteile und den dabei unumgänglichen Bruchversuchen an Prototypbauteilen sind häufig Erfahrungen gemacht worden, die sich mit den gängigen Festigkeitstheorien nicht in Einklang bringen ließen. So geht auch dies Buch auf Anstöße aus der Praxis der Bauteilentwicklung in Industrie und Forschungseinrichtungen zurück. Es ist in erster Linie für Praktiker geschrieben. Die anstehenden Fragen sind jedoch zu schwierig, als daß sie in einer theoretisch anspruchslosen Form behandelt werden könnten. Als didaktische Leitlinie galt deshalb: "So praxisnah wie möglich, so theoretisch wie nötig!" Darüberhinaus ist versucht worden, weitestgehend das

Hilfsmittel der Visualisierung einzusetzen, um so – im wahrsten Sinne des Wortes – ”Einsichten” zu vermitteln. Es sollte keine Formelsammlung entstehen, sondern stattdessen vertieftes Verständnis für die schwierigen Zusammenhänge geweckt werden, das die Urteilsfähigkeit gegenüber Theorien verbessert und vor Fehlanwendungen kommerzieller Software bewahrt.

Wegen des heterogenen Aufbaus und des Spröbruchcharakters der meisten Faserverbundwerkstoffe, die technisch/wirtschaftliche Bedeutung besitzen, wären unter wissenschaftlichen Gesichtspunkten die Mikromechanik und die Bruchmechanik angemessene theoretische Werkzeuge. Für den entwerfenden und dimensionierenden Ingenieur ist aber eine auf einem mehr makromechanischen Niveau angesiedelte Betrachtungsweise zweckmäßig. Als das praktischste Modell erweist sich aus dieser Sicht der Schichtenverbund aus Einzelschichten, die als homogenes, anisotropes Kontinuum behandelt werden und bei denen die beiden grundverschiedenen Brucharten *Faserbruch* und *Zwischenfaserbruch* unterschieden werden.

Mit *Teil I* wird, ausgehend vom Laminataufbau, der das Bruchverhalten wesentlich mitbestimmt, über Hinweise zur Spannungsanalyse und grundlegende Betrachtungen zu Bruchkriterien auch dem noch unerfahrenen Leser ein ”Einstieg” in die nicht ganz einfache Materie ermöglicht. Von zentraler Bedeutung ist *Teil II*, in dem eine schichtenweise Bruchanalyse für ebene Beanspruchung in der Schichtebene dargestellt wird, die sich in der Praxis der Bauteilkonstruktion entwickelt hat, aber auch theoretischen Ansprüchen genügt. Im *Teil III* wird über neue Forschungsergebnisse des Autors berichtet, die insbesondere für räumliche Beanspruchungen zu realistischen Modellen geführt haben, die zusätzliche Informationen über Bruch-Modus und Bruchrichtung liefern. *Teil IV* befaßt sich schließlich mit einigen Spezialproblemen der Forschung und versucht, bei den vielen ungelösten Problemen und offenen Fragen Prioritäten zu setzen sowie ein wenig die Zukunftsaussichten zu ergründen.

Faserverbund-Experten stimmen heute darin überein, daß die anfänglich in die Faserverbund-Bauweisen gesetzten – teilweise sicher übertriebenen – Erwartungen sich nicht erfüllt haben. Ebenso besteht jedoch auch weitgehende Übereinstimmung darin, daß das tatsächliche Potential der Faserverbundtechnik erst zu einem kleinen Teil genutzt wird. Ein wesentlicher Grund dafür, warum festigkeitsmäßig ausgereizte Faserverbund-Bauteile im Wettbewerb mit konventionellen Bauteilen oft nicht zum Zuge kamen, bestand in den viel zu langen Entwicklungszeiten und zu hohen Entwicklungskosten. Mit Hilfe einer realistischen Bruchanalyse lassen sich beide verringern. Sie erlaubt es zum einen, erst mit ausgereiften Prototypen in die Festigkeitserprobung zu gehen, und zum anderen, unbefriedigende Prüfergebnisse richtig zu interpretieren, um dann zielsicher Verbesserungen vorzunehmen. Es ist das vorrangige Ziel dieses Buches, einen Beitrag zur Entwicklung dieser Fähigkeiten zu leisten.

Das Zustandekommen des Buches ist ganz wesentlich einigen Frauen zu verdanken:

Frau Univ.-Prof. *Dr. Rita Jeltsch-Fricker*, die der Arbeitsgruppe Ingenieurmathematik der Universität Gesamthochschule Kassel angehört, hat den ersten Anstoß zu dieser Veröffentlichung gegeben und mir mit wissenschaftlicher Diskussion und wertvollen Anregungen, insbesondere zur Visualisierung, sehr geholfen. Frau *Gerhild Heldmann-Görge* hat unermüdlich immer neue Textversionen geschrieben, bis endlich eine auch aus didaktischer Sicht befriedigende Form gefunden war. Die vielen Zeichnungen wurden in liebevoller Handarbeit von Frau *Gerlinde Fischer* angefertigt. Und – last, not least – hat meine Frau, *Hannelore Puck*, mich mit Verständnis und Einfühlungsvermögen bei der Arbeit am Buch unterstützt und mir – im sogenannten Ruhestand – für mein technisch/wissenschaftliches Steckenpferd viel Zeit zugestanden, die eigentlich bereits anders versprochen war.

Mein Dank gilt auch Frau *Dr. Christine Stroh*m vom *Carl Hanser Verlag*, die mir mit Zuspruch, sachkundigem Rat und viel Verständnis für spezielle Wünsche sehr geholfen hat.

Die vielen bei der elektronischen Datenverarbeitung anfallenden Probleme und das schwierige Layout wurden von Herrn Dipl.-Ing. *Andreas Rauchhaus* gemeistert.

Etliche Fachkollegen, denen ich das Manuskript mit der Bitte um kritische Durchsicht überlassen hatte, haben mir wichtige fachliche Hinweise und Anregungen für eine verbesserte Didaktik gegeben, für die ich sehr dankbar bin. Es waren dies (von A bis Z):

Dipl.-Ing. *U. Ahrend*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Dr.-Ing. (habil) *R.G. Cuntze*, MAN-Technologie, München/Karlsfeld;
Dipl.-Ing. *S. Fabisch*, Univ. Gh Kassel;
Dipl.-Ing. *J. Garbe*, Fraunhofer-Inst. (LBF), Darmstadt;
Dr.-Ing. *B. Geier*, Inst.f. Strukturmech., DLR, Braunschweig;
Dr.-Ing. *K. Gliesche*, Inst.f. Polymerforsch., Dresden;
Dr.-Ing. *D. Huybrechts*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Dr.-Ing. *R. Jakobi*, BASF, Ludwigshafen;
Dipl.-Ing. *J. Kopp*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Dr.-Ing. *U. Knaust*, AUDI, Ingolstadt;
Dr.-Ing. *G. Kress*, Inst.f.Konstr.u.Bauweisen, ETH Zürich;
Dr.-Ing. *L. Kroll*, Inst.f.Leichtb.u.Kunstst., TU Dresden;
Univ.-Prof.Dr.mont. *R.W. Lang*, Montanuniv. Leoben, Österreich;
Dipl.-Ing. *G. Lutz*, Geislinger & Co, Salzburg, Österreich;
Prof. dipl. Ing. ETH *U. Meier*, Eigen.Mat.prüf.-u.Forschanst. (EMPA), Dübendorf, Schweiz;
Dipl.-Ing. *E. Poutet*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Univ.-Prof. Dr.-Ing. *H. Schürmann*, Fachgeb.Leichtbaukonstr.u.Bauweisen, T.H. Darmstadt;
Dr.-Ing. *K. Stellbrink*, Inst.f.Bauweisen-und Konstr.forsch., DLR, Stuttgart;
Dipl.-Ing. *O. Wellems*, Inst.f.Kunststoffverarb. (IKV), Aachen;
Ing. *P. Voirol*, STESALIT, Zuwill (Basel), Schweiz;
Dipl.-Ing. *D. Zeise*, Kontec, Korntal-Münchingen.

Immenhausen, im Dezember 1995

A. Puck

Inhaltsverzeichnis

I	Einführende Betrachtungen und Grundlagen	1
1	Einführung	3
1.1	Der Problemkreis	3
1.2	Gegenwärtige Situation	6
1.3	Zielsetzung	10
2	Bruchgeschehen in Laminaten	11
2.1	Zum Aufbau von Laminaten	11
2.2	Zwischenfaserbrüche	14
2.3	Delaminationen	18
2.4	Faserbrüche	21
2.5	Laminat-Versagen	23
3	Anmerkungen zur Spannungsanalyse	31
3.1	Vorbemerkungen	31
3.2	Hinweise zur Netztheorie	31
3.3	Probleme bei der klassischen Laminattheorie	35
3.4	Anmerkungen zu interlaminaren Spannungen	40
3.5	Hinweise auf analytische Lösungen	44
4	Allgemeine Betrachtungen über Bruchkriterien	45
4.1	Begriffe und Definitionen	45
4.2	Visualisierung und mathematische Aspekte	49
4.3	Kurzer geschichtlicher Rückblick	53
II	Entwicklungsstand bei den 2D-Bruchanalyse-Modellen	57
5	Bruchbedingungen	59
5.1	Bruchbedingungen für Zwischenfaserbruch	59
5.1.1	Wege zu erhöhter Aussagekraft	59
5.1.2	Empfehlenswerte Zwischenfaserbruch-Bedingungen	60
5.1.3	Einfluß der faserparallelen Spannung	66
5.2	Bruchbedingungen für Faserbruch	71

5.3	Bruchkörper	75
5.4	Berücksichtigung von Eigenspannungen	78
6	Degradation nach der Rißbildung	81
6.1	"Verschmieren" der Risse	81
6.2	Abminderungsfunktion für Elastizitätsgrößen	83
6.2.1	Bruch-Modus A	83
6.2.2	Bruch-Modi B und C	89
7	Durchführung und Auswertung der Bruchanalyse	91
7.1	Rißbildung und Verformungsverhalten	91
7.2	Delaminationsgefahr	91
7.3	Laminat-Versagen	95
7.4	Anwendung auf gewebeartige Strukturen	95
7.5	"Schnelle Programme" für den Laminat-Entwurf	99
III	Neue Wege zu realistischen 3D-Bruchbedingungen	103
8	Grundlagen einer neuen Zwischenfaserbruch-Analyse	105
8.1	Wesen und Vorgeschichte der neuen Bruchanalyse	105
8.1.1	Sprödbbruch und Mohrsche Festigkeitshypothese	105
8.1.2	Hashin's Idee zum neuen Verfahren	107
8.2	Physikalische Grundlagen	110
8.2.1	Bruchmechanischer Hintergrund	110
8.2.2	Erweiterte Bruchhypothese	112
8.3	Die neuen "Festigkeits"-Parameter	116
8.3.1	Grundsätzliche Überlegungen	116
8.3.2	Einführung des Bruchwiderstands der Wirkebene	117
8.3.3	Übereinstimmungen mit Festigkeiten	119
8.3.4	Empfehlungen zur Fehlervermeidung	122
8.3.5	Die "Neigungs"-Parameter	122
8.3.6	Anhaltswerte für Werkstoffparameter	123
8.4	Mathematische Grundlagen	123
8.4.1	Mathematisch ausgerichtete Arbeiten	123
8.4.2	Die Bruchfunktion	124
8.4.3	Übergangsmöglichkeiten zwischen den Spannungsräumen	125
8.4.4	Bruchwinkel-Ermittlung	126
8.5	Mechanische Zusammenhänge	129
8.5.1	Spannungen auf "schrägen" Schnitten	129
8.5.2	Auswirkungen des Vorzeichens von Spannungen	131
8.5.3	Haupt-Normalspannungen und "resultierende" Schubspannungen	132

9 Bruchbedingungen der neuen Art	137
9.1 Bruchbedingung für eine druckbeanspruchte Bruchebene	137
9.1.1 Vorbemerkungen	137
9.1.2 Einfluß der Druckspannung auf den Schubbruch	138
9.1.3 Interaktionsansätze für die Schubspannungen	142
9.2 Bruchbedingung für eine zugbeanspruchte Bruchebene	148
9.3 Anwendung als Delaminations-Bedingungen	150
9.4 Sekundäre Einflüsse	153
9.4.1 Einfluß der faserparallelen Spannung	153
9.4.2 Einfluß von Eigenspannungen	156
9.5 Anwendungsempfehlungen	158
9.5.1 Allgemeine Hinweise und Empfehlungen	158
9.5.2 Vereinfachung bei 2D-Beanspruchung	161
9.6 Ergebnisdarstellung und -diskussion	165
9.6.1 Beispiele für Zfb-Bruchkörper	165
9.6.2 Unterscheiden verschiedener Bruch-Modi	170
 IV Spezialprobleme, offene Fragen, Zukunftsaussichten	 171
10 Spezialprobleme der Master-Bruchfläche	173
10.1 Vorbemerkungen	173
10.2 Der Vektorenfächer und seine Randkurve	173
10.3 Sensitivität des Bruchwinkels	178
10.4 "Blinde Flecken" und "tote Räume"	178
10.5 Vorüberlegungen zu Fragen der Probabilistik	181
10.6 Versuch einer Beurteilung	184
 11 Offene Fragen	 187
11.1 Anwendbarkeit für verschiedene Beanspruchungsarten	187
11.2 Einige ungeklärte Fragen	191
11.3 Versuch einer Prioritätensetzung	193
 12 Zukunftsaussichten	 195
 13 Anhang	 199
13.1 Literaturverzeichnis	199
13.2 Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen	206
13.3 Fachwortverzeichnis	209
13.4 Stichwortverzeichnis	211

Teil I

Einführende Betrachtungen und Grundlagen

1 Einführung

1.1 Der Problemkreis

Die theoretische Behandlung der "Festigkeit" von Faser-Matrix-Laminaten ist ein recht schwieriges Problem. Es wird in der Literatur unter sehr verschiedenen Blickwinkeln und mit sehr unterschiedlichen Interessenschwerpunkten behandelt. Das vorliegende Buch ist in erster Linie auf die Tätigkeit des entwerfenden und berechnenden Ingenieurs ausgerichtet, der bestrebt ist, bezüglich der "Festigkeit" möglichst gut ausgelegte Faserverbund-Bauteile zu entwickeln und zu dimensionieren. Das Schädigungs- und Bruchverhalten eines Bauteils sollte im Idealfall rein rechnerisch ohne aufwendige Belastungs- und Bruchversuche an Prototyp-Bauteilen vorhersagbar sein. In der Faserverbundtechnik ist man von diesem Ziel noch sehr weit entfernt. Woran dies liegt, wird bei der Lektüre deutlich werden.

Konstrukteure können bei ihren Berechnungen nicht im Gebiet der Mikromechanik beginnen, mit der die Schädigungs- und Bruchvorgänge im μm -Bereich der Elementarfaserdurchmesser betrachtet und mit Hilfe entsprechender mikromechanischer Modelle beschrieben werden. Allerdings ist es außerordentlich hilfreich, wenn auch der Bauteil-Konstrukteur mit mikromechanischen Vorstellungen und Erkenntnissen vertraut ist. Dies ermöglicht ihm, die mikromechanischen Hintergründe der "makromechanisch" sichtbar werdenden Bruchvorgänge zu erkennen und dadurch die Chancen und Grenzen der Faserverbundwerkstoffe realistischer einzuschätzen.

Für die eigentliche Konstruktionsarbeit bedarf es einer etwas "vergrößerten" Betrachtungsweise, bei der nicht mehr in μm -Abmessungen der Elementarfasern, sondern in mm -Dimensionen der Einzelschichtdicken des Laminats gedacht und gerechnet wird. Typisch für die ingenieurmäßige Betrachtungsweise ist das in **Bild 1.1** dargestellte Grundelement eines unidirektional faserverstärkten Faser-Matrix-Verbunds (UD-Schicht), bei dem Fasern und Matrix "homogenisiert", d.h. als feinstverteilt, behandelt werden. Dementsprechend werden nicht die tatsächlich auftretenden, teilweise sehr unterschiedlich hohen Spannungen im Faser- und Matrixmaterial betrachtet, sondern rechnerisch über den aus Faser- und Matrix-Querschnitten bestehenden Gesamtquerschnitt gemittelte Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$.

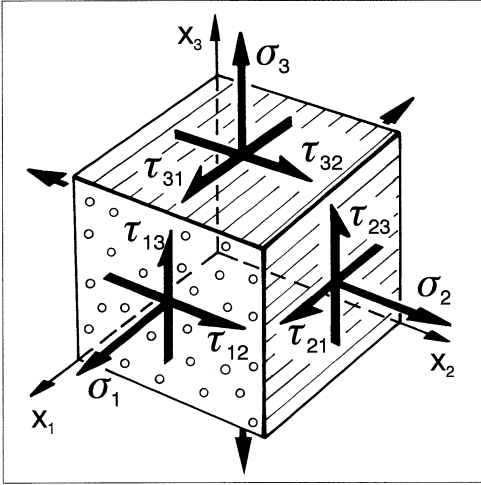


Bild 1.1: Spannungen am UD-Verbund. Die Normalspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die Schubspannungen $\tau_{23} = \tau_{32}, \tau_{13} = \tau_{31}, \tau_{12} = \tau_{21}$ sind auf das (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem der UD-Schicht bezogen. Die (x_1, x_2) -Ebene ist die Schichtebene, x_3 ist die Dickenrichtung. Spannungen mit dem im Bild gezeigten Richtungssinn werden als positive, mit umgekehrtem Richtungssinn als negative Werte angegeben.

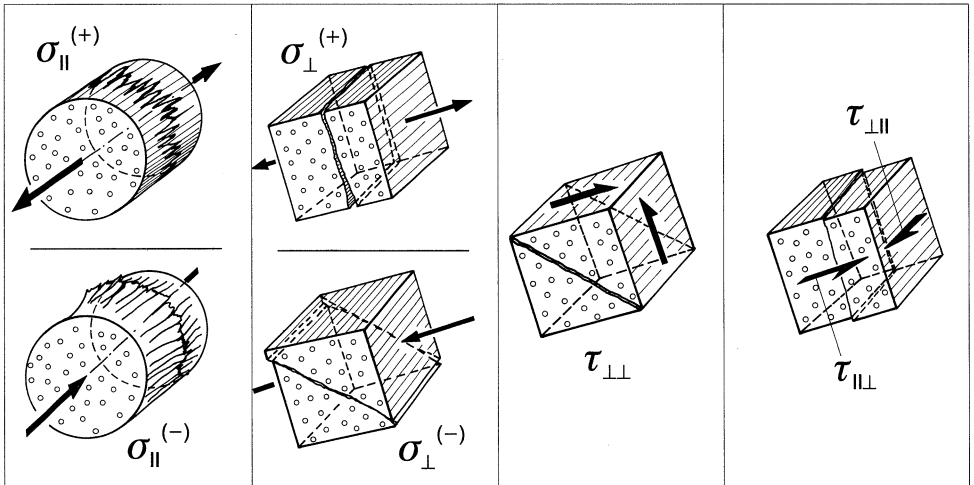


Bild 1.2: Beanspruchungen des UD-Verbunds. σ_{\parallel} = Längsbeanspruchung, σ_{\perp} = Querbeanspruchung; dabei sind Zugbeanspruchung $(+)$ und Druckbeanspruchung $(-)$ zu unterscheiden. $\tau_{\perp\perp}$ = Quer/Quer-Schubbeanspruchung. $\tau_{\parallel\perp}$ = Quer/Längs-Schubbeanspruchung, $\tau_{\perp\parallel}$ = Längs/Quer-Schubbeanspruchung. Die zugehörigen Festigkeiten $R_{\parallel}^{(+)}, R_{\parallel}^{(-)}, R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\perp}, R_{\perp\parallel}$ werden sämtlich als positive Werte angegeben, auch die Druckfestigkeiten.

Weil die Bauteile häufig Flächentragwerke sind, in denen ebene Spannungszustände vorherrschen, überwiegen die Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ mit Kraftwirkungen in der Schichtebene gegenüber den Spannungen $\sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}$ mit Kraftwirkung in Dickenrichtung. **Bild 1.2** stellt die typischen Beanspruchungen dar, die an einem UD-Verbund auftreten können.

Aus mikromechanischer Sicht existieren in jedem Faserverbundbauteil bereits unmittelbar nach seiner Herstellung Myriaden von kleinen "Brüchen", die von Verspannungen zwischen Fasern und Matrix infolge des Reaktionsschwunds des Matrixmaterials und von Abkühlspannungen verursacht wurden. Spätestens bei den ersten Belastungen des Bauteils treten weitere Mikro-Schädigungen hinzu, meist in Form kleiner – mit dem Auge nicht feststellbarer – Risse in der Matrix und stellenweiser Ablösungen der Matrix von der Faser. Da solche Mikroschäden optisch kaum wahrnehmbar sind, benutzt man in der Werkstoffprüfung häufig die Schallemissions-Analyse, um den Beginn und den Ablauf solcher Mikroschädigungen zu untersuchen. Auch das Erscheinen einer ausgeprägten Schädigungs-Hysterese bei mehrmaliger Belastung gibt Aufschluß über das Auftreten und das Ausmaß solcher Mikroschädigungen. **Bild 1.3** zeigt dies am Beispiel einer reinen $\tau_{\perp\parallel}$ -Schubbeanspruchung.

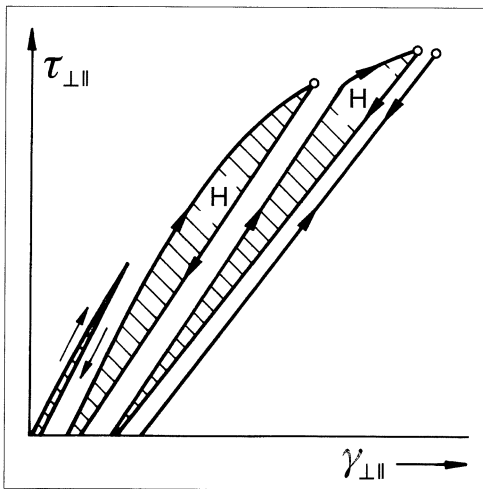


Bild 1.3: Schubspannungs, Schiebungs-Diagramm bei Quer/Längs-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\parallel}$ für Be- und Entlastungsvorgänge mit stufenweise gesteigerter Höchstlast. H = Hysterese infolge Mikroschädigungen

Mikroschädigungen dieser Art können sich bei einer Belastungssteigerung oder bei wiederholter Belastung zu größeren Rissen vereinigen, die, wenn sie eine gewisse Größe erreicht haben, plötzlich eine UD-Schicht – meistens in Dickenrichtung verlaufend – vollständig durchtrennen. Beim Eintritt dieser "makromechanischen", d.h. mit Mittelspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ usw. beschreibbaren, Bruchvorgänge beginnt die "ingenieurmäßige" Betrachtung.

Solche örtlich begrenzten, aber die Einzelschicht auf ihrer ganzen Dicke durchtrennenden Teilbrüche werden "Zwischenfaserbrüche" genannt; bei Laminaten spricht man auch von "Zwischenfaserrissen". Sie spielen in diesem Buch eine wichtige Rolle. Weil sie bei einem gut konzipierten Bauteil normalerweise nicht unmittelbar zur Erschöpfung der Tragfähigkeit führen, sind sie in der Vergangenheit zu wenig beachtet worden. In der Praxis hat sich aber gezeigt, daß es verschiedene Arten von Zwischenfaserbrüchen gibt, von denen einige

relativ harmlos, andere jedoch sehr gefährlich sind. In jedem Fall bewirken diese "Makro-Schädigungen" in Form von Zwischenfaserbrüchen örtliche Spannungskonzentrationen, die eine Schichtentrennung, eine sogenannte Delamination, und eine verstärkte Anfälligkeit gegen Faserbrüche – insbesondere bei schwingender Beanspruchung – zur Folge haben können.

Wenn bei der ingenieurmäßigen Betrachtungsweise von "Faserbruch" gesprochen wird, ist damit nicht der Bruch einer Elementarfaser oder einiger weniger Elementarfasern gemeint, sondern ein gehäufter Elementarfaserbruch, bei dem Zigtausende von Elementarfasern fast gleichzeitig brechen.

Da die meistens parallel orientierten Fasern der Einzelschichten im Laminat in verschiedenen Richtungen angeordnet sind, erfahren die einzelnen Schichten in der Regel sehr unterschiedliche Beanspruchungen, so daß sie ihre Zwischenfaserbruch- oder Faserbruchgrenzen nicht gleichzeitig erreichen. Deshalb stellt sich bei einer allmählichen Laststeigerung oder bei schwingender Langzeitbeanspruchung ein sukzessives Bruchgeschehen ein. Dies vor allem ist es, was die Bruchanalyse von Laminaten so schwierig macht, und nicht – wie vielfach angenommen wird – die Anisotropie. Um ein solches fortschreitendes Bruchgeschehen rechnerisch einigermaßen realistisch verfolgen zu können, benötigt man

1. eine schichtenweise Spannungs- und Verzerrungsanalyse,
2. Bruchkriterien für die Einzelschichten der Lamine,
3. Degradationsmodelle zum Erfassen der Auswirkung von Teilbrüchen (meist Zwischenfaserrissen), die noch nicht zum Totalbruch des Laminats führen,
4. ein Prozedere (im allgemeinen ein Rechenprogramm), das die genannten Teilbereiche in eine sinnvolle Abfolge bringt, damit das sukzessive Bruchgeschehen wirklichkeitsnah simuliert wird.

Hiermit ist in groben Zügen der Problemkreis umrissen, der im Buch behandelt wird. Die "Kunst" besteht darin, für die Alltagspraxis des Ingenieurs Rechenmodelle zu finden, die einfach zu handhaben sind und geringen Rechenaufwand verursachen und dennoch die physikalische Realität in guter Näherung wiedergeben.

1.2 Gegenwärtige Situation

Der augenblickliche Zustand wird treffend durch die folgende Bemerkung zu Faserverbund-Bruchkriterien charakterisiert, die sich in einem Entwurf zum neuen *Structural Materials Handbook* der ESA/ESTEC findet: "Die meisten Festigkeitstheorien können sich nur auf ganz wenige Versuchsergebnisse stützen, werden aber offensichtlich trotzdem mit diesen gerechtfertigt. So neigen die Konstrukteure dazu, exakte Spannungsanalysen durchzuführen, bei

denen sie sorgfältig ermittelte Elastizitätsgrößen benutzen; sie sind dann aber gezwungen, Festigkeiten für einachsige Beanspruchung in Verbindung mit Bruchtheorien anzuwenden, über die wenig bekannt ist.”

Nachdem man in der Frühzeit der Faserverbundtechnik versucht hat, Bruchkriterien für ganze Laminat aufzustellen, stimmen Forscher und Konstrukteure heute weitgehend darin überein, daß – wegen des sukzessiven Bruchgeschehens – nur eine schichtenweise Spannungs- und Bruchanalyse in Betracht kommt. Etliche, für eine wirklichkeitsnahe Bruchanalyse von Laminaten ganz wesentliche Gesichtspunkte und Erkenntnisse wurden schon in zwei mehr als 25 Jahre zurückliegenden Veröffentlichungen [1,2] dargestellt. Die wichtigsten waren:

- Es müssen gleichzeitig zwei weitgehend voneinander unabhängige Bruchkriterien benutzt werden, und zwar eines für Faserbruch (Fb) und eines für Zwischenfaserbruch (Zfb), denn die Auswirkungen der beiden Brucharten sind grundverschieden und ebenso die konstruktiven Gegenmaßnahmen gegen die eine oder andere Bruchart.
- Bei der Beurteilung der Gefährlichkeit von Zwischenfaserrissen muß zwischen der relativ harmlosen Rißbildung infolge Quer-Zugspannungen ($\sigma_2 > 0$) und den mit einer ”Sprengwirkung” auf das Laminat verbundenen keilförmigen Brüchen bei überwiegender Quer-Druckbeanspruchung ($\sigma_2 < 0$) unterschieden werden.
- Das Festigkeitsverhalten im Druckbereich ($\sigma_2 < 0$) wird nicht von der Zugfestigkeit beeinflusst und das Festigkeitsverhalten im Zugbereich ($\sigma_2 > 0$) nicht von der Druckfestigkeit. Deshalb sollte eine (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve, die dieses Festigkeitsverhalten beschreibt, nicht mit einer einzigen Gleichung formuliert werden, in der sowohl die Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$ als auch die Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ vorkommt.
- Die durch Zfb verursachte Rißbildung ”erweicht” eine Schicht sukzessive und nicht schlagartig. Deshalb sollte die Degradation von Steifigkeiten mittels ”Verschmieren” der Risse nach dem Überschreiten von Rißbildungsgrenzen allmählich und nicht sprungartig erfolgen, und sie muß vor allem selektiv durchgeführt werden, d.h. bei $\sigma_2 < 0$ anders als bei $\sigma_2 > 0$.

Obwohl diese grundlegenden Erkenntnisse durch Experimente vielfach bestätigt und in den letzten beiden Jahrzehnten auch von anderen Autoren, z.B. von *Hashin* [3] und *Hart-Smith* [4] in ähnlicher Weise dargelegt worden sind, werden sie bei den heute gebräuchlichen Modellen und Rechenprogrammen zur Laminat-Bruchanalyse keineswegs durchgängig beachtet. So werden beispielsweise immer noch Festigkeiten des UD-Verbunds, die einem Zwischenfaserbruch zugeordnet sind, mit Faserbruch-Festigkeiten in einem einzigen ”globalen” oder ”pauschalen” Bruchkriterium vereinigt [5], so daß keine klare Entscheidung darüber gefällt werden kann, ob die erhaltene Information ”Bruch” einem Zwischenfaserbruch oder einem

Faserbruch zuzuordnen ist. Durch eine unrealistische Degradation von Steifigkeiten aller im Laminat vereinigten Einzelschichten wird dann nach dem "Bruch" der ersten Schicht (First Ply Failure, FPF) versucht, das ursprünglich nicht differenzierende Bruchkriterium in eine Art Faserbruch-Kriterium umzuwandeln. Das tatsächliche sukzessive Bruchgeschehen kann so aber nicht realistisch rechnerisch simuliert werden, und es verbleiben große Unsicherheiten bei der Interpretation der Ergebnisse, wie in [6] dargelegt wurde.

In den letzten drei Jahrzehnten sind laufend neue Bruchkriterien für Faser-Matrix-Verbunde publiziert worden. In einer 1986 erschienenen Übersicht gab *Nahas* [7] bereits über 30 Kriterien an. Heutige Lehrbücher und Handbücher, die sich mit dem Dimensionieren von Bauteilen aus Faser-Matrix-Verbunden befassen, führen eine verwirrend große Anzahl von Bruchkriterien auf, die z.T. zu unterschiedlichsten Festigkeitsvorhersagen führen. In der neuesten Ausgabe eines Handbuches [8] werden allein etwa 20 Gruppen von Bruchkriterien mit jeweils bis zu vier Varianten aufgezählt. Den Anwendern kann dazu aber keinerlei Empfehlung für eine vernünftige Wahl gegeben werden, weil keines der Kriterien hinreichend experimentell abgesichert ist und für eine Bewertung der Bruchkriterien eine physikalische Grundlage fehlt. Diese frustrierende und die Nutzung des Potentials der Faserverbundwerkstoffe hemmende Situation muß dringend überwunden werden.

Vergleichsweise günstig stellt sich die Situation dagegen bei der schichtenweisen Spannungs- und Verzerrungsanalyse von Laminaten dar. Es darf wohl angenommen werden, daß heutzutage jeder professionell mit der Entwicklung von Faserverbundbauteilen befaßte Konstrukteur über Rechenprogramme verfügt, die auf der klassischen Laminat-Theorie (Classical Laminat Theory, CLT) basieren. Die Entwicklung der Finite Elemente Methode (FEM) bedeutete auch für die Spannungsanalyse der Laminat ein enormen Fortschritt. Für die zuverlässige und rationelle Berechnung räumlicher (3D)-Spannungszustände in relativ dicken Laminaten bedarf es allerdings noch der Entwicklung für die Ingenieurspraxis geeigneter Elemente. Hier kommt es vor allem darauf an, zu verhindern, daß der Rechenaufwand bei dicken und vielschichtigen Laminaten "explodiert". Es zeichnen sich aber bereits Näherungsverfahren ab, die den Rechenaufwand in vertretbaren Grenzen halten [9,10].

Ein Problem, das bei den Spannungsanalysen jeglicher Art noch Schwierigkeiten bereitet, ist die Berücksichtigung nicht-linearer Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen, wie sie insbesondere in den (τ_{21}, γ_{21}) -Diagrammen und $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagrammen, wenn σ_2 eine Druckspannung ist, zum Ausdruck kommen. Die meisten kommerziell vertriebenen Rechenprogramme sind außerstande, nicht-lineare orthotrope Stoffgesetze zu berücksichtigen, die das Verformungsverhalten von Faser-Matrix-Verbunden richtig beschreiben. Dadurch können beachtliche Fehler entstehen, s. Abschnitt 3.3 .

Besonders unbefriedigend ist die Situation bei den Degradationsmodellen. In der erwähnten Übersicht [7] werden im Vergleich zu den zahlreichen Bruchkriterien nur wenige Degr-

dationsmodelle aufgeführt, und von denen erscheinen manche auch noch recht unrealistisch. Gerade bei den Degradationsmodellen besteht deshalb Forschungsbedarf.

In kommerziellen Rechenprogrammen ist eine dem sukzessiven Bruchgeschehen angemessene Degradation von Steifigkeiten und Festigkeiten überhaupt nicht vorgesehen. Deshalb erhält man häufig nur bis zum FPF einigermaßen verlässliche Ergebnisse. FPF der harmlosen Art wird aber häufig schon bei etwa 10% der zum Totalbruch führenden Last erreicht, so daß in hochbeanspruchten Leichtbauteilen auch bei normalen Betriebszuständen die FPF-Last weit überschritten werden muß. Deshalb ist es wichtig, mit Hilfe einer über FPF hinausgehenden Bruchanalyse zu erfahren, bei welchen Lasten und in welchen Schichten weitere Teilbrüche zu erwarten sind, um durch einen geschickten Laminataufbau deren Auswirkungen mildern zu können. Die "bunten Bilder", die manche Rechenprogramme erzeugen, um so die bei einem gegebenen Belastungszustand auftretende "Material-Anstrengung" sichtbar zu machen, basieren häufig auf unrealistischen Bruchkriterien und geben dem Konstrukteur meistens keine Handhabe, das entworfene Laminat gezielt schrittweise zu verbessern.

Alles in allem stellt sich die heutige Situation bei der Festigkeits- oder Bruchanalyse von Laminaten als höchst unbefriedigend dar. In der Forschung auf diesem Gebiet hat es häufig Phasen der Stagnation gegeben. In den letzten Jahren sind aber wieder neue Aktivitäten, insbesondere bei der Entwicklung physikalisch begründeter Zwischenfaserbruch-Kriterien zu verzeichnen [11 bis 16]. Hierüber wird ausführlich im Teil III des Buches berichtet.

Vertiefte Einblicke und neue Erkenntnisse zum Problemkreis der Schädigungs- und Bruchvorgänge in Laminaten sind aus dem Forschungsgebiet "Schädigungs-Mechanik" (Damage Mechanics) zu erwarten, das sich in den letzten Jahren rasant entwickelt [17]. Auf diesem Gebiet wird versucht, die Schädigungs- und Bruchvorgänge auf einer soliden thermomechanischen Grundlage sehr "korrekt" zu beschreiben. Dabei werden verständlicherweise wegen des vielfach beobachteten Spröbruch-Verhaltens – besonders bei Zwischenfaserbrüchen – weitgehend bruchmechanische Ansätze benutzt. Es ist nicht verwunderlich, daß infolge der Kompliziertheit der Zusammenhänge auch die theoretischen Formulierungen nicht so einfach und übersichtlich sein können, wie man sie sich für die Konstruktionspraxis wünscht. Die Arbeiten auf diesem Gebiet sind noch stark im Fluß, und so ist noch nicht absehbar, ob man über die Damage Mechanics schlußendlich auch zu Bruchkriterien und Degradationsmodellen gelangen kann, die für die Konstruktionspraxis geeignet sind. Vorerst scheint dies aus der Sicht des Autors noch nicht der Fall zu sein. Vermutlich bedarf es für die Konstruktionspraxis noch auf längere Sicht einer mehr phänomenologisch ausgerichteten Betrachtungsweise und Modellierung als der in der Schädigungsmechanik üblichen. Die Modelle sollten jedoch – so weit wie irgend möglich – eine physikalische Basis haben. Hierfür wird die Schädigungsmechanik sicher fortan wichtige Einsichten und Hilfen liefern.

1.3 Zielsetzung

Die zum umrissenen Problemkreis in den letzten Jahrzehnten erschienenen Publikationen sind auch für den Experten nicht mehr überschaubar und in ihren Aussagen oft recht widersprüchlich. Es dürfte deshalb kaum durchführbar – aber auch wenig sinnvoll – sein, einen breit angelegten historischen Abriss der wissenschaftlichen Entwicklung dieses Gebiets zu geben. Stattdessen erschien es zweckmäßig, auf der Basis der im Teil I behandelten Grundlagen im Teil II des Buches eine Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten vorzustellen, die sich in der Praxis der Bauteilentwicklung im Verlaufe vieler Jahre herausgebildet und bewährt hat. Es werden Probleme aus allen vier in Betracht kommenden Bereichen (Spannungsanalyse, Bruchkriterien, Degradationsmodelle und deren Verkettung durch ein Rechenprogramm) behandelt. Dadurch, daß stets die Verbindung zwischen dem Rechenmodell und der im Experiment zu beobachtenden Realität hergestellt wird, soll vor allem die Urteilsfähigkeit bezüglich der Brauchbarkeit von Rechenmodellen gestärkt werden.

Bei der Lektüre von Teil I und II des Buches wird deutlich werden, daß es in der Festigkeitsanalyse von Laminaten noch manche Schwachstelle und auch erhebliche Wissenslücken gibt. In der Forschung zeichnen sich aber z.Zt. neue Lösungen ab, auf die sich der "Anwender" möglichst frühzeitig einstellen sollte. Deshalb wird im Teil III ein Einblick in die Entwicklung einer neuartigen Zfb-Analyse gegeben, die physikalisch plausibler ist als die heutige Vorgehensweise und außerdem noch interessante Zusatzinformationen über die Bruchrichtung und den Bruch-Modus liefert. Für den ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand sind einige dieser neuartigen Ansätze schon so weit ausgereift, daß sie in Teil II aufgenommen werden konnten.

Einschränkend muß darauf hingewiesen werden, daß die dargestellten Modelle sich bei Arbeiten mit Faser-Kunststoff-Verbunden, insbesondere an GFK-Bauteilen, entwickelt haben. Sie sind deshalb sicher nicht direkt auf beliebige andere Faser-Matrix-Kombinationen übertragbar. Dennoch dürfte manches generelle Gültigkeit besitzen, sofern die Fasern (in ihrer Längsrichtung) erheblich höhere Elastizitätsmoduln und Festigkeiten aufweisen als der Matrix-Werkstoff und die Bruchdehnung der Matrix größer ist als die der Fasern.

Neben der Stärkung der Urteils- und Kritikfähigkeit hat die vorliegende Arbeit das Ziel, für die praktische Anwendung bewährte Modelle und Rechenverfahren zur Festigkeitsanalyse allgemein bekanntzumachen, die dazu beitragen können, die Festigkeitsanalyse zuverlässiger und die Entwurfsarbeit zielgerichteter zu gestalten und somit die Entwicklungszeiten und -kosten bei Faserverbundbauteilen zu verringern.

2 Bruchgeschehen in Laminaten

2.1 Zum Aufbau von Laminaten

Das Bruchgeschehen in Faser-Matrix-Laminaten wird in hohem Maße vom stofflichen und geometrischen Aufbau der Einzelschichten und des Laminats mitbestimmt. Im Zusammenhang mit Fragen der Bruchanalyse interessieren natürlich in erster Linie solche Lamine, mit denen sich relativ hohe Festigkeiten erzielen lassen. Um hohe Schädigungsgrenzen und Festigkeiten zu erreichen, muß man darauf achten, daß die Fasern oder Faserstränge möglichst gestreckt – im Idealfall auf geodätischen Linien des Bauteils – im Laminat plaziert werden. Nicht vorteilhaft sind unter diesem Aspekt Gewebe, bei denen der Webprozeß eine gewisse Welligkeit der Fäden bewirkt. Ähnliches gilt für Wickellamine, wenn bei großen Wickelkörpern mit relativ schmalen Wickelbändern gearbeitet werden muß, die sich überkreuzen und dabei – jedenfalls stellenweise – zu einer "verflochtenen" Faserstruktur führen.

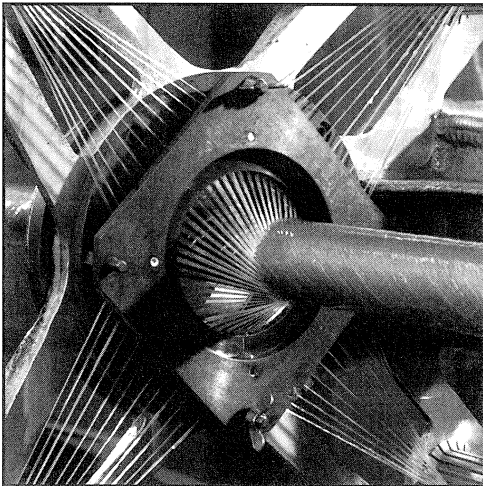


Bild 2.1: Ringfadenaugen mit 48 Glasfaser-Rovings für das Wickeln von Pkw-Antriebswellen [27]

Bei kleineren Wickelkörpern wird eine Welligkeit der abgelegten Wickelbänder dadurch vermieden, daß mit Hilfe eines sogenannten Ring-Fadenauges, **Bild 2.1**, so viele Faserstränge

gleichzeitig auf dem Wickelkörper abgelegt werden, daß sich bei jeder Hin- oder Herbewegung des Ring-Fadenauges eine lückenlose Bedeckung des Wickelkerns mit Fasersträngen ergibt, die als eine Wickellage bezeichnet wird. Weil es das Schädigungsverhalten günstig beeinflusst, wenn ein Laminat aus vielen dünnen Schichten mit unterschiedlicher Faserrichtung aufgebaut ist, sorgt man möglichst dafür, daß jede Wickellage eine andere Faserorientierung erhält als die vorangegangene. So gelangt man zu einem feinschichtigen Laminat, bei dem jede Wickellage eine UD-Schicht darstellt. Diese ist in der Regel zwischen 0,1 mm und höchstens 1 mm dick. Die Dicke von Wickellaminaten mißt im allgemeinen zwischen 1 mm und 10 mm, in Ausnahmefällen bis etwa 50 mm. Die Anzahl der in einem Wickellaminat vereinigten UD-Schichten beträgt mindestens 2, in der Regel aber etwa 10 bis 20, in seltenen Ausnahmefällen bis zu 100.

Die meisten im Wickelverfahren hergestellten Bauteile haben die Form eines kreiszylindrischen Rohres. Das Verhältnis von Innen- zu Außenradius kann aus technologischen Gründen einen Grenzwert nicht wesentlich unterschreiten, der etwa bei $r_i/r_a = 0,75$ liegt. Das bedeutet, daß das Verhältnis von Wanddicke zum mittleren Radius nur etwa $t/r_m \leq 1 : 3,5$ sein kann. **Bild 2.2** zeigt die Querschnitte von zwei mit diesem Grenz-Verhältnis ausgeführten GFK-Drehrohrfedern, die wegen ihrer verschiedenen Beanspruchungsarten (schwellend bzw. wechselnd) mit extrem unterschiedlicher Schichtung aufgebaut wurden [18 bis 20].

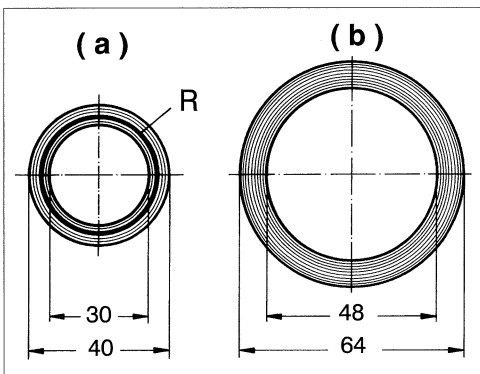


Bild 2.2: Querschnitte von gewickelten GFK-Drehrohrfedern; (a) Pkw-Tragfeder mit Rißstopperschicht R, (b) Lkw-Stabilisator

Während sich die Wickeltechnik besonders für die Herstellung von röhrenförmigen Teilen oder andersartigen Hohlkörpern eignet, werden platten- oder schalenförmige Bauteile, an die hohe Festigkeitsanforderungen gestellt werden, vorteilhaft aus sogenannten Prepregs gefertigt. Dabei handelt es sich um Bahnen aus Fasermaterial – häufig parallel gerichteten Fasersträngen – die mit Matrixmaterial vorimprägniert wurden. Durch eine gewisse Vorreaktion wurde das Matrixmaterial schon aus dem flüssigen in einen pastös-klebrigen Zustand überführt, was die Handhabung sehr erleichtert. Ein Prepreg-Laminat entsteht, indem

Prepreg-Zuschnitte nach einem Verlegeplan geschichtet werden und anschließend unter Hitze und leichtem Druck das Matrixmaterial ausgehärtet wird [21,22].

Die einzelnen UD-Schichten eines Prepreg-Laminats können jeweils aus einer oder mehreren Prepreglagen gebildet werden, so daß auch hier – wie in Wickelteilen – Dicken der einzelnen UD-Schichten von etwa 0,1 mm bis maximal 1 mm die Regel sind. Laminatdicken zwischen 1 mm und 10 mm sind üblich, jedoch sind auch dünnere und dickere Lamine herstellbar.

Auch bei solchen Laminaten wird man bestrebt sein, die Faserrichtung von Lage zu Lage zu variieren. Wenn für das Laminat ebene Beanspruchungen zu erwarten sind, strebt man eine "homogene" Schichtung an, d.h. die Lagen mit jeweils gleicher Faserrichtung werden möglichst gleichmäßig über die Dicke des Laminats verteilt. Außerdem ist eine symmetrische Schichtung bezüglich der Mittelebene vorteilhaft. Dadurch können unerwünschte Krümmungen und Verwindungen der Lamine bei der Belastung, aber auch bei Änderungen der Temperatur und des Feuchtegehalts vermieden werden. Wird das Laminat jedoch auch durch Biege- und Torsionsmomente belastet, ist man u.U. gezwungen, eine sandwichartige Schichtung vorzunehmen, d.h. mehrere Prepreglagen mit gleicher (oder besser: fast gleicher) Faserrichtung zusammenzufassen. Wenn irgend möglich, wird man auch in solchen Fällen zumindest eine kleine Winkeldifferenz von etwa 10° bis 20° zwischen den Faserrichtungen der einzelnen Prepreglagen vorsehen, damit ein in einer Schicht entstandener Riß an den Fasern der nächsten Schicht gestoppt wird. (Ob hierfür noch kleinere Winkeldifferenzen ausreichen, müßte experimentell geklärt werden.)

Meistens findet sich in allen Schichten eines Laminats der gleiche Fasertyp. Gelegentlich kommen aber auch sogenannte Hybrid-Lamine vor, bei denen – auch im Hinblick auf einen erwünschten Sandwicheffekt – z.B. die inneren Schichten mit Glasfasern und die äußeren mit Kohlenstoffasern ausgeführt werden.

Bei modernen Segelflugzeugen werden die Tragflügel und Rumpfe fast ausschließlich als Faserverbundbauteile ausgeführt. Diese werden aus Kostengründen vorwiegend in handwerklichen Laminierverfahren unter Verwendung von Glasseiden- und Kohlenstoffasergeweben hergestellt. Um stärkere Fadenwelligkeit zu vermeiden, verwendet man vorzugsweise kettstarke Gewebe, s. Bild 7.3 auf S. 96, bei denen die hauptsächlich lasttragenden Kettfäden nur eine sehr geringe Welligkeit aufweisen. Statt einer einzelnen Gewebelage mit gleich vielen Kett- und Schußfäden werden zwei unter 90° gekreuzte Lagen kettstarken Gewebes eingesetzt. So werden beispielsweise $\pm 45^\circ$ -Lamine für torsionssteife Schalen hergestellt.

Man darf somit annehmen, daß hochfeste Lamine, die einer Festigkeitsanalyse bedürfen, keine ausgeprägte Fadenwelligkeit aufweisen, deren Modellierung [23] Schwierigkeiten bereiten würde. Bei den meisten hochbeanspruchten Laminaten dürfte der Schichtenverbund aus UD-Schichten ein gut an die Wirklichkeit angepaßtes Modell darstellen.

2.2 Zwischenfaserbrüche

Im Hinblick auf die Entwicklung einer Theorie zum Festigkeitsverhalten von Laminaten wird hier ausschließlich das Bruchverhalten einer UD-Schicht innerhalb eines Laminats und nicht einer einzelnen UD-Schicht betrachtet. Unter Zwischenfaserbruch (Zfb) wird – wie eingangs schon erwähnt – eine Werkstofftrennung verstanden, die zwischen den Fasern, d.h. vorwiegend durch das Matrixmaterial, aber gelegentlich auch längs der Faser/Matrix-Grenzflächen verläuft und die UD-Schicht in ihrer gesamten Dicke durchtrennt. Wie weit sich ein Zfb in der Faserrichtung erstreckt, hängt von verschiedenen Einflußgrößen wie Homogenität des Spannungszustands, Sprödigkeit des Werkstoffs usw. ab.

Beim Bruchversuch an einem UD-Probekörper würde ein solcher Zfb natürlich zu einem Totalbruch des Probekörpers führen, der meistens ein ausgesprochener Spröbruch ist, was man bei der Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen UD-Probekörpern [24] beobachten kann. In einem Laminat wird aber durch einen Zfb allenfalls der Zusammenhalt der Schichten in einem kleinen örtlich begrenzten Bereich etwas gestört. Die vom Zfb betroffene Schicht bleibt weiterhin mit ihren Nachbarschichten verbunden; d.h. ein Zfb macht sich zunächst nur als Riß in der betroffenen Schicht bemerkbar. Dadurch wird der Kraftfluß der Schicht an der Bruchstelle unterbrochen oder zumindest gestört, es erfolgt eine örtliche Umleitung der Schichtkraft über die Nachbarschichten. Meistens verläuft der Riß ziemlich gradlinig in Dickenrichtung, aber z.B. bei überwiegender Quer-Druckbeanspruchung ist die Rißebene um etwa $+45^\circ$ oder -45° gegen die Dickenrichtung geneigt. Ein Riß infolge Zfb in einer UD-Schicht wird fast immer an den Fasern der Nachbarschichten gestoppt, weil nicht hinreichend Energie zur Verfügung steht, um hochfeste und steife Fasern zu durchtrennen. Dabei entstehen an den Fasern, die den Riß stoppen, "Kerbspannungen". Diese werden später noch eingehend erörtert.

Wenn, nachdem der erste Riß infolge Zfb in einer UD-Schicht aufgetreten ist, die Belastung weiter gesteigert wird, bilden sich in dieser Schicht in dichter Folge mehr und mehr Risse, und zwar in beinahe regelmäßigen geometrischen Abständen. Bei GFK-Laminaten kann man beobachten, daß – falls die Risse im wesentlichen durch eine Quer-Zugbeanspruchung $\sigma_{\perp}^{(+)}$ verursacht werden – die Rißdichte sich schließlich trotz weiterer Laststeigerung kaum noch erhöht. Man spricht davon, daß die Schicht nun mit Rissen "gesättigt" sei. Es hat sich dann bei nahezu regelmäßiger Verteilung der Risse ein mittlerer Rißabstand eingestellt, der, grob gesprochen, etwa das 0,5- bis 1,5-fache der Schichtdicke beträgt. Dieser Zustand wird in der Literatur häufig als der charakteristische Schädigungszustand (Characteristic Damage State, CDS) bezeichnet, weil er offenbar auf verschiedene Weise, auch unabhängig von der Belastungsgeschichte, erreicht werden kann.

Die Tatsache, daß verschiedene Kombinationen von Quer-Normalspannung σ_2 und Quer/Längs-Schubspannung τ_{21} sehr unterschiedliche Ausprägungen (Modi) von Zwischen-

faserbrüchen zur Folge haben können, wird in der Literatur viel zu wenig beachtet. Wenn man sich zunächst auf den ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{21})$ -Spannungszustand einer UD-Schicht beschränkt, sollte man bei der makromechanischen Betrachtungsweise drei Bruch-Modi unterscheiden.

Modus A

Der Zfb wird gemeinsam durch eine Quer-Zugbeanspruchung $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und eine Quer/Längs-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\parallel}$ bewirkt, d.h. bei dem hier betrachteten Spannungszustand durch die Spannungen σ_2 und τ_{21} . Auch die Grenzfälle, in denen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ oder $\tau_{\perp\parallel}$ jeweils allein den Bruch erzeugt, gehören dazu. Die **Risse** verlaufen in Dickenrichtung, sie entstehen also **in der Wirkebene von σ_2 und τ_{21} , Bild 2.3**. Sie öffnen sich um so mehr, je höher $\sigma_{\perp}^{(+)}$ im Vergleich zu $\tau_{\perp\parallel}$ ist. Dadurch werden die Rißufer spannungsfrei. Erst nach einer gewissen "Anlaufstrecke" wird in der gerissenen Schicht infolge der interlaminaren Schubspannungen, die zwischen der gerissenen Schicht und den Nachbarschichten entstehen, wieder eine Spannungshöhe erreicht, die zur Entstehung eines neuen Risses genügt. So erklärt sich auch, daß der Rißabstand nicht beliebig klein werden kann, s. auch Bild 2.6 auf S. 20.

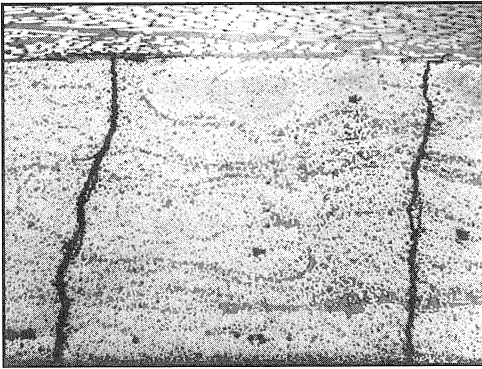


Bild 2.3: Risse infolge von Zwischenfaserbrüchen des Modus A in einer vielschichtigen GFK-Drehrohrfeder (Beanspruchungsrichtung waagerecht). Sie öffnen sich umso mehr, je höher die $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung im Vergleich zur $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung ist.

Bei einer gleichförmigen Laststeigerung entstehen nach dem Erscheinen des ersten Zfb zunächst gehäuft weitere Risse, was sich auch durch eine intensive Schallemission anzeigt. Später ebbt die Rißbildung merklich ab.

Die Tatsache, daß die betroffene Schicht an den gerissenen Stellen kraftfrei geworden ist und erst nach einer Anlaufstrecke wieder mehr oder weniger stark mitträgt, äußert sich nach außen hin so, als ob sich die "Quer-Steifigkeiten" der Schicht im Mittel verringert hätten, und zwar um so mehr, je mehr Risse entstanden sind. Diese Beobachtung wird später bei der Formulierung der entsprechenden Degradationsmodelle genutzt. Die Fasern der betroffenen Schicht werden durch die Zwischenfaser-Rißbildung kaum in Mitleidenschaft gezogen, so daß die Längssteifigkeit und -festigkeit der Schicht nahezu unverändert erhalten bleiben.

Modus B

Die Zwischenfaserrisse, die diesem Bruch-Modus zuzuordnen sind, verlaufen ebenso wie die nach Modus A **in der Wirkebene von σ_2 und τ_{21}** , aber sie können sich nicht öffnen, denn auf den Rißufern wirkt eine Quer-Druckbeanspruchung $\sigma_{\perp}^{(-)}$. Diese ist beim Modus B aber kleiner als oder höchstens gleich groß wie die $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung, die im Grunde die alleinige Ursache des Bruches ist. Die $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung fördert nämlich nicht den Bruch, wie es bei einer $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung der Fall ist, sondern im Gegenteil, sie behindert ihn. In der Werkstoffkunde spricht man von einer "inneren Reibung", die mit der Höhe der $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Druckbeanspruchung anwächst und den $\tau_{\perp\parallel}$ -Schubbruch zunehmend erschwert.

Risse, die bei Modus B entstehen, bringen der Schicht kaum eine Druck-Entlastung, weil sie sich nicht öffnen können. Im Mittel erscheint der Schubmodul $G_{\perp\parallel}$ einer solchen Schicht etwas verringert, aber je höher die $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung ist, um so mehr Schubkraft kann auch durch Reibung der aufeinandergepreßten Rißflächen übertragen werden.

In Laminaten mit drei und mehr Faserrichtungen kommen Zfb des Modus B selten vor, weil hierfür Spannungszustände nötig sind, bei denen $\tau_{\perp\parallel}$ dem Betrage nach größer ist als $\sigma_{\perp}^{(-)}$. Wegen der ausgeprägt nicht-linearen (τ_{21}, γ_{21}) -Zusammenhänge können die zu hohen τ_{21} -Spannungen gehörenden großen Schubverformungen γ_{21} nur in seltenen Ausnahmefällen auftreten, weil meist vorher die Bruchdehnung der Fasern im Laminat erreicht wird.

Modus C

Diese Bruchart tritt beim ebenen (σ_2, τ_{21}) -Spannungszustand dann auf, wenn σ_2 eine Quer-Druckspannung ist und sie dem Betrage nach – grob gesprochen – gleich oder größer als die Schubspannung τ_{21} ist. Das bestimmende Merkmal eines Zfb nach Modus C besteht darin, daß bei einer kombinierten Beanspruchung durch $\sigma_2 < 0$ und τ_{21} der **Bruch nicht in der** in Dickenrichtung verlaufenden **gemeinsamen Wirkebene der beiden Spannungen σ_2 und τ_{21}** stattfindet, sondern in einer gegenüber der Wirkebene von σ_2 und τ_{21} um einen Winkel θ_{fp} ($fp \hat{=}$ fracture plane) geneigten Bruchebene. In dieser wirken nicht mehr allein eine $\sigma_{\perp}^{(-)}$ - und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung, sondern zusätzlich eine Quer/Quer-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\perp}$. Hierauf wird später noch ausführlich eingegangen. Der Bruchwinkel θ_{fp} (Winkel zwischen der Wirkebene von σ_2, τ_{21} und der Bruchebene) kann je nach der Größe des Verhältnisses σ_2/τ_{21} von 0° beim Übergang vom Modus B zum Modus C auf etwa $\pm 50^\circ$ bei reiner Quer-Druckbeanspruchung anwachsen. Mit den bereits kurz erwähnten neuartigen Zfb-Kriterien können all diese Zusammenhänge auch rechnerisch erfaßt werden.

Hier ist zunächst die Feststellung wichtig, daß Zwischenfaserbrüche des Modus C im Gegensatz zu solchen nach Modus A (und B), die relativ "harmlos" sind, für ein Laminat sehr gefährlich werden können, weil die Keilwirkung des schrägen Bruches im Laminat in Dickenrichtung wirkende Sprengkräfte hervorruft. Daß all dies keine bloße Theorie ist, hat sich an

einem sehr lehrreichen Beispiel aus der Praxis der Bauteilentwicklung der letzten Jahre für den Pkw-Bereich gezeigt, und zwar an der gewickelten Drehrohrfeder, deren Querschnitt aus Bild 2.2 hervorgeht. Es war eine sehr kurze Drehfeder mit einer Einbaulänge ≤ 500 mm zu entwickeln, die bei einem maximalen Verdrehwinkel von 30° als Tragfeder an der Hinterachse eines Pkw fungieren sollte [18 bis 20,25]. Das machte eine äußerst hohe Werkstoffausnutzung erforderlich, die nur mit einem unkonventionellen Laminataufbau erzielt werden konnte. Am Beginn dieser Bauteilentwicklung bestand die Wandung des Drehrohres aus einer dünnen inneren UD-Schicht aus drei Wickellagen mit einem Wickelwinkel von -45° und einer dickeren äußeren UD-Schicht aus sieben Wickellagen mit einem Wickelwinkel von $+45^\circ$. Zwischen beiden Schichten war eine Aramidfaserlage als "Rißstopperschicht" eingefügt, welche die Kerbwirkung mildern sollte, die von den frühzeitig in der Innenschicht entstehenden Zwischenfaserbrüchen vom Modus A auf die hoch zugbeanspruchten Fasern der Außenschicht ausgeübt wird, **Bild 2.4**.

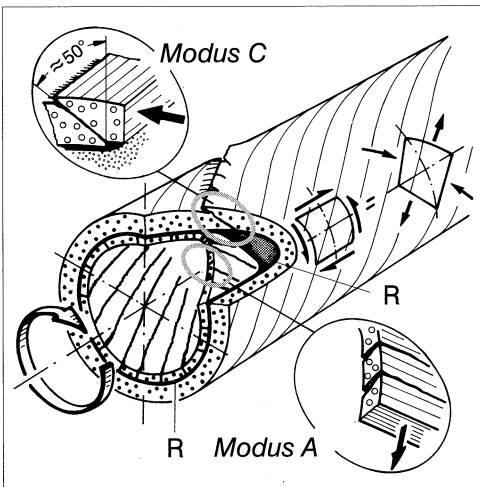


Bild 2.4: Pkw-Drehrohrfeder mit Zwischenfaserbrüchen des Modus A in der Innenschicht und einem Zfb vom Modus C in der Außenschicht. Zwischen Innen- und Außenschicht ist die Rißstopperschicht R eingefügt.

Die Modus A-Risse in der Innenschicht erwiesen sich bei diesem Bauteil als völlig harmlos; obwohl sie bereits nach wenigen Schwingspielen entstanden, ertrug die Drehfeder im Mittel $2 \cdot 10^6$ Schwingspiele mit Höchstlast, ohne daß weitere sichtbare Schäden eintraten. Im Gegensatz dazu führte ein einziger Riß vom Modus C in der Außenschicht, der sich als Folge der dort herrschenden hohen Quer-Druckspannung einstellte, zu einem abrupten Versagen der Drehfeder. Die gleiche Erscheinung wurde an vielen geprüften Prototypen beobachtet. Die Bruchwinkel der Zfb nach Modus C lagen stets bei etwa $\pm 50^\circ$. Daraus resultierte, weil die hohe Druckspannung σ_2 trotz des Risses weiter über die Rißflächen übertragen wurde, eine Art Keilwirkung mit einer radial nach innen gerichteten Kraftkomponente. Diese ver-

ursache einen schlagartigen "Kollaps" der dünnen Innenschicht und damit den Totalbruch des volltordierten Rohres. Im Abschnitt 2.5 wird dieser Vorgang näher erläutert.

Auch bei allgemein räumlichen Spannungszuständen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ kann die Unterscheidung der Zfb-Modi A, B, C beibehalten werden. Allerdings kann der sich einstellende Bruchwinkel oder Bruchwinkelbereich – z.B. bei der (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung 0° bzw. 0° bis $\pm 50^\circ$ – nun nicht mehr a priori den Modi zugeordnet werden. Die verschiedenen Bruch-Modi lassen sich im allgemeinen Fall nur noch durch **die auf der Bruchebene wirkende Beanspruchungskombination** charakterisieren.

Modus A: Auf der Bruchebene wirkt eine Kombination von $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und $\tau_{\perp\parallel}$ (oder es wirkt $\sigma_{\perp}^{(+)}$ bzw. $\tau_{\perp\parallel}$ allein).

Modus B: Auf der Bruchebene wirkt eine Kombination von $\sigma_{\perp}^{(-)}$ und $\tau_{\perp\parallel}$.

Modus C: Auf der Bruchebene wirkt eine Kombination von $\sigma_{\perp}^{(-)}$ und $\tau_{\perp\perp}$ oder eine Dreierkombination $\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$.

Beim allgemeinen räumlichen Spannungszustand kann noch eine vierte Bruchart auftreten, die folgendermaßen gekennzeichnet ist:

Modus A*: Auf der Bruchebene wirkt eine Beanspruchungskombination $\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$.

2.3 Delaminationen

Ebenso wie die zu Zwischenfaserbrüchen neigenden faserparallelen Schnittebenen der UD-Schicht sind auch die Grenzflächen, mit denen Schichten in einem Laminat an ihre Nachbarschichten grenzen, ausgesprochene Schwachstellen, weil in ihnen keine Faserverstärkung wirksam wird. In beiden Fällen wird wenig Energie benötigt, um einen Bruch zu erzeugen, denn es müssen dabei keine hochfesten und steifen Fasern durchtrennt werden. Wenn vorher der Begriff "Zwischenfaserbrüche" benutzt worden ist, liegt es nahe, bei Werkstofftrennungen zwischen Einzelschichten eines Laminats von "Zwischenschichtbrüchen" zu sprechen. Dies ist aber unüblich, der gebräuchliche Begriff ist "Delamination".

Eine Schichtentrennung kann eigentlich nur von Spannungen bewirkt werden, die als Zugspannung senkrecht zur Schichtgrenzfläche oder als Schubspannungen in der Grenzfläche der Schichten wirken. Beim allgemeinen räumlichen Spannungszustand $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ können dies nur die Spannungen σ_3 (sofern positiv), τ_{23} (richtiger τ_{32}) und τ_{31} sein. Man nennt sie die "interlaminaren Spannungen". (Dieser Begriff ist an sich irreführend, denn aus Gleichgewichtsgründen können diese Spannungen nicht nur zwischen den Schichten auftreten, sondern müssen auch in die Schichten hineinwirken.) Spannungsanalysen an Faserverbundbauteilen, die nicht außergewöhnlich "dickwandig" sind und deren Wandungen keine extrem

kleinen Krümmungsradien aufweisen, zeigen aber stets, daß sich in ungestörten Bereichen verhältnismäßig niedrige Werte für σ_3 , τ_{32} und τ_{31} errechnen, so daß man aufgrund üblicher Festigkeitsbetrachtungen auf keinen Fall eine Bruchauslösung von ihnen erwarten kann, wenn nicht schon Anrisse vorhanden sind. Bei zukünftigen experimentellen Untersuchungen sollte man sorgfältig prüfen, ob den zu beobachtenden Delaminationen nicht immer Zwischenfaserrisse vorausgehen, die erst die für die Delamination erforderlichen interlaminaren Spannungen hervorrufen.

Bei jahrelangen Entwicklungsarbeiten an hochbeanspruchten Faserverbundbauteilen, wie z.B. wechselnd beanspruchten GFK-Drehrohrfedern, die als Lkw-Stabilisatoren eingesetzt werden sollen [26], und Pkw-Antriebswellen [27] hat sich immer wieder gezeigt, daß, wenn man von Schlagbeschädigungen (impact) und Beulvorgängen einmal absieht, intensive Delaminationen meist erst eintreten, wenn vorher Zwischenfaserbrüche entstanden sind. Es bedarf also offenbar zur Auslösung von Delaminationen der Spannungskonzentrationen im Bereich der Rißspitze von Zwischenfaserbrüchen.

An Kreuzverbunden aus UD-Schichten ($(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminaten) kann man fast immer beobachten, daß ein Modus A-Zwischenfaserbruch zunächst keine Fasern der Nachbarschicht durchtrennt, sondern statt dessen zu einer kleinen, von der Rißspitze ausgehenden Delamination in der Grenzfläche der Schichten führt. Diese breitet sich oft zunächst nur einseitig, später auch beidseitig von der Rißspitze her aus, **Bild 2.5**.

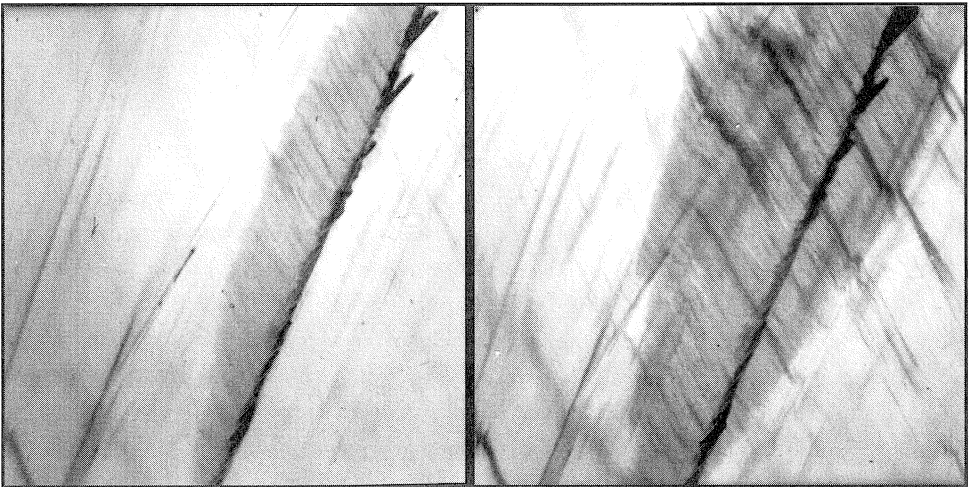


Bild 2.5: Zwischenfaserriß vom Modus A im Durchlicht [27], links mit einseitiger, rechts mit beidseitiger Delamination. (Vergrößerung 20:1)

Delaminationen wachsen sowohl bei monoton ansteigender Belastung als auch bei schwingender Belastung mit konstanter Amplitude. Im Extremfall kann sich durch fortschreitende Delamination die äußerste UD-Schicht vollständig vom übrigen Körper ablösen, wie es bei der Lebensdauererprobung von Pkw-Antriebswellen beobachtet wurde [27]. Es handelt sich also um Rißausbreitung, ein typisches Problem der Bruchmechanik. Ausgangspunkt der Delamination sind offensichtlich nicht relativ homogene Spannungszustände, sondern äußerst ungleichförmige Spannungsverteilungen, wie sie sich z.B. für den Bereich einer UD-Schicht zwischen zwei Modus A-Rissen errechnen lassen [17], **Bild 2.6**.

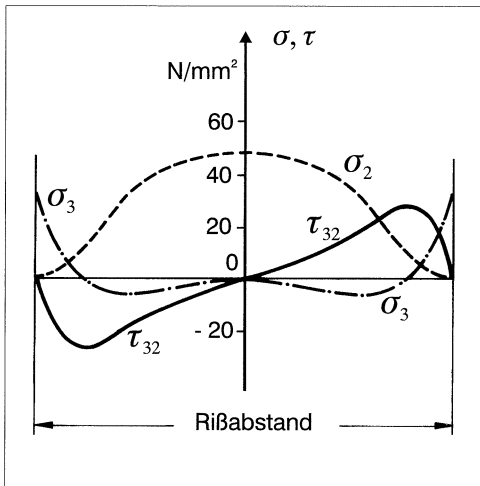


Bild 2.6: Intra- und interlaminare Spannungen der 90°-Schicht zwischen zwei Modus A-Rissen eines (0°, 90°)-Laminats bei einachsiger Zug σ_2 in 0°-Richtung (nach [17,68])

Bereits diese kurzen Ausführungen dürften deutlich gemacht haben, daß eine Festigkeitsanalyse hinsichtlich Delaminationen eine außerordentlich schwierige Aufgabe ist; jedenfalls ist sie um ein Vielfaches schwieriger als die Zfb-Analyse. Auf diesem Gebiet ist noch viel Forschungsarbeit nötig, denn Delaminationen sind – wenn auch meistens indirekt – mitentscheidend für das Versagen von Bauteilen. Dies trifft ganz besonders für wechselnd beanspruchte Bauteile zu [26,27]. Da die Biege- und Drillsteifigkeit eines Laminats durch fortgeschrittene Delamination reduziert wird, kann diese auch zu einem Versagen des Bauteils durch Beulen oder Knicken beitragen.

Es sei hier noch einmal daran erinnert, daß – wie im vorigen Abschnitt dargelegt – Zwischenfaserbrüche des Modus C wegen ihrer Sprengwirkung Delaminationen und örtliches Ausbeulen von Nachbarschichten begünstigen.

2.4 Faserbrüche

Im Grunde genommen sind Faserbrüche die einzigen "erwünschten" Brüche in Faserverbundbauteilen, denn die Fasern sind die eigentlichen Tragelemente, und diese sollten bis zu ihrer Festigkeitsgrenze ausgelastet werden können, bevor irgend etwas anderes bricht. Die Fasern erfahren im Verbund wegen ihrer vergleichsweise hohen Längssteifigkeit sehr hohe Spannungen in der Längsrichtung. In Querrichtung können die auf die Fasern einwirkenden Spannungen nicht höher werden als diejenigen, die von der Matrix oder der Faser/Matrix-Grenzschicht ertragen werden. Diese sind in der Regel um eine Größenordnung kleiner als die ertragbaren Spannungen in faserparalleler Richtung. Für die isotropen Glasfasern erscheinen die "Querspannungen" $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ deshalb ziemlich belanglos; bei stark anisotropen Kohlenstofffasern und Fasern aus aromatischem Polyamid (Aramid) mag sich dies etwas anders verhalten [28,29].

Wie bereits erwähnt, wird hier unter Faserbruch (Fb) keinesfalls der Bruch einzelner Elementarfasern verstanden, sondern das nahezu gleichzeitige "Brechen" einer sehr großen Zahl von Elementarfasern, durch das die Tragfähigkeit einer Schicht in Faserrichtung über eine größere Breite (Größenordnung cm) weitgehend verschwindet. Im Falle einer Zugbeanspruchung in Faserrichtung ist es durchaus berechtigt, von "Brechen" oder "Zerreißen" zu sprechen, während bei Längs-Druckbeanspruchung vielfach die Tragfähigkeit der Fasern dadurch erschöpft wird, daß ihre elastische Stützung durch die Matrix nicht mehr ausreicht, ein Ausknicken zu verhindern. Man spricht von "innerem Knicken" oder "Mikroknicken". Hierbei spielen u.U. Schubverformungen der Matrix, mit der die stützende Matrix der Knick-tendenz der Fasern nachgibt, eine wichtige Rolle [29]. Bei stark anisotropen Kohlenstofffasern ist möglicherweise auch deren Schubfestigkeit für die Festigkeit bei Zug- und Druck in Faser-Längsrichtung maßgebend [28 bis 30]. Diese Fragen sind noch nicht restlos geklärt.

Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß der Bruch von Zigtausenden von Elementarfasern statistischen Gesetzmäßigkeiten unterliegt. Wie man unschwer bei einem Zerreißversuch an einem UD-Probekörper feststellen kann, brechen keineswegs alle Elementarfasern gleichzeitig, sondern schon ab etwa 70 bis 80% der Bruchlast machen sich die ersten Brüche einzelner Elementarfasern und später auch von ganzen Faserbündeln bemerkbar.

Anders als bei Zwischenfaserbrüchen kann man bei Faserbrüchen kaum von Bruchebenen sprechen. In Bereichen, in denen Faserbruch – in der hier gemeinten Bedeutung – stattfindet, wird der Verbund von Faser und Matrix infolge der hohen Energiefreisetzung oft vollständig aufgelöst. Zugbrüche außen liegender Schichten zeigen häufig ein pinselartiges Aussehen. Das bedeutet, daß Degradationsmodelle, die dem Verbund nach dem Faserbruch noch Steifigkeit und Festigkeit quer zur Faserrichtung belassen, unrealistisch sind.

In vielen Fällen richtet der Faserbruch einer Schicht eines Laminats auch Schäden in den Nachbarschichten an, die u.U. sehr gravierend sein können. Es sind dies vor allem Zwi-

schenfaserbrüche und Delaminationen; aber auch ein Faserbruch einer anderen Schicht, deren Faserspannung nahe an der Bruchgrenze angelangt war, kann ausgelöst werden.

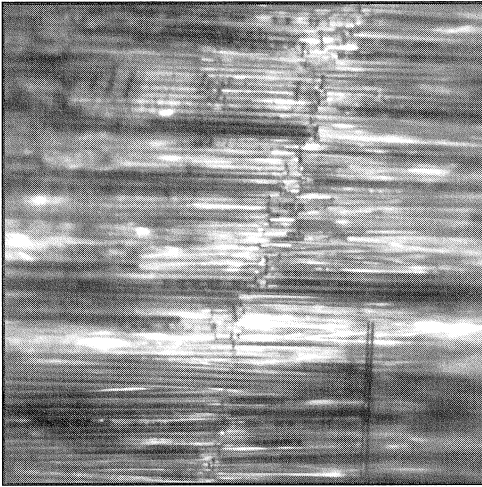


Bild 2.7: Faserbruchfront in einer UD-Schicht einer Pkw-Antriebswelle nach $1,7 \cdot 10^6$ Schwingspielen [27] (Vergrößerung 20:1)

Allenfalls bei schwingender Beanspruchung entwickeln sich gelegentlich gradlinig verlaufende, örtlich begrenzte Bruchfronten, **Bild 2.7**, insbesondere dort, wo der Faserbruch von der Ankerung durch einen Zwischenfaser-Riß der Nachbarschicht initiiert wurde.

Faserbruch in der hier benutzten Bedeutung tritt bei monotoner Laststeigerung nahezu schlagartig ein. Es ist deshalb schwierig festzustellen, welche Vorgänge sich im Einzelnen abspielen, und wie sich insbesondere der großflächige Bruch bei Zug entwickelt.

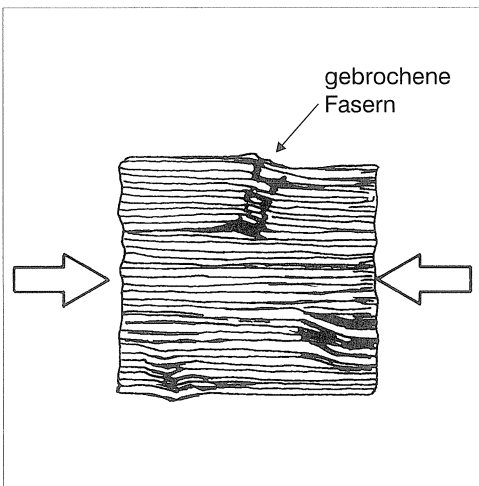


Bild 2.8: Darstellung des Schubknickens (kincking) als Vorstufe des Faser-Druckbruchs des UD-Faser-Matrix-Verbunds

Als Vorstufe des Faser-Druckbruches lassen sich oft örtlich begrenzte Bereiche beobachten, in denen die Fasern ein Schubknicken (kinking) erleiden [29], **Bild 2.8**. Mehrere solche Bereiche mit abgeknickten Fasern können zusammenwachsen, wodurch die Nachbarbereiche zusätzlich Kraft übernehmen müssen. Wenn auch diese plötzlich knicken, kann es zum großflächigen Bruch kommen. Dabei spaltet sich der UD-Verbund auf und einzelne balkenartige Partien brechen infolge der auftretenden örtlichen Biegebeanspruchung. Es entsteht meistens ein ziemlich ausgedehnter und stark zerklüfteter Bruchbereich, **Bild 2.9**.



Bild 2.9: Faserbruch als Druckbruch im UD-Druckgurt eines GFK-Kastenträgers bei zügiger Biegebeanspruchung bis zum Bruch [70]

2.5 Laminat-Versagen

Aus dem Vorausgegangenen ist bereits ersichtlich, daß selbst ein nicht zum Totalbruch führender Faserbruch so erhebliche Zerstörungen im Laminat bewirkt, daß es dadurch unbrauchbar werden kann. Man wird deshalb normalerweise den Eintritt eines Fb in einer Schicht auch als die "Bruchgrenze" des Laminats ansehen, obwohl in einigen Fällen noch eine gewisse Resttragfähigkeit erhalten bleibt. Das kann insbesondere dann der Fall sein, wenn die vom Fb betroffene Schicht relativ dünn ist und im Laminat noch mindestens drei weitere Faserrichtungen vorkommen, in denen die Fasern noch nicht sehr hoch beansprucht sind [31]. Aber auch in einem solchen Fall kann das Laminat infolge der mit dem Fb einhergehenden erheblichen örtlichen Zerstörungen funktionsunfähig geworden sein.

Es kommt relativ selten vor, daß ein Bauteil während seiner gesamten Einsatzdauer immer nur durch einen ganz bestimmten Lastfall beansprucht wird, d.h. daß die an ihm angreifenden Lasten (Kräfte und Momente) stets untereinander in unveränderlichen Verhältnissen

stehen. Der ausschließlich durch Innendruck belastete Behälter ist eine der seltenen Ausnahmen. Tragflügel, Rumpfe und Leitwerke von Flugzeugen müssen hingegen einer Vielzahl von sehr verschiedenen Belastungszuständen (Lastfällen) standhalten. Wenn nicht ein einzelner Lastfall mit seinen Beanspruchungen absolut dominierend ist, sollten die Wandungen solcher Bauteile unbedingt mindestens drei, möglichst recht unterschiedliche Faserrichtungen aufweisen [31]. Dies folgt aus der Netztheorie, s. Abschnitt 3.2.

Für eine reine Innendruckbelastung eines dünnwandigen kreiszylindrischen Rohres ist eine $\pm 55^\circ$ -Wicklung eine herstelltechnisch günstige und zugleich beanspruchungsgerechte Ausführung. Sollte sich das Verhältnis von Umfangsspannung zu Axialspannung, das bei reiner Innendruckbelastung 2:1 beträgt, aber einmal drastisch ändern, z.B. dahingehend, daß die Axialspannung ebenso groß wird wie die Umfangsspannung, wäre das von den Fasern gebildete "Netzwerk" allein nicht imstande, die Belastung aufzunehmen. Es entstehen deshalb hohe σ_{\perp} - und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchungen, die zu massenhaft auftretenden Zwischenfaserbrüchen vom Modus A führen. Diese sind aber in diesem Fall nicht harmlos wie bei einem nach der Netztheorie tragfähigen Laminat, denn die an den Zwischenfaser-Bruchstellen nicht mehr übertragbaren Kräfte können nicht in Fasern umgelenkt werden, **Bild 2.10**.

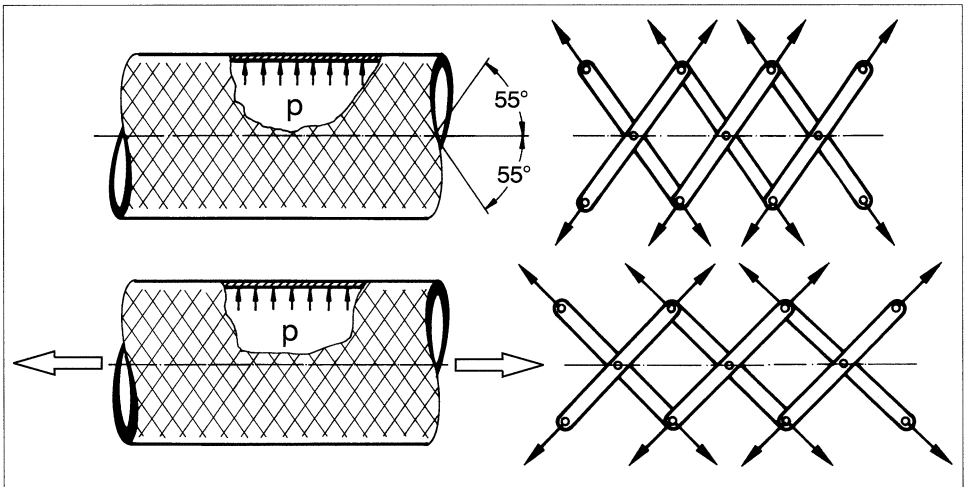


Bild 2.10: Bei einem $\pm 55^\circ$ -Rohr unter axialer Zugspannung, die gleich hoch ist wie die Umfangsspannung, weichen die Fasern wie bei einer Nürnberger Schere der Beanspruchung aus, bis sie die $\pm 45^\circ$ -Lage erreicht haben.

Während sich bei einem beanspruchungsgerechter ausgelegten ($0^\circ, \pm 60^\circ$)-Laminat mit fortschreitender Reißbildung die Kräfte in den Fasern konzentrieren, entziehen sich beim betrach-

teten $\pm 55^\circ$ -Rohr die Fasern wie bei einer "Nürnberger Schere" weitgehend der Beanspruchung. Sie "versuchen" dabei in die Richtungen zu gelangen, die für ein Netzwerk bei gleich hoher Axial- und Umfangsspannung richtig wären, d.h. in die $\pm 45^\circ$ -Richtungen (s. Gl. (3.6) auf S. 33). Wegen der fortschreitenden Reißbildung und, weil die Fasern die Kräfte nicht übernehmen können, treten extrem große Verformungen auf. Diese gehen mit zunehmenden Zerstörungen durch Risse und Delaminationen einher, bis zum Schluß durch örtliche Biegung und Verdrehung von Faserbündeln auch Fasern brechen, **Bild 2.11**.

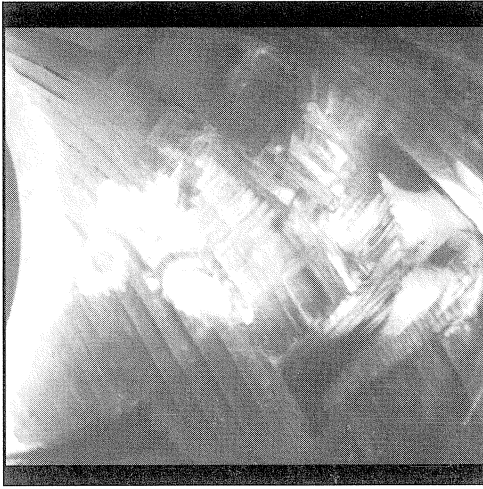


Bild 2.11: Fortschreitende Zerstörung eines $\pm 55^\circ$ -Rohres bei gleich hoher Axial- und Umfangsspannung

Diese undefinierte Versagensart in Form einer fortschreitenden Auflösung des Laminats läßt sich mit den heutigen Mitteln kaum einigermaßen wirklichkeitsgetreu rechnerisch simulieren. Aber nicht nur deshalb vermeiden Faserverbund-Konstrukteure solche nicht an die Beanspruchung angepaßten Lamine, sondern vor allem, weil in ihnen der wertvolle Faserwerkstoff höchst unvollkommen ausgenutzt würde.

Ein anderes Beispiel für ein nicht beanspruchungsgerecht ausgelegtes Bauteil wäre ein $(0^\circ, 90^\circ)$ -Rohr, das auch erheblichen Torsionsmomenten ausgesetzt ist. Während Axial- und Umfangsbeanspruchung sehr gut von einer solchen Faserstruktur aufgenommen werden kann, beteiligen sich die Fasern kaum an der Übertragung der Torsion. Sie verschieben sich infolge der Schubbeanspruchung nur wie die Stäbe eines Parallelogramm-Gestänges, **Bild 2.12**. Die aus der Torsion herrührende Schubbeanspruchung der Rohrwand muß im wesentlichen durch $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung der 0° - und 90° -Schichten aufgenommen werden. Die zugehörige Quer/Längs-Schubfestigkeit der UD-Schichten dürfte $R_{\perp\parallel} \approx 50$ bis 100 N/mm^2 betragen. Trotzdem erträgt die Rohrwandung Schubspannungen (bezogen auf die Axial- und Umfangsrichtung), die $R_{\perp\parallel}$ übersteigen und zwar umso mehr, je feinschichtiger die Wandung ist. Das

”gerissene” Laminat verhält sich so ähnlich wie ein Block aus kreuzweise geschichteten Bretterlagen, bei dem die Bretter nur auf ihren Breitseiten, nicht aber auf ihren Schmalseiten ($\hat{=}$ Rißflächen) miteinander verleimt sind. Bei einer Schubbeanspruchung spalten die Bretter immer mehr auf und danach brechen die großflächigen Verklebungen. Im Laminat äußert sich dieser Vorgang als fortschreitende Rißbildung und nachfolgende Delamination.

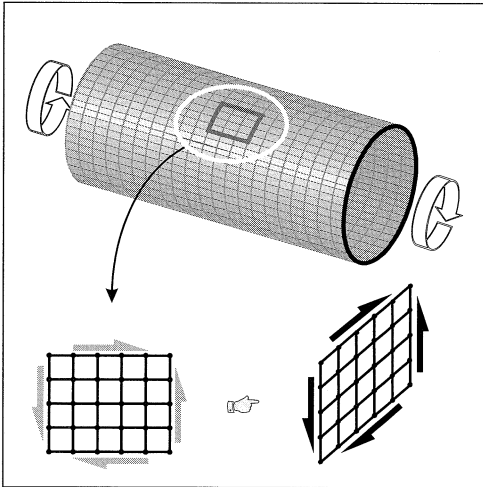


Bild 2.12: Bei einem $(0^\circ, 90^\circ)$ -Rohr unter Torsion weichen die Fasern wie bei einem Parallelogrammgestänge der Beanspruchung aus.

Etwas Ähnliches spielt sich ab, wenn ein $\pm 45^\circ$ -Rohr einachsigt durch Zug oder Druck in Axialrichtung belastet wird. Die Schichten erleiden eine kombinierte $(\sigma_\perp, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung, und auch hier ist eine Kraftumlagerung in die Fasern kaum möglich.

Wenn es sich statt um ein Rohr um einen Plattenstreifen handelt, ist die Beanspruchungssituation noch ungünstiger, weil nun an den seitlichen Rändern auch noch Delaminationen infolge der dort wirkenden örtlich sehr hohen interlaminaren Spannungen auftreten [31].

In der Vergangenheit sind häufig $\pm\omega$ -Lamine (Ausgeglichene Winkelverbunde, Angle Ply Laminates) in Zerreißversuchen geprüft worden, um ”dem Konstrukteur Kennwerte an die Hand zu geben” und um Bruchkriterien auf ihre Brauchbarkeit zu überprüfen, z.B. in [32,33]. Dies ist wegen der geschilderten Vorgänge in solchen Laminaten abwegig. Weder sind solche undefinierten ”Festigkeiten” für eine Faserverbundkonstruktion von Bedeutung, noch kann man mit Bruchkriterien den sich einstellenden fortschreitenden Zerstörungsvorgang, bei dem keine wirksame Umlagerung der Kräfte in die Fasern erfolgen kann, einigermaßen realistisch beschreiben.

Anders verhält es sich mit Laminaten, die mindestens drei merklich voneinander verschiedene Faserrichtungen aufweisen. Fortschreitende Rißbildung infolge Zfb führt hier zu einer zunehmenden Umlagerung der Kräfte in die Fasern, die sich – wie später gezeigt wird – auch

rechnerisch recht gut verfolgen läßt. Mit Zfb-Kriterien kann man den Beginn der Rißbildung in den Schichten beschreiben, Degradationsmodelle erfassen die mit der fortschreitenden Rißbildung einhergehende Verminderung bestimmter Steifigkeiten und die daraus resultierende Umlagerung der Kräfte, und mit gesonderten Fb-Kriterien wird der Eintritt des Faserbruches vorhergesagt.

Abschließend muß hier die Frage der von einem Zfb des Modus C ausgehenden Keil- und Sprengwirkung noch etwas eingehender behandelt werden. Dazu sei zunächst eine einzelne, nicht in einem Laminat eingebettete UD-Schicht betrachtet. Im allgemeinen wirken auf einer schrägen, parallel zu den Fasern verlaufenden Schnittebene drei Spannungen, nämlich die Normalspannung σ_n und die beiden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} , **Bild 2.13**. Schneidet man durch einen schrägen Schnitt unter einem Winkel θ (und einen weiteren in Dickenrichtung verlaufenden Schnitt) aus der Schicht einen Teilkörper heraus, so ist an diesem, solange noch kein Bruch eingetreten ist, zunächst das Gleichgewicht der Kräfte durch die im Werkstoff wirksamen Spannungen gewährleistet, Bild 2.13a. Dieses ist die Ausgangsbasis für die Herleitung der bekannten Transformationsbeziehungen für Spannungen. Im hier betrachteten Fall eines ebenen (σ_2, τ_{21}) -Spannungszustands lauten diese:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_2 \cos^2 \theta, \\ \tau_{nt} &= -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{n1} &= \tau_{21} \cos \theta.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} ergeben zusammen eine resultierende Schubspannung

$$\tau_{n\psi} = \sqrt{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2} = \cos \theta \sqrt{\sigma_2^2 \sin^2 \theta + \tau_{21}^2}.\tag{2.2}$$

Es soll nun der Winkel θ_{fp} ($fp \hat{=}$ fracture plane) die Lage einer Bruchebene bezeichnen, die sich bei einem bestimmten Verhältnis τ_{21}/σ_2 einstellt, Bild 2.13b.

Wenn sich die betrachtete Schicht nicht in einem Laminat befände, würden die Bruchstücke aufeinander in Richtung von $\tau_{n\psi}$ abgleiten, sobald der durch die Normalspannung σ_n verursachte Reibwiderstand überwunden werden kann, d.h. wenn gilt:

$$|\tau_{n\psi}| \geq |\mu \sigma_n|.\tag{2.3}$$

Mit den obigen Transformationsformeln und den Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen \sin , \cos und \tan wird hieraus

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{\sigma_2}\right)^2 + \left[\left(\frac{\tau_{21}}{\sigma_2}\right)^2 + 1\right] \tan^2 \theta_{fp}} \geq \mu.\tag{2.4}$$

Ist die gebrochene Schicht Bestandteil eines Laminats, so kann, wenn noch keine merklichen Delaminationen vorhanden sind, die über die horizontale Komponente der Reibkraft

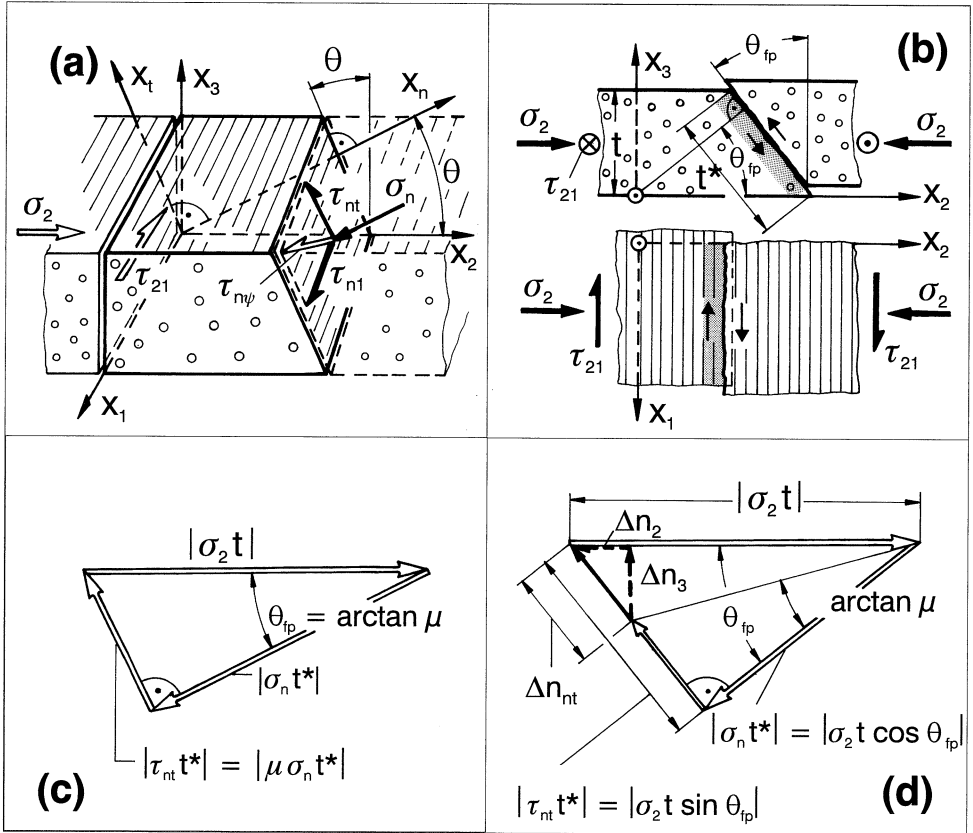


Bild 2.13: Zur Erklärung der Keilwirkung schräger Brüche des Modus C bei ebener $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung. (a) Spannungen auf einem schrägen Schnitt unter dem Winkel θ : Normalspannung σ_n , die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{nl} lassen sich zu $\tau_{n\psi}$ zusammenfassen. (b) Wenn $\tau_{n\psi} t^*$ die maximale Reibkraft $\mu \sigma_n t^*$ überschreitet, gleiten die Bruchstücke in der Richtung von $\tau_{n\psi}$ aufeinander ab. (c) Kräftegleichgewicht an einem Bruchstück bei $\tau_{21} = \tau_{n1} = 0$. Solange $\tau_{nt} t^*$ kleiner ist als die maximal mögliche Reibkraft, gleiten die Bruchstücke nicht aufeinander ab. (d) Kräfte an einem Bruchstück mit großem Bruchwinkel θ_{fp} bei $\tau_{21} = \tau_{n1} = 0$. Die maximale Reibkraft ist überschritten. Im Laminat wird die Überschusskraft Δn_2 über interlaminaren Schub τ_{32} in die Nachbarschichten eingeleitet. Δn_3 übt durch interlaminare Normalspannungen eine Sprengwirkung auf das Laminat aus.

hinausgehende Kraftwirkung der Schubspannung τ_{n1} wohl ohne weiteres durch interlamina- ren Schub τ_{31} in der Umgebung des Risses in die Nachbarschichten umgeleitet werden, so daß für die Untersuchung der "Sprengwirkung" die Spannungskomponente τ_{n1} und damit τ_{21} außer Betracht bleiben kann.

Wenn man nur die Spannungen betrachtet, die eine Kraftwirkung in Dickenrichtung haben, Bild 2.13c und d, erhält man als Abgleitbedingung aus Gl. (2.4) mit $\tau_{21} = 0$

$$\theta_{fp} \geq \arctan \mu, \quad (2.5)$$

die der Bedingung für das Abgleiten einer Masse auf einer schiefen Ebene ähnelt.

Es wird später gezeigt, daß der Bruchwinkel θ_{fp} bei $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung sehr einfach berechnet werden kann, Gl (5.7) auf S. 65. Nimmt man $\mu = 0,4$ an, würde nach Gl. (2.5) bei Bruchwinkeln $\theta_{fp} \geq 22^\circ$ von einer gebrochenen Schicht in einem Laminat eine Kraftwirkung in Richtung der Dicke ausgehen, welche die Tendenz hat, das Laminat zu "sprengen".

Für die Herstellung des Kraftgleichgewichts auf der Bruchebene allein durch die Reibkraft fehlt der schräg gerichtete Kraftfluß (Kraft je Breiteneinheit), Bild 2.13d,

$$\Delta n_{nt} = (\tau_{nt} - \mu \sigma_n) t^*. \quad (2.6)$$

Dessen in Dickenrichtung wirkende Komponente Δn_3 ist die Ursache der "Sprengwirkung", während die Komponente Δn_2 in der Umgebung des Risses interlaminare Schubspannungen τ_{32} bewirkt. Es entsteht also für die Nachbarschichten erhöhte Delaminationsgefahr und – besonders wenn diese unter hoher faserparalleler Druckspannung stehen – die Gefahr des Beulens einzelner Lagen, dessen unterschiedliche Formen von *Prinz* und *Gädke* in [34] beschrieben worden sind.

Besonders gefährlich sind die schrägen Brüche, wenn die gebrochene Schicht relativ dick ist und – was theoretisch durchaus wahrscheinlich ist – zwei schräge Brüche nahe beieinander auftreten und der Bruchwinkel einmal einen positiven und einmal einen negativen Wert hat, **Bild 2.14**.

Aus Versuchen, die am *Institut für Kunststoffverarbeitung (IKV)* in Aachen durchgeführt wurden [15], geht hervor, daß bei besonders ungünstigen Verhältnissen der schräge Zwischenfaserbruch infolge σ_2 -Druckspannung in Sekundenbruchteilen einen schlagartigen Totalbruch eines Laminats auslösen kann, **Bild 2.15**.

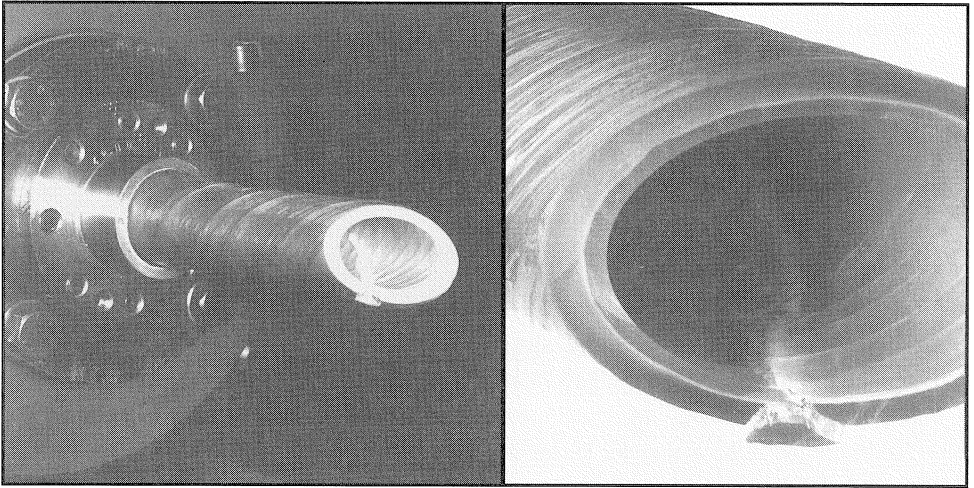


Bild 2.14: An einer schräg aufgeschnittenen GFK-Drehrohrfeder zeigen sich zwei benachbarte Brüche des Modus C mit entgegengesetztem Vorzeichen des Bruchwinkels θ_{fp} [25].

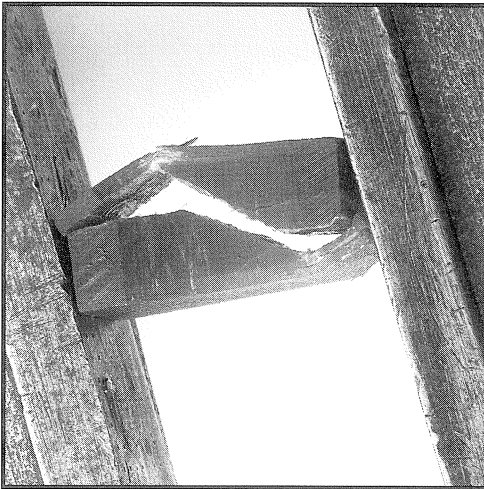


Bild 2.15: Katastrophaler Bruch eines $[\pm 30^\circ/90^\circ/\pm 30^\circ]$ -Laminats infolge eines Zfb vom Modus C in der dicken 90° -Schicht bei einachsigen Druck in 0° -Richtung [15]

3 Anmerkungen zur Spannungsanalyse

3.1 Vorbemerkungen

Die Methoden der Spannungsanalyse werden relativ kurz behandelt, weil sie weitgehend bekannt sein dürften. Die Problembereiche der schichtenweisen Bruchanalyse liegen auch am allerwenigsten bei der Spannungsanalyse als vielmehr bei den Bruchkriterien und Degradationsmodellen sowie deren sinnvoller Anwendung. Um die damit zusammenhängenden Fragen gründlicher bearbeiten zu können, wird hier auf eine eingehende Darstellung der Spannungsanalyse verzichtet, zumal sowohl auf eine VDI-Richtlinie als auch auf einschlägige Monographien verwiesen werden kann [31, 35 bis 38].

Die Netztheorie gilt heute aus wissenschaftlicher Sicht als obsolet. Für die Konstruktionspraxis bleibt sie aber ein unverzichtbares Hilfsmittel, insbesondere für den Laminat- und Bauteil-Entwurf. Dieser Aspekt wird deshalb im folgenden kurz angesprochen.

3.2 Hinweise zur Netztheorie

Etwas vereinfacht ausgedrückt unterscheidet sich die Netztheorie von der allgemein bekannten klassischen Laminattheorie dadurch, daß bei der Modellierung des Laminats als Schichtenverbund aus UD-Schichten alle Elastizitätsmoduln, Schubmoduln und Querkontraktionszahlen mit Ausnahme des faserparallelen Elastizitätsmoduls E_{\parallel} zu "null" gesetzt werden. Dementsprechend können für die einzelnen Schichten auch nur faserparallele Spannungen σ_{\parallel} (oder σ_1) errechnet werden. Statt mit Spannungen rechnet man zweckmäßigerweise mit Schichtkräften $n_{\parallel k} = \sigma_{\parallel k} t_k$. Eigentlich müßte man korrekterweise von Kräften je Breitereinheit sprechen; sie werden auch als Kraftflüsse, Normalkraftfluß, Schub(kraft)fluß, bezeichnet.

Zum Aufstellen der drei Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äußeren Kräften am Laminat und den Kräften in den einzelnen Faserschichten transformiert man die Schichtkräfte in die Richtungen x und y , auf die die äußeren Kräfte bezogen sind. Für ein Laminat mit 3 Faserrichtungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (Winkel positiv, wenn man aus der x -Richtung entgegen dem Uhrzeigersinn in die Faserrichtung gelangt) erhält man für die ebene Belastung durch

die drei Kraftflüsse n_x, n_y, n_{xy} das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} n_x &= n_{\parallel 1} \cos^2 \alpha_1 + n_{\parallel 2} \cos^2 \alpha_2 + n_{\parallel 3} \cos^2 \alpha_3, \\ n_y &= n_{\parallel 1} \sin^2 \alpha_1 + n_{\parallel 2} \sin^2 \alpha_2 + n_{\parallel 3} \sin^2 \alpha_3, \\ n_{xy} &= \frac{1}{2} n_{\parallel 1} \sin 2\alpha_1 + \frac{1}{2} n_{\parallel 2} \sin 2\alpha_2 + \frac{1}{2} n_{\parallel 3} \sin 2\alpha_3. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Hieraus wird sogleich ersichtlich, daß bei 3 Faserrichtungen grundsätzlich jeder beliebige ebene Belastungszustand n_x, n_y, n_{xy} allein durch Faserkräfte aufgenommen werden kann, denn aus den obigen 3 Gleichungen lassen sich bei gegebenen Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ stets die für das Gleichgewicht erforderlichen 3 Schichtkräfte $n_{\parallel 1}, n_{\parallel 2}, n_{\parallel 3}$ errechnen. Damit ist allerdings noch nichts darüber ausgesagt, ob bei der getroffenen Winkelwahl die Belastung auch mit dem kleinstmöglichen Materialaufwand aufgenommen wird. Dies hängt von der geschickten Wahl der Faserrichtungen ab, für welche die Netztheorie bestimmte Regeln liefert [31,39].

Wird das Laminat mit nur 2 Faserrichtungen α_1 und α_2 ausgeführt, entfällt in den Gleichgewichtsbedingungen Gln. (3.1) jeweils der letzte Term mit $n_{\parallel 3}$. Die 3 Gleichungen erfordern aber, wie vorher auch, 3 "Unbekannte". Wenn die belastenden Kraftflüsse gegeben sind, können dies nur die beiden Schichtkräfte $n_{\parallel 1}$ und $n_{\parallel 2}$ sowie zusätzlich ein Faserrichtungswinkel α_1 oder α_2 sein. Durch die Wahl eines Winkels ist damit – passend zur vorliegenden Belastung – auch der andere Winkel festgelegt.

Ändert sich das Verhältnis, in dem die Kräfte n_x, n_y, n_{xy} zueinander stehen, müßte auch eine neue Winkelzuordnung erfolgen. Ein Laminat mit 2 Faserrichtungen kann nur einen ganz bestimmten Belastungszustand – nämlich denjenigen, für den die Winkelzuordnung getroffen wurde – allein durch Faserkräfte aufnehmen. Es sei an die im Abschnitt 2.5 betrachteten Beispiele für nicht beanspruchungsgerecht ausgelegte Lamine erinnert.

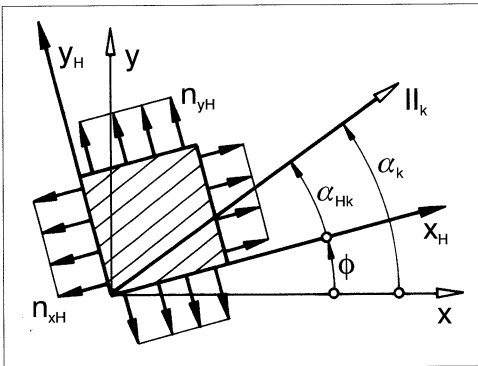


Bild 3.1: Koordinatensysteme und Winkel bei der Netztheorie

Für das Berechnen der Schichtkräfte erweist es sich als zweckmäßig, den Belastungszustand (n_x, n_y, n_{xy}) in die Richtungen der Haupt-Normalkräfte n_{xH} und n_{yH} zu transfor-

mieren (Haupt-Normalkraft-Richtung Φ analog zu Gl. (8.14) auf S. 133). Damit lauten dann die 3 Gleichgewichtsbedingungen für ein Laminat mit n Faserrichtungen, d.h. $k = 1$ bis n :

$$\begin{aligned} n_{xH} &= \sum_{k=1}^n n_{\parallel k} \cos^2 \alpha_{H_k}, \\ n_{yH} &= \sum_{k=1}^n n_{\parallel k} \sin^2 \alpha_{H_k}, \\ 0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n n_{\parallel k} \sin 2\alpha_{H_k}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei α_{H_k} der Faserrichtungswinkel der k -ten Schicht in bezug auf die Richtung der Haupt-Normalkraft n_{xH} ist, **Bild 3.1**.

Bei einem zweischichtigen Laminat ($k = 1, 2$) folgen hieraus für die Winkelzuordnung folgende Beziehungen [39]:

$$\frac{\sin 2\alpha_{H_2}}{\sin 2\alpha_{H_1}} = -\frac{n_{\parallel 1}}{n_{\parallel 2}}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\tan \alpha_{H_1} - \tan \alpha_{H_2}}{\cotan \alpha_{H_1} - \cotan \alpha_{H_2}} = \frac{n_{yH}}{n_{xH}}. \quad (3.4)$$

Die für die Winkelzuordnung bedeutsame Lösung der Gl. (3.4) lautet:

$$\tan \alpha_{H_2} = -\frac{n_{yH}}{n_{xH} \tan \alpha_{H_1}}. \quad (3.5)$$

Im Fall des ausgeglichenen Winkelverbunds mit $\alpha_{H_1} = +\omega$ und $\alpha_{H_2} = -\omega$ wird daraus

$$\tan \omega = \sqrt{\frac{n_{yH}}{n_{xH}}}. \quad (3.6)$$

Es folgen nun Beispiele dafür, daß man mit der Netztheorie mehr Informationen erhalten kann, als gemeinhin angenommen wird. Der mehr an den allgemeinen Zusammenhängen interessierte Leser möge auf S. 35 weiterlesen.

Entgegen einer weitverbreiteten Meinung ist ein torsionsbelastetes Rohr, das statt als $\pm 45^\circ$ -Rohr ($\alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = -45^\circ; \alpha_{H_1} = 0^\circ, \alpha_{H_2} = -90^\circ$) ebenfalls als ausgeglichener Winkelverbund bezüglich der Axialrichtung ($\alpha_1 = +\omega; \alpha_2 = -\omega$), aber mit $\omega \neq 45^\circ$ ausgeführt wird, nach der Netztheorie tragfähig.

Mit $n_{yH}/n_{xH} = -1$ wird aus Gl. (3.4):

$$\tan \alpha_{H_1} + \cotan \alpha_{H_1} = \tan \alpha_{H_2} + \cotan \alpha_{H_2}. \quad (3.7)$$

Die Bedingung (oder auch $\tan \alpha_{H_2} = \cotan \alpha_{H_1}$ nach Gl.(3.5)) ist nach **Bild 3.2** erfüllt für

$$\alpha_{H_2} = 90^\circ - \alpha_{H_1}. \quad (3.8)$$

Wählt man $\alpha_{H_1} = -30^\circ$, wird $\alpha_{H_2} = 120^\circ$, das bedeutet $\omega = 15^\circ$;

wählt man $\alpha_{H_1} = 30^\circ$, wird $\alpha_{H_2} = 60^\circ$, das bedeutet $\omega = 75^\circ$.

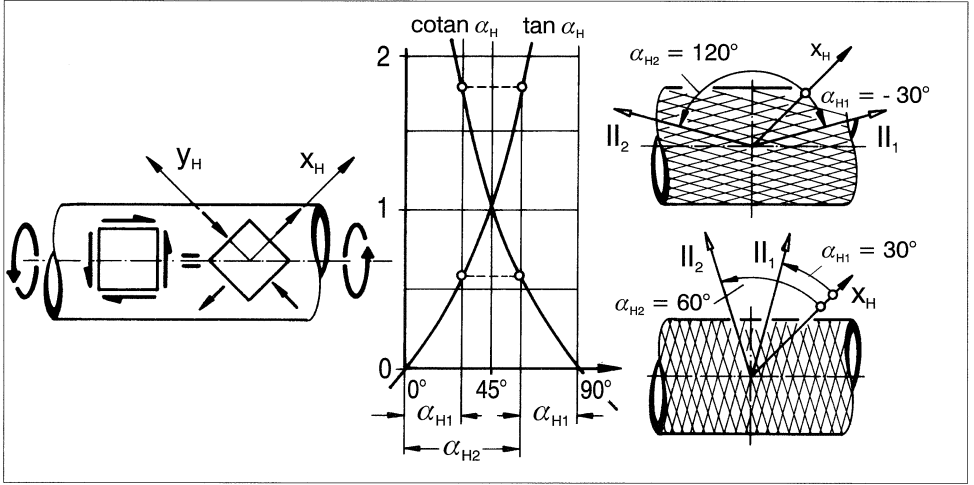


Bild 3.2: Faserorientierungen nach der Netztheorie für Torsionsrohre mit unterschiedlichen Biegesteifigkeiten

Der erforderliche Faseraufwand wäre bei beiden Ausführungen gleich hoch, jedoch doppelt so hoch wie der minimale Faseraufwand bei der "optimalen" $\pm 45^\circ$ -Ausführung. Häufig muß man aber bei der Wahl der Faserrichtungen auf zusätzliche Anforderungen Rücksicht nehmen und daher von der $\pm 45^\circ$ -Anordnung abweichen. Mit $\omega = 15^\circ$ ergibt sich eine höhere Längs-Biegesteifigkeit, die z.B. bei Kardanwellen wichtig ist, weil diese eine hohe kritische Drehzahl aufweisen müssen [40]. Bei $\omega = 75^\circ$ ist die Umfangssteifigkeit erhöht.

Die Netztheorie kann keine Angaben über die Verteilung interlaminarer Schubspannungen liefern, wohl aber über die auftretende Radialspannung σ_r , die für die UD-Schichten eine interlaminare Normalspannung σ_3 darstellt. Für die Innenseite der äußeren UD-Schicht ($k = n$) der Rohrwandung gilt nach [27] (dort Gl. (6.2))

$$\sigma_r = \sigma_3 = -\frac{n_{y_n}}{r_{i_n}} = -\frac{n_{||n} \sin^2 \alpha_n}{r_{i_n}}, \quad (3.9)$$

mit r_{i_n} = Innenradius der n-ten UD-Schicht.

Wenn man gleich dicke UD-Schichten voraussetzt, ist diese interlaminare Spannung bei $\omega = 15^\circ$ etwa 7,5 mal niedriger als bei $\omega = 45^\circ$ und bei $\omega = 75^\circ$ etwa doppelt so hoch wie bei $\omega = 45^\circ$. In allen Fällen, in denen dies fertigungstechnisch und von der Beanspruchung her möglich ist, wird man selbstverständlich versuchen, an der äußeren Schicht niedrige Radialspannungen oder im Idealfall radiale Druckspannungen zu erzielen, um so der Delaminationsgefahr entgegenzuwirken. Bei reiner Wechsellast empfiehlt sich zumindest, die äußere Schicht mit einem besonders kleinen Wickelwinkel α_n auszuführen, s. Gl. (3.9).

Diese Beispiele sollten genügen, um den Wert der Netztheorie für den Bauteil- und Laminat-Entwurf ins rechte Licht zu rücken. Im Kontext dieses Buches bleibt festzuhalten, daß die Netztheorie dazu dienen kann, hochbeanspruchte Lamine beanspruchungsgerecht zu entwerfen, bei denen sich mit fortschreitender Rißbildung durch Zfb des Modus A die Kräfte mehr und mehr in das Faser-”Netzwerk” umlagern. Nur bei solchen Laminaten ist dann auch eine wirklichkeitsnahe rechnerische Simulation des sukzessiven Bruchgeschehens durch die Anwendung von Bruchkriterien und Degradationsmodellen möglich.

3.3 Probleme bei der klassischen Laminattheorie

Zur Analyse der Spannungs- und Verzerrungszustände der einzelnen Schichten der Lamine wird in erster Linie die klassische Laminat-Theorie (Classical Laminate Theorie, CLT) benutzt, mit der ebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustände bei Scheiben-, Schalen- und Plattenproblemen erfaßt werden können. Sie kann heutzutage als allgemein bekannt vorausgesetzt werden [31,35 bis 38]. Für ihre Anwendung bei einer wirklichkeitsnahen Bruchanalyse von Laminaten muß sie jedoch dahingehend modifiziert werden, daß die Nichtlinearität von Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhängen berücksichtigt wird, die sich insbesondere bei den (τ_{21}, γ_{21}) -Diagrammen zeigt, aber auch bei $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagrammen, wenn σ_2 eine Druckspannung ist. Bei GFK ist diese ausgeprägter als bei CFK. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Nichtlinearitäten zu berücksichtigen, aber nicht alle sind gleich geschickt. Im allgemeinen wird zunächst folgende grundsätzliche Annahme getroffen:

Bei der Überlagerung der drei Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ bleiben die nicht-linearen Spannungs,Verzerrungs-Beziehungen dieselben wie bei alleiniger σ_1 -Beanspruchung bzw. σ_2 -Beanspruchung bzw. τ_{21} -Beanspruchung.

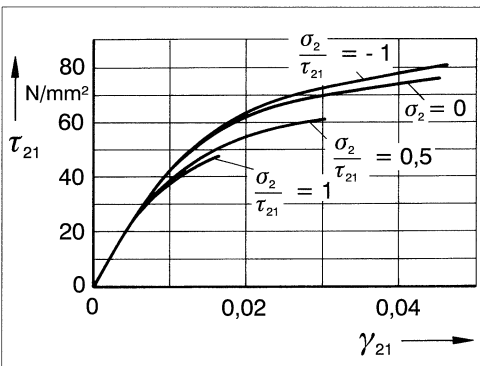


Bild 3.3: (τ_{21}, γ_{21}) -Schubspannungs, Schiebungs-Diagramme bei einer kombinierten Wirkung von τ_{21} und σ_2

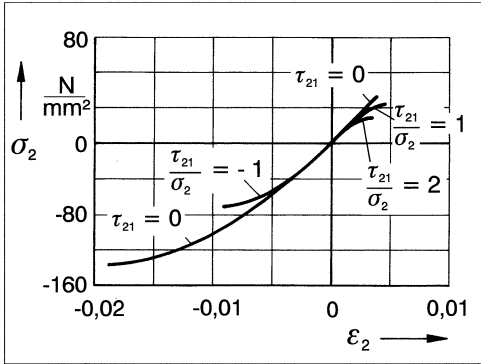


Bild 3.4: $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Spannungs, Dehnungs-Diagramme bei kombinierter Wirkung von σ_2 und τ_{21}

Ein (τ_{21}, γ_{21}) -Diagramm müßte folglich unverändert bleiben, wenn sich der τ_{21} -Spannung noch eine zu τ_{21} proportionale σ_2 -Spannung überlagert. Daß dies nicht zutrifft, wurde durch die Aufnahme von Spannungs,Verzerrungs-Diagrammen bei verschiedenen kombinierten (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchungen in [41] gezeigt, **Bilder 3.3 und 3.4**. Die zusätzliche Mikroschädigung durch die σ_2 -Beanspruchung verursacht einen flacheren Verlauf der (τ_{21}, γ_{21}) -Linie als bei reiner τ_{21} -Beanspruchung und umgekehrt. Am Fachgebiet *Faserverbundtechnik* des Autors an der Universität Gh Kassel entwickelte Rechenprogramme erlauben die Berücksichtigung solcher Interaktionen der Spannungen σ_2 und τ_{21} . Dazu müssen aber einige Spannungs-Verzerrungs-Diagramme für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung vorliegen. Grundsätzlich gilt, daß man bei Vernachlässigung dieser "Verzerrungs-Interaktion" bei kombinierter $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung meist zu niedrige Rißbildungsgrenzen errechnet.

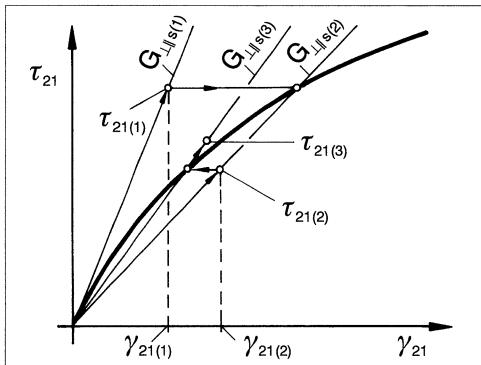


Bild 3.5: Quasi-linear-elastisches Berechnen von Spannungen τ_{21} und Schubverformungen γ_{21} durch Iteration mit Hilfe eines veränderlichen Sekantenmoduls $G_{\perp||s}$

Zum Berechnen von Spannungen σ_2 bzw. τ_{21} aufgrund experimentell ermittelter $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ - bzw. (τ_{21}, γ_{21}) -Diagramme kann man entweder Tangentenmoduln, beispielsweise $E_{\perp t} = d\sigma_2/d\varepsilon_2$, oder Sekantenmoduln, z.B. $E_{\perp s} = \sigma_2/\varepsilon_2$, benutzen. Die Spannungs-

Verzerrungs-Zusammenhänge werden zweckmäßigerweise mit Spline-Funktionen 3. Grades angenähert, entweder im Ganzen oder abschnittsweise, und es wird iterativ gerechnet. Somit stehen sowohl die Werte des Sekantenmoduls als auch des Tangentenmoduls zur Verfügung. Beim Iterieren benötigt man bei Benutzung des Sekantenmoduls ein paar mehr Rechenschritte als beim Rechnen mit Tangentenmoduln, weil die Anpassung immer nur im Spannungswert, aber nicht mit der richtigen Steigung des Diagramms erfolgt, **Bild 3.5**. Dafür ist das Rechnen mit den Sekantenmoduln jedoch insofern vorteilhaft, als es "selbst-korrigierend" ist. Hat man bei einer Belastungssteigerung für eine Laststufe eine Spannung fehlerhaft berechnet, wirkt sich dies nicht auf den bei einer höheren Laststufe berechneten Spannungszustand aus, denn man benutzt keine früher berechneten Spannungswerte, sondern rechnet immer wieder auf einem "frischen Strahl" vom Nullpunkt aus. Die Vorzüge des Sekantenmoduls zeigen sich auch bei der Degradation nach dem Rißbildungsbeginn; für ihn läßt sich eine monotone Abklingfunktion finden.

Bei τ_{21} -Beanspruchung ist es belanglos, ob man den Sekantenmodul $G_{\perp\parallel S}$ von τ_{21} oder von γ_{21} abhängig abgreift. Hingegen kann bei nicht-linearen $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Zusammenhängen der Sekantenmodul $E_{\perp S}$ bei gleichzeitiger Wirkung von σ_1 und σ_2 nicht von der errechneten Dehnung ε_2 abhängig gemacht werden, die wegen der Querkontraktion nicht nur von σ_2 , sondern auch von σ_1 abhängt, **Bild 3.6**.

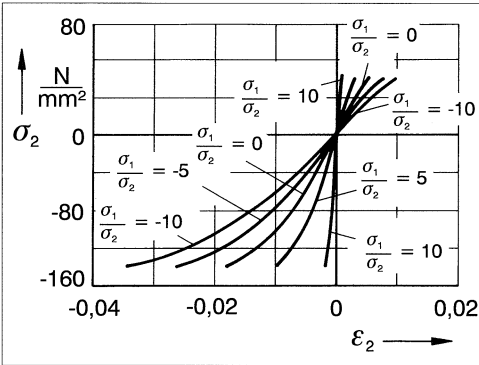


Bild 3.6: $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Spannungs, Dehnungs-Diagramme bei gleichzeitiger Wirkung von σ_2 und σ_1

Bei der Spannungs- und Verzerrungsanalyse mit der Laminattheorie tritt das Elastizitätsgesetz einer UD-Schicht in der folgenden Form auf:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp}} & \frac{\nu_{\parallel\perp}E_{\parallel}}{1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ \frac{\nu_{\perp\parallel}E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp}} & \frac{E_{\perp}}{1-\nu_{\perp\parallel}\nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \nu_{\parallel\perp} = \nu_{\perp\parallel} \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}}. \quad (3.10)$$

Für die nicht-lineare Rechnung benutzt man weiterhin dieses Elastizitätsgesetz, d.h. man rechnet "quasi-linear-elastisch", indem man in die obigen Beziehungen spannungsabhängige Elastizitätsgrößen einführt.

Während der (τ_{21}, γ_{21}) -Zusammenhang vom übrigen Stoffgesetz entkoppelt ist, hängen σ_1 und σ_2 von beiden Dehnungen, ε_1 und ε_2 , ab. Man macht deshalb den Sekantenmodul $E_{\perp S}$ vom erreichten σ_2 -Wert abhängig, und zwar folgendermaßen [2]:

Wenn bei zweiachsiger (σ_1, σ_2) -Beanspruchung ein σ_2 -Wert errechnet worden ist, wird dem vorliegenden Spannungszustand ein Wert des Sekantenmoduls $E_{\perp S}$ zugeordnet, der sich beim gleichen σ_2 -Wert aus dem $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm für einachsige σ_{\perp} -Beanspruchung ergibt. Der so ermittelte $E_{\perp S}$ -Wert tritt im Elastizitätsgesetz (3.10) überall an die Stelle von E_{\perp} .

Diese Verfahrensweise erscheint deshalb berechtigt, weil die Krümmung des $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramms bei der Erstbelastung im wesentlichen auf Mikrorißbildung zurückgeführt werden kann [41]. Deren Ausmaß dürfte von der erreichten Spannungshöhe abhängen, aber nicht von der erreichten Dehnung. Hohe, schädigend wirkende σ_2 -Zugspannungen können auch bei $\varepsilon_2 = 0$ und sogar bei $\varepsilon_2 < 0$ auftreten. Dies ist übrigens auch der Grund dafür, daß es nicht möglich ist, für den Zwischenfaserbruch einfache Dehnungs-Bruchkriterien anzuwenden [42], vgl. Abschnitt 4.3.

Konsequenterweise sollte wegen der mit der Höhe der σ_2 -Spannung einhergehenden Mikroschädigung auch die Querkontraktionszahl $\nu_{\perp\parallel}$ im Verhältnis $E_{\perp S}/E_{\perp}$ abgesenkt werden. (Dies ergibt sich aus Überlegungen, die im Abschnitt 6.2.1 näher ausgeführt werden.)

Wenn bei CFK das progressiv ansteigende $(\sigma_1, \varepsilon_1)$ -Diagramm berücksichtigt werden soll, verfährt man vollkommen analog.

Auch beim Erfassen des Einflusses von Eigenspannungen auf das Bruchgeschehen sollte die Nichtlinearität der Spannungs,Verzerrungs-Beziehungen berücksichtigt werden. Eigenspannungen können korrekterweise nicht – wie in den meisten kommerziellen Rechenprogrammen – vorab berechnet werden und dann als fester Sockelbetrag den Spannungen aus der Belastung zugeschlagen werden. Die Eigenspannungen verringern sich mit steigender Belastung, was man sich mit Hilfe des im folgenden beschriebenen Gedankenexperiments vergegenwärtigen kann. Eine relativ dünne, ausgehärtete UD-Schicht erhält durch eine mechanische Vorrichtung, z.B. einen Schubrahmen, eine Verformung $\gamma_{21}^{(r)}$ ($r \hat{=}$ residual) aufgezungen. Diese wird aufrechterhalten, während die Schicht beidseitig mit weiteren, ebenfalls ausgehärteten UD-Schichten mit unterschiedlicher Faserrichtung beklebt wird, so daß ein Laminat entsteht. Diese nachträglich angebrachten Schichten seien sehr viel steifer als die vorverformte. Dann bleibt nach Entfernung der mechanischen Verspanneinrichtung die Verformung $\gamma_{21}^{(r)}$ und damit die Spannung $\tau_{210}^{(r)}$ nahezu unverändert erhalten.

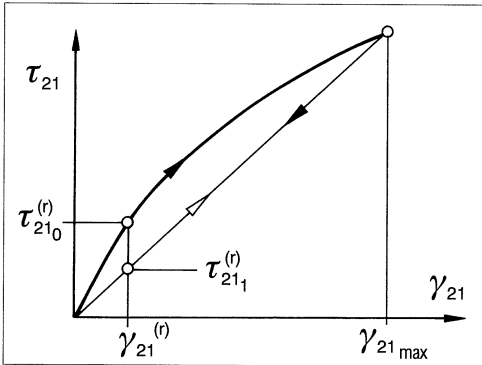


Bild 3.7: Verminderung einer Eigenspannung $\tau_{21}^{(r)}$ infolge von Mikroschädigung bei einem Belastungszyklus

Nun wird das ganze Laminat belastet und zwar so, daß in der betrachteten Schicht eine weitere Schubverformung auftritt, die in den nicht-linearen Bereich des (τ_{21}, γ_{21}) -Diagramms führt, **Bild 3.7**. Bei Erreichen der Schubverformung γ_{21max} wird die Belastung wieder erniedrigt, bis das Laminat vollständig entlastet ist. Wir nehmen an, daß nur in der betrachteten Schicht Mikroschäden aufgetreten sind, die übrigen Schichten sich aber ideal elastisch verhalten. Dann wird bei vollständig entlastetem Laminat in der betrachteten Schicht wieder die anfängliche Verformung $\gamma_{21}^{(r)}$ erreicht, jetzt aber bei einer Schubspannung $\tau_{211}^{(r)}$, die erheblich niedriger ist als die vor der Belastung vorhandene Spannung $\tau_{210}^{(r)}$. Die während des Belastungsvorgang aufgetretenen Mikroschädigungen haben also einen Teil der ursprünglichen Eigenspannung $\tau_{210}^{(r)}$ "abgebaut". Die Eigenspannung war auch schon bei der Höchstlast auf den niedrigen Wert $\tau_{211}^{(r)}$ abgefallen. Dies folgt daraus, daß bei der erneuten – jetzt ideal elastischen – Belastung bis γ_{21max} der Betrag der Eigenspannung $\tau_{211}^{(r)}$ unveränderlich ist; sie war also auch schon am Ende der Erstbelastung in der gleichen Größe vorhanden.

Als Konsequenz folgt aus dem Gedankenexperiment, daß Eigenspannungen bei nicht-linearer Rechnung korrekterweise bei jeder Iteration mit den jeweils benutzten Sekantenmoduln neu berechnet werden müßten.

Generell ist festzuhalten, daß alle Fehler, die bei Benutzung der heute gängigen Rechenprogramme gemacht werden, nämlich durch Vernachlässigung der Nichtlinearität der Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge, der "Verzerrungs-Interaktion" und des "mechanischen" Abbaus der Eigenspannungen, sich meistens in der gleichen Richtung auswirken. Alle führen normalerweise dazu, daß zu niedrige Zi-Rißbildungsgrenzen errechnet werden. Deshalb ist es durchaus denkbar, daß einige Abweichung zwischen Rechnung und Experiment, die von manchen Autoren dem "dünne Schicht" - und "in situ"-Effekt (Abschnitt 11.2) zugeschrieben wird, in Wirklichkeit – zumindest teilweise – von einer Summation von Fehlern bei der Spannungsanalyse herrührt.

3.4 Anmerkungen zu interlaminaren Spannungen

Außer in eng begrenzten Krafteinleitungsbereichen und an freien Laminaträndern, d.h. Rändern, an denen keine äußeren Kräfte angreifen (z.B. seitlichen Rändern von Flachprobekörpern) sowie bei Schlagbeanspruchungen, treten meist keine für das Bruchgeschehen bedeutenden interlaminaren Spannungen auf. Beim Arbeiten mit der klassischen Laminattheorie werden die interlaminaren Spannungen normalerweise überhaupt nicht erfaßt. So erklärt es sich, daß Konstrukteure und "Berechner" meist keine Erfahrungen mit interlaminaren Spannungen sammeln können. Weil sich diese Spannungen auch weitgehend einer gefühlsmäßigen Beurteilung entziehen, entwickeln sich häufig recht falsche Vorstellungen über sie. Bereits der Name verführt zu der Fehlinterpretation, daß es sich um Spannungen handelt, die nur zwischen den Schichten auftreten. Aus Gleichgewichtsgründen müssen sie aber auch in den Schichten selbst wirken, nur erreichen sie an den Schichtgrenzen oft ihre Extremwerte, s. Bild 3.9 auf S. 42. Auch die Aussage, daß eine gedachte, meist auch real vorhandene dünne "Zwischenschicht" aus Matrixmaterial unterschiedliche interlaminare Schubspannungen in den Grenzflächen zweier benachbarter Schichten "ausgleicht" [43], verstößt gegen die Gleichgewichtsbedingungen, denn ein Volumenelement mit infinitesimal kleiner Dicke dz nach **Bild 3.8a**, das Teile von zwei Schichten und eine Zwischenschicht enthält, kann auf seiner Ober- und Unterseite und damit auch in den beiden Grenzflächen nur gleich große Spannungen $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ aufweisen.¹

Dort, wo der intralaminare Spannungszustand einer Schicht homogen ist, d.h. sich über größere Bereiche nicht ändert, können aus Gleichgewichtsgründen keine interlaminaren Schubspannungen entstehen. Dies geht aus **Bild 3.8b** hervor. Der Übersichtlichkeit halber sind nur diejenigen Spannungen eingezeichnet worden, die eine Kraftwirkung in x -Richtung ausüben. Aus dem Gleichgewicht der Kräfte in x -Richtung folgt:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx(dydz) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy(dxdz) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz(dxdy) = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right). \quad (3.12)$$

Die Spannungen $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ auf Vorder- und Rückseite bzw. Ober- und Unterseite des Elements stehen unter sich im Gleichgewicht. Für die Entstehung einer interlaminaren Schubspannung τ_{zx} ist erforderlich, daß Spannungsgradienten $(\partial \sigma_x / \partial x), (\partial \tau_{yx} / \partial y)$ auftreten. Eine "landläufige" Meinung, daß hohe interlaminare Spannungen zwischen Schichten wirken, in denen sehr unterschiedliche Spannungen herrschen, trifft nicht zu!

¹ Auch gelegentlich bei Flachprobekörpern an den freien Rändern zwischen den Schichten eingefügte schubweiche Elastomer-Streifen können keine unterschiedlichen interlaminaren Spannungen "ausgleichen", sondern nur interlaminare Spannungen mildern, indem sie im Bereich des freien Randes gewisse Relativverschiebungen der Einzelschichten ermöglichen, die normalerweise durch eine starre Verklebung verhindert sind.

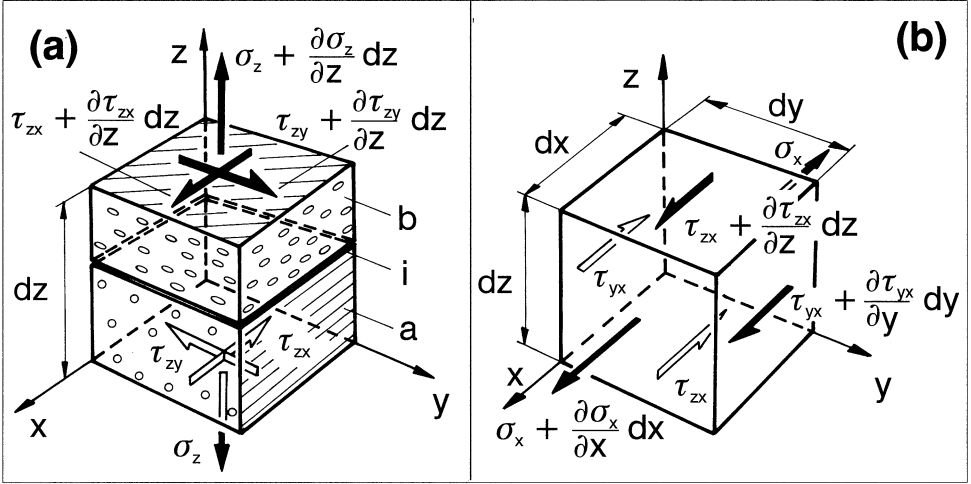


Bild 3.8: Spannungen und Spannungsänderungen an einem infinitesimalen Volumenelement. (a) Da die Gradienten der interlaminaren Spannungen in Dickenrichtung z endlich sind, können die interlaminaren Spannungen $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ nicht durch eine dünne Matrix-Zwischenschicht i zwischen zwei UD-Schichten a und b "ausgeglichen" werden. (b) Spannungen und Spannungszuwächse mit Kraftwirkung in x -Richtung

Aus der Gl. (3.12) und der folgenden analogen Gleichung

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right), \quad (3.13)$$

erhält man nur die Größe der Gradienten in z -Richtung der interlaminaren Spannungen τ_{zx} und τ_{zy} in einem Punkt (x, y, z) des Laminats. Ihre Größe an der Stelle z_1 folgt dann aus:

$$\tau_{zx}(z_1) = - \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dz, \quad (3.14)$$

$$\tau_{zy}(z_1) = - \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz. \quad (3.15)$$

Bei der Integration geht man zweckmäßigerweise von einer schubspannungsfreien Oberfläche (Stelle z_0) aus, z.B. bei einem Rohr von der Innenseite oder Außenseite. *Jakobi* hat eine exakte elastizitätstheoretische Berechnung interlaminarer Schubspannungen an einem gewickelten $[\pm 45^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ]$ -Rohr unter Querkraftbiegung [44] einer näherungsweisen Berechnung [45] gegenübergestellt. Das Ergebnis ist in **Bild 3.9** dargestellt.

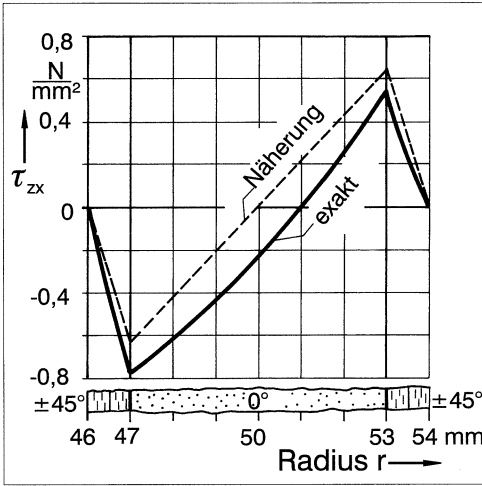


Bild 3.9: Interlaminare Schubspannungen τ_{zx} über dem Radius eines kreiszylindrischen Rohres mit $[\pm 45^\circ/0^\circ/\pm 45^\circ]$ -Wandaufbau bei Beanspruchung als Kragträger mit Einzellast am freien Ende. Die durchgezogenen Linien zeigen die exakte Lösung nach [44], die gestrichelten Linien die Näherung nach [45].

Bei der exakten Lösung sind die intralaminaren Schichtspannungen von der z -Koordinate abhängig, bei der Näherung nicht. Deshalb ist die Steigung der über dem Radius aufgetragenen interlaminaren Schubspannung τ_{zx} bei der Näherung abschnittsweise konstant, nicht jedoch bei der exakten Lösung. Wichtig ist hier, daß die maximalen interlaminaren Schubspannungen an den Schichtgrenzen, absolut gesehen, sehr klein sind, unter 1 N/mm^2 , während in der 0° -Schicht die intralaminare Schichtspannung $\sigma_x = \sigma_1 \approx 300 \text{ N/mm}^2$ beträgt. Sie wächst auf einer Länge von 500 mm (von der Krafteinleitung am freien Ende bis zur Einspannstelle) auf diese Werte an; d.h. der Spannungsgradient $(\partial\sigma_x/\partial x)$ ist sehr klein. Der Gradient $(\partial\tau_{zx}/\partial z)$ ist ebenso klein², und der Integrationsweg über die Schichtdicke beträgt nur maximal etwa 6 mm statt 500 mm bei der intralaminaren Spannung σ_x . Deshalb bleibt τ_{zx} so klein. Die Abmessungen des als Beispiel gewählten Rohres (Durchmesser 100 mm, Wanddicke 8 mm, Länge 500 mm) erlauben es, dieses als dünnwandig und schlank einzustufen. In [45] wurden auch dickwandigere und gedrungene Rohre mit verschiedenen Laminataufbauten untersucht; für alle konnte aber folgende generelle Aussage gemacht werden:

”Die Beanspruchungen durch interlaminare Schubspannungen sind bei allen Laminattypen sehr klein und ohne maßgeblichen Einfluß auf die errechnete Bruchgefahr.”

Eine gänzlich andere Situation existiert an den freien Rändern eines Laminats, die man sich sehr leicht an einem streifenförmigen Probekörper aus einem $(0^\circ, 90^\circ)$ - oder einem $\pm\omega$ -Laminat vergegenwärtigen kann, **Bild 3.10**.

²s. Gl. (3.12). Die Beträge von $\partial\sigma_x/\partial x$ und $\partial\tau_{yx}/\partial y$ heben sich sogar teilweise gegenseitig auf.

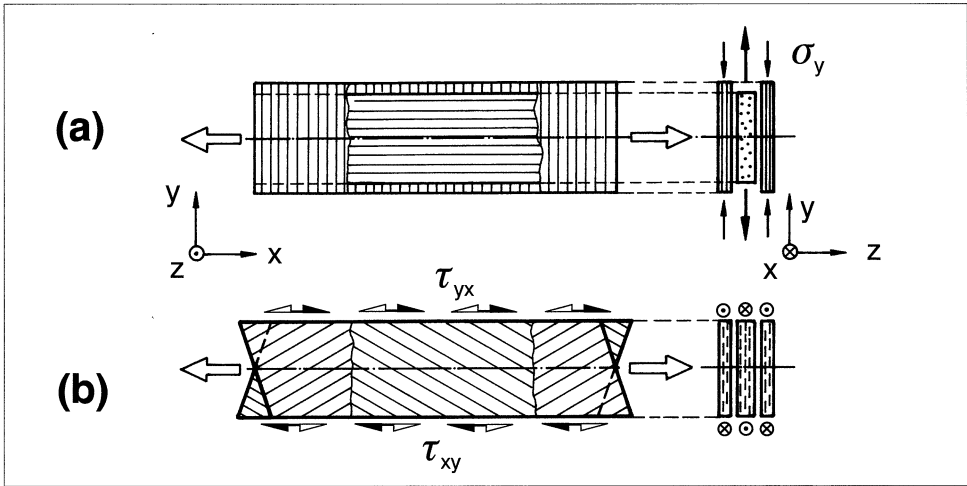


Bild 3.10: Verspannungen infolge unterschiedlichen Spannungs-, Verformungs-Verhaltens der UD-Schichten beim $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat (a) und $\pm\omega$ -Laminat (b) sind die Ursache für interlaminare Spannungen an den kraftfreien seitlichen Rändern. Gezeigt sind die unverträglichen Verformungen, die sich einstellen, wenn die Schichten nicht verbunden sind, und die zu ihrer Rückstellung erforderlichen Spannungen σ_y bzw. τ_{yx} .

Nach der Laminattheorie errechnen sich für das $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat Spannungen σ_y in der Breitenrichtung. Am kraftfreien Rand können diese aber nicht existieren; sie müssen erst durch interlaminare Schubspannungen τ_{zy} in die Schichten eingeleitet werden. Bei dem $\pm\omega$ -Laminat ergeben sich zwar keine Spannungen σ_y , statt dessen aber in den $+\omega$ -Schichten und $-\omega$ -Schichten entgegengesetzt gerichtete Schubspannungen τ_{yx} . Die Ursache für die Verspannung der Schichten liegt darin, daß sich beim $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat die unterschiedlich großen Querkontraktionen ($-\nu_{\perp\parallel}\varepsilon_x$ und $-\nu_{\parallel\perp}\varepsilon_x$) der 0° -Schicht bzw. 90° -Schicht nicht frei ausbilden können, während beim $\pm\omega$ -Laminat die mit der Dehnung in x -Richtung gekoppelte Schubverformung γ_{xy} , die für die $+\omega$ -Schicht und die $-\omega$ -Schicht unterschiedlich gerichtet ist, im Laminat unterdrückt wird, Bild 3.10. Durch interlaminare Schubspannungen τ_{zx} zwischen den Schichten belasten sich die Schichten gegenseitig mit einer Schubspannung τ_{yx} , welche die durch σ_x verursachte Schubverformung γ_{xy} kompensiert. Für die interlaminaren Schubspannungen des $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat gilt nach Gl. (3.15):

$$\tau_{zy} = - \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dz, \quad (3.16)$$

und für das $\pm\omega$ -Laminat nach Gl. (3.14):

$$\tau_{zx} = - \int_{z_0}^{z_1} \frac{d\tau_{yx}}{\partial y} dz. \quad (3.17)$$

Gleichzeitig entstehen zur Herstellung des Momenten-Gleichgewichts an den Einzelschichten interlaminare Zug- oder Druckspannungen σ_z , die als Zugspannungen ("Schälspannungen") eine Delamination vom Rand her sehr begünstigen.

Es sind in den letzten 25 Jahren sehr viele Arbeiten zur Berechnung der Verteilung der intra- und interlaminaren Spannungen am freien Rand erschienen. Exemplarisch werden hier nur fünf Arbeiten genannt [46 bis 50], die sich nicht nur mit der Spannungsberechnung befassen, sondern auch mit der in diesem Buch besonders interessierenden Frage der Delaminationsgefahr. Hervorzuheben ist, daß weitgehende Übereinstimmung darüber herrscht, daß die interlaminaren Spannungen in einer Entfernung vom freien Rand, die etwa gleich der Laminatdicke ist, abgeklungen sind. Das heißt auch, daß in diesem relativ kleinen Abstand vom freien Rand die aus der Laminattheorie folgenden intralaminaren Spannungen σ_y bzw. τ_{yx} voll aufgebaut sind. In dem schmalen Randbereich gibt es also sehr hohe Gradienten $(\partial\sigma_y/\partial y)$ und $(\partial\tau_{yx}/\partial y)$.

Ähnlich hohe Gradienten von intralaminaren Spannungen treten in ungestörten Laminatbereichen nur auf, wenn Zwischenfaserbrüche entstanden sind, s. auch Bild 2.6 auf S. 20. Hierauf wird in Abschnitt 7.2 eingegangen.

3.5 Hinweise auf analytische Lösungen

Meistens wird heute auch die Spannungsanalyse von Bauteilen mit einfacher Geometrie wie z.B. von dickwandigen kreiszylindrischen Rohren mit Hilfe der FEM ausgeführt, obwohl seit einigen Jahren analytische Lösungen verfügbar sind. Diese sind für Parameterstudien und Optimierungsprozeduren viel besser geeignet als die FEM. *Jacobi* [44] hat 1987 Lösungen für intra- und interlaminare Spannungen in dickwandigen Rohren für die folgenden Beanspruchungen erarbeitet: Innen- und Außendruck, Axialkraft, Torsion, querkraftfreie Biegung und Biegung mit konstanter Querkraft. Auch die hygrothermischen Beanspruchungen können unter bestimmten Voraussetzungen analytisch erfaßt werden. Mit dieser Methode läßt sich z.B. die Zfb-Anstrengung bei dickwandigen Rohren über der Wanddicke durch Wickelwinkelvariation konstant halten [19,20,27,44].

Für die Spannungsverteilung in einer sogenannten überlappenden Welle/Nabe-Verbindung dickwandiger Torsionsrohre hat *Schreiber* [27] ebenfalls 1987 analytische Lösungen erarbeitet, aus denen sich wichtige Hinweise für die Gestaltung und Dimensionierung leistungsfähiger und kostengünstiger Krafteinleitungen ergeben. Sie vermitteln erheblich mehr Einsichten in die Zusammenhänge als numerische Methoden.

4 Allgemeine Betrachtungen über Bruchkriterien

4.1 Begriffe und Definitionen

Der in diesem Kapitel zu erörternde Fragenkomplex ist schon von der Sache her schwierig genug, aber leider wird die Auseinandersetzung mit der Materie noch zusätzlich dadurch erschwert, daß die benötigten Begriffe in der Literatur teilweise mit unterschiedlicher Bedeutung benutzt werden, oder daß der normale Wortsinn und die technisch-wissenschaftliche Definition eines Terminus technicus gelegentlich erheblich voneinander abweichen. Dies trifft bereits auf den zentralen Begriff "Bruchkriterium" zu. Die Bezeichnung Kriterium ist eigentlich nur für ein unterscheidendes Merkmal angebracht. Deshalb wird er in diesem Buch von nun an auch nur noch dann benutzt, wenn eine Formulierung der folgenden Art gemeint ist:

$$F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) \leq 1. \quad (4.1)$$

Dieses **Bruchkriterium** unterscheidet zusammengesetzte Spannungszustände (σ, τ) , die vom Werkstoff aufgrund seiner Festigkeiten (R_σ, R_τ) ohne Bruch ertragen werden können (in diesem Fall gilt das \leq -Zeichen), von solchen, die nicht erreichbar sind, weil vorher Bruch eintritt (es gilt das $>$ -Zeichen). Wenn Werte für die Spannungen, welche in die links vom Gleichheitszeichen stehende Funktion eingesetzt werden, dazu führen, daß der Zahlenwert der Funktion "1" wird (d.h., daß in der obigen Beziehung das Gleichheitszeichen gilt), handelt es sich um einen Spannungszustand, der einen Bruch bewirkt (oder auch – je nach Betrachtungsweise – gerade noch ohne Bruch ertragen werden kann). Das Gleichheitszeichen markiert also einen Grenzzustand, und zwar denjenigen, bei dem der Bruch eintreten kann.

Zur Unterscheidung von der Formulierung nach (4.1), die ein Bruchkriterium darstellt, wird von einer Bruchgrenzbedingung [51] oder in diesem Buch – der Kürze wegen – von einer **Bruchbedingung** gesprochen, wenn eine Formulierung der folgenden Art gemeint ist:

$$F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = 1. \quad (4.2)$$

Der links vom Gleichheitszeichen stehende mathematische Ausdruck ist eine Funktion, die alle zum Bruch führenden Spannungszustände beschreibt. Man könnte sie des-

halb als die "alle Bruchzustände charakterisierende Funktion" oder "Bruchzustandefunktion" bezeichnen. Der Kürze halber wird sie im folgenden die **Bruchfunktion** genannt. Sie enthält die Normalspannungen σ und die Schubspannungen τ , sofern diese Einfluß auf die Bruchentstehung haben. Beim allgemeinen Spannungszustand einer UD-Schicht können dies $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ sein. Als Werkstoffparameter erscheinen in den verschiedenen Bruchbedingungen meistens mehrere Zug- und Druckfestigkeiten R_σ sowie Schubfestigkeiten R_τ ; z.B. bei einer UD-Schicht die zu den Beanspruchungen nach Bild 1.2 gehörenden Festigkeiten $R_{\parallel}^{(+)}, R_{\parallel}^{(-)}, R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\perp}, R_{\perp\parallel}$.

Bei der Wahl der Bruchfunktion gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder wird sie lediglich unter dem Gesichtspunkt einfacher Handhabbarkeit und guter Anpaßbarkeit an Versuchsergebnisse gewählt, oder die Formulierung basiert – mehr oder weniger ausgeprägt – auf einer physikalischen Vorstellung von den Vorgängen, die den Bruch bewirken. Eine physikalisch plausible Annahme über die den Bruch verursachenden Zustände und Vorgänge nennt man eine **Bruchhypothese** und denkt dabei zunächst an ihre verbale Formulierung. Zur Unterscheidung davon sollte ihre spezielle mathematische Ausprägung als Bruchkriterium bzw. Bruchbedingung bezeichnet werden und nicht als Bruchhypothese, wie es in der älteren Literatur häufig anzutreffen ist.

Beim Dimensionieren von Bauteilen und beim anschließenden "Sicherheits"-Nachweis werden Bruchbedingungen dazu benutzt, rechnerisch festzustellen, wie weit die auftretenden Spannungszustände noch vom Bruchzustand entfernt sind. Dabei muß meistens vorausgesetzt werden, daß sowohl beim herrschenden Spannungszustand als auch bei dem zum Bruch führenden erhöhten Spannungszustand die einzelnen Spannungen untereinander im gleichen festen Verhältnis stehen. Der gemeinsame **positive** Faktor, mit dem unter dieser Voraussetzung alle herrschenden Spannungen erhöht werden müßten, damit die Bruchbedingung erfüllt wäre, d.h. damit die Spannungen zum Bruch führen würden, wird **Reservefaktor** f_{Res} genannt. Wenn sich $f_{Res} = 1$ errechnet, bedeutet dies, daß bereits der herrschende Spannungszustand gerade zum Bruch führt. Deshalb kann man jede Bruchbedingung alternativ zu (4.2) auch folgendermaßen schreiben:

$$f_{Res}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = 1. \quad (4.3)$$

Bisher ist noch vorausgesetzt worden, daß im Werkstoff keine Eigenspannungen vorhanden sind, d.h., daß, solange keine äußere Belastung wirkt, auch keine Spannungen existieren. Nur unter dieser Voraussetzung ist der Kehrwert des Reservefaktors der Ausnutzungsgrad oder die Material-Anstrengung oder kurz **Anstrengung** (Efficiency ratio oder Effort, \mathcal{E})¹

$$\mathcal{E}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = \frac{1}{f_{Res}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)}. \quad (4.4)$$

¹Die Anstrengung wird mit \mathcal{E} bezeichnet, um einer Verwechslung mit dem E-Modul E vorzubeugen.

Damit kann eine Bruchbedingung auch folgendermaßen formuliert werden:

$$\mathcal{E}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = 1. \quad (4.5)$$

Ein Blick auf (4.2), (4.3), (4.5) zeigt, daß für die gleiche Bruchbedingung verschiedene Bruchfunktionen benutzt werden können. So sind z.B. die Bruchfunktion $F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)$ in (4.2) und die Bruchfunktion $\mathcal{E}(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)$ in (4.5) nur in Ausnahmefällen identisch.

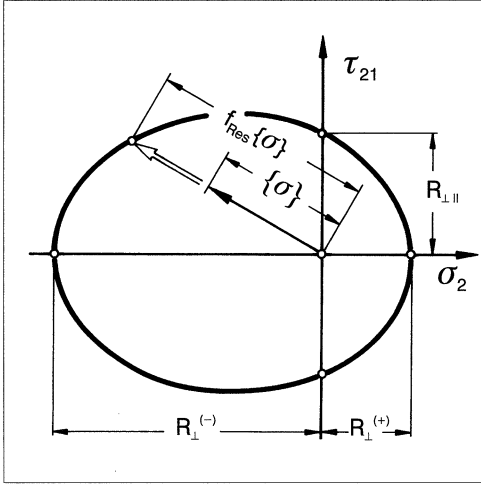


Bild 4.1: Darstellung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve als "verschobene" Ellipse nach Gl. (4.6) und Veranschaulichung des Reservefaktors f_{Res}

Meistens enthält die Bruchfunktion F Spannungen in unterschiedlicher Potenz, z.B. wurde für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung von vielen Autoren, u.a. von *Hoffmann* in [52], die Bruchbedingung folgendermaßen angesetzt, **Bild 4.1**:

$$F = \frac{\sigma_2^2}{R_{\perp}^{(+)} R_{\perp}^{(-)}} + \left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{1}{R_{\perp}^{(-)}} \right) \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp||}} \right)^2 = 1. \quad (4.6)$$

In dieser Formulierung sind die darin vorkommenden Spannungen – im vorliegenden Fall σ_2 und τ_{21} – diejenigen, die zum Bruch führen. Sie werden zur Kennzeichnung dieses Sachverhalts nicht durch einen Index oder anderweitig markiert!

Leider ist es üblich, auch Spannungen, die nicht zum Bruch führen, sondern erst mit dem Reservefaktor f_{Res} erhöht werden müssen, damit die Bruchbedingung erfüllt wird, genau so zu bezeichnen. Man schreibt also auch

$$\frac{(f_{Res} \sigma_2)^2}{R_{\perp}^{(+)} R_{\perp}^{(-)}} + \left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{1}{R_{\perp}^{(-)}} \right) f_{Res} \sigma_2 + \left(\frac{f_{Res} \tau_{21}}{R_{\perp||}} \right)^2 = 1 \quad (4.7)$$

und meint nun mit σ_2 und τ_{21} die herrschenden Spannungen, die normalerweise nicht gleichzeitig die zum Bruch führenden Spannungen sind, weil im allgemeinen Fall nicht zu erwarten ist, daß sich gerade $f_{Res} = 1$ ergibt.

Auch in diesem Buch wird – wie allgemein üblich – keine Indizierung zum Unterscheiden von Spannungen nach Gl. (4.6) und Gl. (4.7) vorgenommen.

Hier ist erhöhte Aufmerksamkeit geboten, wenn man nicht unterschiedliche Symbole für zum Bruch führende und herrschende Spannungen einführen will!

Mit den gegebenen herrschenden Spannungen σ_2, τ_{21} und Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp||}$ stellt Gl. (4.7) eine quadratische Gleichung für den Reservefaktor f_{Res} dar. Als Kehrwert von deren Lösung erhält man die Anstrengung \mathcal{E} .

Sehr häufig kommen in den Bruchfunktionen wie z.B. in Gl. (4.6) nur Spannungsterme 1. und 2. Ordnung vor. Bezeichnet man die Summe der Terme 1. Ordnung mit $\sum L$ und die Summe der Terme 2. Ordnung mit $\sum Q$, so schreibt sich die Bruchbedingung mit der ursprünglichen Bruchfunktion und den zum Bruch führenden Spannungen

$$F = \sum Q + \sum L = 1,$$

mit dem Reservefaktor und den noch nicht zum Bruch führenden Spannungen

$$f_{Res}^2 \sum Q + f_{Res} \sum L - 1 = 0$$

oder alternativ mit der Anstrengung \mathcal{E} (nach Division durch f_{Res}^2 und Vorzeichenumkehr)

$$\mathcal{E}^2 - \mathcal{E} \sum L - \sum Q = 0.$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichungen für f_{Res} bzw. \mathcal{E} sind:

$$f_{Res} = \frac{1}{2\sum Q} \left(-\sum L + \sqrt{(\sum L)^2 + 4\sum Q} \right), \quad (4.8)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{f_{Res}} = \frac{1}{2} \left(\sum L + \sqrt{(\sum L)^2 + 4\sum Q} \right). \quad (4.9)$$

Definitionsgemäß sind f_{Res} und \mathcal{E} stets positiv! Setzt man nun $f_{Res} = 1$ oder $\mathcal{E} = 1$, hat man damit eine neue Schreibweise der Bruchbedingungen gefunden. Nun sind die Spannungen in Gln. (4.8) und (4.9) die zum Bruch führenden!

Eine häufige Fehlerquelle ist die irrige Annahme, daß sich in jedem Falle durch Einsetzen der herrschenden Spannungen in die Bruchfunktion ein Zahlenwert errechnen würde, der die Anstrengung angibt. Das ist aber nur dann der Fall, wenn die Bruchfunktion bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1 ist.²

²Die Bruchfunktion ist bezüglich der Spannungen homogen vom Grad r , wenn man bei Vergrößerung aller Spannungen mit dem Faktor λ aus der Bruchfunktion den Faktor λ^r ausklammern kann.

Wenn man für eine einfache Beispielrechnung auf der Basis von Gl. (4.6) $\sigma_2 = \tau_{21} = 0,25R_{\perp}^{(+)}$ sowie $R_{\perp}^{(+)} = R_{\perp\parallel} = 0,5R_{\perp}^{(-)}$ wählt, ergibt sich mit Gl. (4.9) für die Anstrengung $\mathcal{E} = 0,375$. Setzt man jedoch fälschlicherweise die herrschenden Spannungen in die Bruchfunktion auf der linken Seite von Gl. (4.6) ein, so erhält man $F = \sum Q + \sum L = 0,22$.

Mißdeutet man den F-Wert als Anstrengung, wird die Anstrengung um 41% unterschätzt!

Der mit den Werten für die herrschenden Spannungen errechnete Zahlenwert der Bruchfunktion sagt, wenn diese bezüglich der Spannungen nicht homogen vom Grad 1 ist, nichts über die Höhe der Anstrengung, sondern nur darüber etwas aus, ob die herrschenden Spannungen ohne Bruch ertragen werden (Zahlenwert < 1) oder nicht ertragen werden können (Zahlenwert ≥ 1). Leider wird der Mißdeutung dieses Zahlenwertes als Anstrengung dadurch Vorschub geleistet, daß er gelegentlich bei der Benutzung von Rechenprogrammen als "Failure Index" (FI) ausgegeben wird [53], während andere Autoren, z.B. in [5], mit "Failure Index" die Anstrengung bezeichnen.

4.2 Visualisierung und mathematische Aspekte

Für das Verständnis der teilweise ziemlich abstrakten mathematischen Behandlung der Bruchgrenzen von Werkstoffen ist es hilfreich, gewisse Visualisierungsmöglichkeiten durch die Darstellung von Bruchbedingungen als Fläche oder Körper in Spannungsräumen zu nutzen. Ausgangspunkt der Betrachtung sind in jedem Fall Spannungszustände, die aus mehreren Spannungen zusammengesetzt sind. Es wird dann die Frage gestellt, welche Grenzen (Bruch-Grenzen) der Höhe der Spannungszustände gesetzt sind.

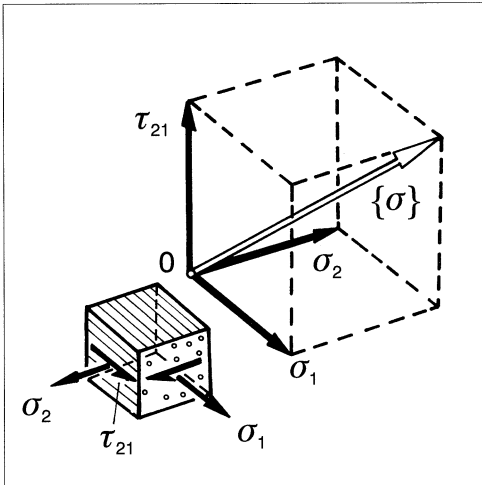


Bild 4.2: Darstellung eines $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustands als Spannungszustandsvektor $\{\sigma\}$

Es ist üblich, Spannungszustände als Vektoren oder Tensoren darzustellen. Bei der Bruchanalyse macht man häufig von der Vektordarstellung Gebrauch. Ein Vektor im sechsdimensionalen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum entzieht sich dem Vorstellungsvermögen, aber beim wichtigen ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand gelingt die Visualisierung im $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungsraum.

Der $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand wird durch einen **Spannungszustandsvektor** mit den rechtwinklig zueinander gerichteten Komponenten $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ dargestellt, so daß sich seine Länge aus $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \tau_{21}^2)^{\frac{1}{2}}$ ergibt, **Bild 4.2** auf S. 49. Dieser Vektor besitzt aber kein physikalisches Pendant in Gestalt einer "resultierenden Spannung".

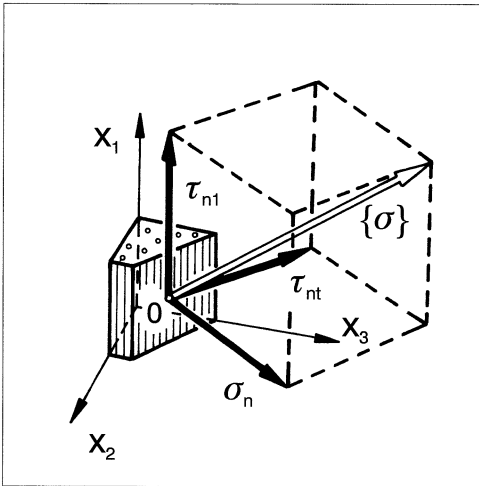


Bild 4.3: Darstellung der Zfb-relevanten Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ mit gemeinsamer Wirkebene als Spannungsvektor $\{\sigma\}$

Anders verhält es sich mit einem Vektor, der Spannungen repräsentiert, die auf ein und derselben Schnittebene wirken; man spricht von deren gemeinsamer **Wirkebene**.³ Das ist z.B. bei einer (σ_2, τ_{21}) -Kombination der Fall. Daß σ_2 und τ_{21} die gleiche Wirkebene besitzen, geht aus dem gemeinsamen Index 2 hervor. Noch eine weitere Spannung kann auf derselben Wirkebene auftreten, nämlich die Schubspannung τ_{23} . Die von solchen Spannungen mit gemeinsamer Wirkebene auf ein Flächenelement ausgeübten Kräfte lassen sich zu einer Resultante zusammenfassen. Obwohl der Ausdruck nicht ganz korrekt ist, spricht man deshalb auch von einer resultierenden Spannung. Diese korrespondiert sowohl nach ihrer Größe, z.B. $(\sigma_2^2 + \tau_{21}^2 + \tau_{23}^2)^{\frac{1}{2}}$, als auch nach ihrer Richtung vollkommen mit dem zu ihrer Darstellung benutzten Vektor. Für diesen gebraucht man nicht die Bezeichnung Spannungs-

³Der Begriff der Wirkebene hat in dieser Arbeit eine andere Bedeutung als in [11]. Dort bezeichnete er eine Ebene, in der die zu einem ebenen Spannungszustand gehörenden Kräfte wirken. Hier ist eine Schnittebene gemeint, auf der eine Normalspannung und/oder eine Schubspannung wirkt.

zustandsvektor sondern **Spannungsvektor**. Im Teil III des Buches ist häufig von den für den Zwischenfaserbruch entscheidenden Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ die Rede, die auf einer senkrecht zur x_n -Achse stehenden faserparallelen Schnittebene wirken. Sie erlauben eine Darstellung als Spannungsvektor im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum, **Bild 4.3**.

Durch die werkstoffspezifischen Bruchgrenzen ist die Höhe der realisierbaren Spannungszustände begrenzt. Die Spannungs(zustands)vektoren, die ihren Ursprung im Koordinaten-Nullpunkt des Spannungsraumes haben, können dementsprechend nur bis zur Bruch-Grenze anwachsen, die durch die Bruchbedingung (oder Bruchbedingungen, wenn es mehrere Bruch-Modi gibt), angegeben wird. In ihrer Gesamtheit bilden die Spitzen dieser "Bruch-Vektoren" eine – möglicherweise aus Teilflächen zusammengesetzte – Fläche im Spannungsraum, nämlich die Bruchgrenzfläche [51]. Der Kürze halber wird sie hier **Bruchfläche** genannt.

Dies hat allerdings den Nachteil, daß der Begriff – wenn er aus dem Sinnzusammenhang gelöst ist – auch als reale Werkstoff-Bruchfläche, die bei der Werkstoff-Trennung entsteht, mißverstanden werden kann. Um einer solchen Verwechslung vorzubeugen, wird in diesem Buch von der "**Bruchebene**" gesprochen, wenn die beim Bruch entstehende Bruchoberfläche gemeint ist, obwohl diese in Wirklichkeit natürlich Unebenheiten aufweist. Man denke deshalb vielleicht an eine durch die reale Bruchoberfläche gelegte "mittlere" Ebene.

Schnittkurven, die beim Schnitt der Bruchfläche durch bestimmte Ebenen entstehen, werden **Bruchkurven** genannt. Es war z.B. schon von der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve die Rede, also der Schnittkurve der $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchfläche mit der Ebene $\sigma_1 = 0$.

Solange von Eigenspannungen abgesehen wird, d.h. solange die Vektoren vom Koordinaten-Ursprung ausgehen, findet der Reservefaktor auf folgende Weise seine anschauliche Darstellung, s. auch Bild 4.1 auf S. 47:

$$f_{Res} = \frac{\text{Länge des Vektors der zum Bruch führenden Spannungen}}{\text{Länge des Vektors der vorhandenen Spannungen}}.$$

Gelegentlich richtet sich das Interesse weniger auf die Bruchgrenzen als vielmehr auf die ertragbaren Spannungszustände. Die Menge aller ertragbaren Spannungszustände wird durch den von der Bruchfläche umschlossenen Raum verkörpert. Man spricht deshalb auch vom **Bruchkörper**. Die Bruchfläche umhüllt alle Vektoren, die ertragbare Spannungszustände darstellen. Deshalb wird gelegentlich auch von der "Einhüllenden" gesprochen. Geläufig ist allerdings nur der Ausdruck "**Hüllkurve**" für eine (σ, τ) -Bruchkurve, wie sie z.B. zur Darstellung der Festigkeitshypothese von *O. Mohr* [54] dient.

Über die Gestalt der Bruchfläche kann a priori wenig ausgesagt werden. Vielfach wird aus Gründen der Eindeutigkeit der Lösung gefordert, daß sie konvex sein sollte. Nur in Ausnahmefällen wird sie sich als eine glatte, geschlossene Fläche darstellen, die sich durch eine einzige Funktion beschreiben läßt. Eine der wenigen Ausnahmen stellt die *von Mises*-Bedingung als Versagensbedingung für den "Fließbeginn" duktiler isotroper Werkstoffe dar.

Der entsprechende Versagenskörper ist ein Ellipsoid im $(\sigma_{1H}, \sigma_{2H}, \sigma_{3H})$ -Spannungsraum, wobei $\sigma_{1H}, \sigma_{2H}, \sigma_{3H}$ die Haupt-Normalspannungen sind. Unabhängig vom Spannungszustand führt immer der gleiche Vorgang zum Versagen, nämlich Fließen. Ganz anders als ein duktiler, isotroper und homogener Werkstoff verhält sich eine UD-Schicht aus Faser-Matrix-Verbundstoff. Wie bereits ausführlich erörtert, können die unterschiedlichsten Brucharten auftreten, wobei die gravierendsten Unterschiede zwischen Fb und Zfb existieren. Aber selbst beim Zfb lassen sich wieder drei bis vier Bruch-Modi unterscheiden. Deshalb ist die Bruchfläche des UD-Verbunds aus Teilflächen zusammengesetzt, die jeweils einem bestimmten Bruchmodus zugeordnet sind, s. Bild 5.7 auf S. 77.

Die Teilflächen werden mathematisch mit Hilfe von verschiedenen Bruchfunktionen beschrieben. Eine Funktion, die – von der Bruchart her gesehen – zusammengehörige Bruch-Spannungszustände beschreibt, muß stetig differenzierbar sein und darüber hinaus folgende Eigenschaft besitzen: Ist für einen Spannungszustand die Bruchbedingung erfüllt, d.h. der zugehörige Spannungszustandsvektor berührt mit seiner Spitze gerade die Bruchfläche, so muß die zur Formulierung der Bruchbedingung benutzte Bruchfunktion für einen Spannungszustand, dessen Komponenten alle im gleichen Maß verkleinert worden sind, einen Zahlenwert < 1 liefern und entsprechend für gleichmäßig vergrößerte Komponenten einen Wert > 1 . Wie bereits bei der Diskussion der Gln. (4.2), (4.3), (4.5) erwähnt, kann ein und dieselbe Bruchfläche durch unterschiedliche Funktionen beschrieben werden, denn nicht auf die **Funktion** $F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau)$ als solche kommt es an, sondern nur auf die **Fläche** $F(\sigma, \tau, R_\sigma, R_\tau) = 1$. Zum direkten Ausrechnen des Reservefaktors f_{Res} oder der Anstrengung muß die Funktion jedoch bezüglich der Spannungen homogen vom Grad -1 bzw. 1 sein. (Logischerweise steigt bei der vorgenommenen Definition die Anstrengung eines Werkstoffs linear mit der Spannungshöhe an.) Die Gl. (4.6) ist nicht homogen. Erst die Lösung der zugehörigen quadratischen Gleichung führt dann auf eine Funktion für f_{Res} , die in den Spannungen homogen vom Grad -1 ist, also für $\mathcal{E} = 1/f_{Res}$ homogen vom Grad 1 . Schreibt man die Bruchbedingung nun mit $f_{Res} = 1$ oder $\mathcal{E} = 1$, hat man die ursprünglich inhomogene Bruchfunktion in Gl. (4.6) durch eine homogene ersetzt.

Findet man eine Bruchbedingung vor, deren Bruchfunktion bezüglich der Spannungen homogen vom Grad -1 oder 1 ist, so kann man sicher sein, daß diese die einzige existierende homogene Funktion vom Grad -1 bzw. 1 ist, mit der die betreffende Bruchfläche beschrieben werden kann, und daß sie den Reservefaktor f_{Res} bzw. die Anstrengung \mathcal{E} darstellt [55].

Eine UD-Schicht wird – jedenfalls im idealisierten Modell – in der (x_2, x_3) -Ebene, d.h. in der quer zur Faserrichtung stehenden Ebene, als isotrop betrachtet. Man bezeichnet einen solchen Werkstoff als **transversal-isotrop**. Die errechneten zum Bruch führenden Spannungen dürfen nicht davon abhängen, wie man in der transversalen Ebene die Lage des Koordinatensystems wählt, auf das die Spannungen bezogen werden. Mathematisch bedeutet dies:

Die Bruchfunktion muß **invariant** gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems um die Faserrichtung sein. Dies kann auf zweierlei Weise erreicht werden: Man formuliert entweder die Bruchfunktion von vornherein als Funktion von Invarianten, die für den transversal-isotropen Werkstoff passend sind (wie z.B. in [3]), oder man sorgt nachträglich dafür, daß durch Parameterverknüpfung die transversale Isotropie erreicht wird (wie z.B. in [5] und [6].)

4.3 Kurzer geschichtlicher Rückblick

Im Ganzen gesehen hat die Entwicklung der Bruchkriterien für Faser-Matrix-Verbunde in den letzten Jahrzehnten keinen glücklichen Verlauf genommen.

Weil Verstärkungsfasern in dünnwandigen Scheiben und Schalen, d.h. bei vorherrschenden ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ - Beanspruchungen, am wirksamsten sind und deshalb solche Anwendungen in der Frühzeit der Faserverbundtechnik vorherrschten, wurden die meisten Bruchbedingungen für UD-Schichten zunächst auch nur für eine solche 2D-Beanspruchung aufgestellt. Man benutzte statt echter Bruchbedingungen für zusammengesetzte Beanspruchung drei voneinander unabhängige Grenzwerte, z.B. in Spannungen ausgedrückt [56]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right)^2 = 1, \quad \begin{array}{ll} R_{\parallel}^{(+)} & \text{für } \sigma_1 > 0 \\ R_{\parallel}^{(-)} & \text{für } \sigma_1 < 0 \end{array} \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(\pm)}} \right)^2 = 1, \quad \begin{array}{ll} R_{\perp}^{(+)} & \text{für } \sigma_2 > 0 \\ R_{\perp}^{(-)} & \text{für } \sigma_2 < 0 \end{array} \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1. \quad (4.12)$$

Diese ermöglichen es, Fb und Zfb zu unterscheiden, denn man weiß, daß σ_1 zu Fb führt und daß σ_2 ebenso wie τ_{21} Zfb verursacht. Sie berücksichtigen jedoch nicht, daß σ_2 und τ_{21} bei der Erzeugung eines Zfb zusammenwirken. Dies wurde erst 1969 durch Angabe von nur zwei voneinander unabhängigen Bruchbedingungen erfaßt [1,2], **Bild 4.4**:

$$\begin{array}{ll} \text{Fb:} & \left(\frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right)^2 = 1 \quad \begin{array}{ll} R_{\parallel}^{(+)} & \text{für } \sigma_1 > 0 \\ R_{\parallel}^{(-)} & \text{für } \sigma_1 < 0 \end{array} \\ \text{Zfb:} & \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(\pm)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 = 1 \quad \begin{array}{ll} R_{\perp}^{(+)} & \text{für } \sigma_2 > 0 \\ R_{\perp}^{(-)} & \text{für } \sigma_2 < 0 \end{array} \end{array} \quad (4.13)$$

Diese gesonderten Bruchbedingungen für den Zug- und Druckbereich von σ_2 sind zwar insofern physikalisch plausibel, als die Festigkeit im Zugbereich nicht von der Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ abhängt und die Festigkeit im Druckbereich nicht von der Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$. Die

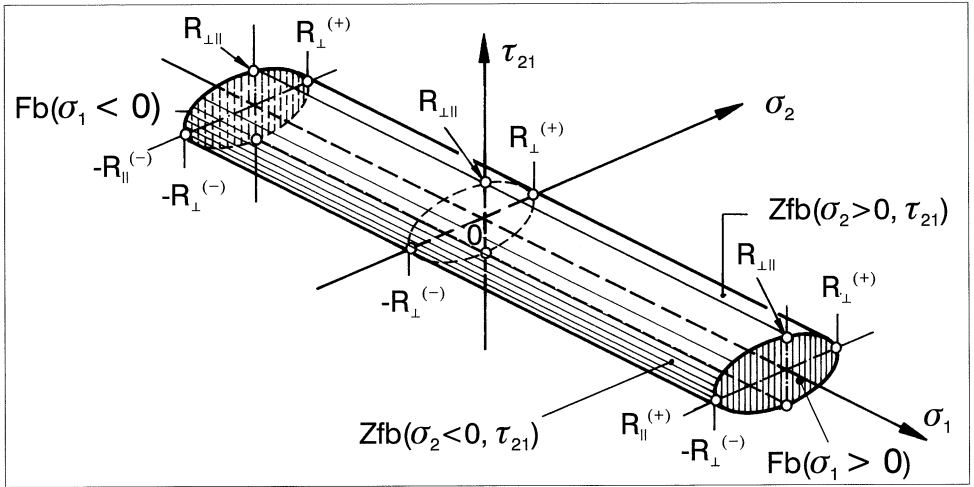


Bild 4.4: Darstellung der Fb-Bedingung (4.10) und der Zfb-Bedingung (4.13) als Bruchkörper, dessen Oberfläche aus 4 Teil-Bruchflächen zusammengesetzt ist

Gl. (4.13) berücksichtigt aber noch nicht die "innere Reibung" durch $\sigma_2 < 0$, die zu ertragbaren Schubspannungen τ_{21} führt, die höher als $R_{\perp\parallel}$ sind.

Hashin und Rotem publizierten 1973 eine Arbeit [57] zur Entwicklung einer Bruchbedingung für schwellende Beanspruchung, in der sie ebenfalls hervorhoben, daß Fb und Zfb unterschieden werden müssen. Als gut geeignet zur Beschreibung von UD-Verbunden bei schwellender $(\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung empfahlen sie gleichfalls die Gln. (4.10) und (4.13).

Eine besser an Versuchsergebnisse angepaßte Form der Bruchkurve ist die "verschobene" Ellipse nach Gl. (4.6) auf S. 47, die u.a. von Hoffmann benutzt wurde, die allerdings den physikalischen Widerspruch aufweist, daß die Festigkeit im Zugbereich von der Druckfestigkeit und das Festigkeitsverhalten im Druckbereich auch von der Zugfestigkeit abhängt:

Die beiden Spannungen σ_2 und τ_{21} wirken auf einer gemeinsamen Schnittebene. Diese wird, sofern σ_2 eine Zugspannung ist, beim Zfb auch zur Bruchebene. Hieran wird bei den späteren Überlegungen zu einer verbesserten Bruchanalyse im Teil III des Buches angeknüpft.

Eine ganz anders geartete Gattung stellen die sog. "pauschalen" oder "globalen" Bruchbedingungen dar, die auf die verschiedenen Bruchmechanismen Fb und Zfb keine Rücksicht nehmen. Sie vereinigen eine Anzahl von Spannungen und experimentell ermittelten Festigkeiten in einer einzigen stetig differenzierbaren Funktion, d.h. die Bruchbedingung stellt sich als "glatte" Bruchfläche im bis zu sechsdimensionalen Spannungsraum dar. Der "Stammvater" dieser Generation von Bruchbedingungen ist die 1948 von Hill auf den Fall leicht anisotro-

per duktiler Metalle erweiterte *von Mises*- Fließbedingung aus dem Jahre 1913. Ohne die heterogene Struktur und das andersartige Bruchverhalten zu berücksichtigen, übertrugen *Tsai* und *Azzi* [58] 1965 in den USA die Hillschen Ansätze auf Faserverbunde. Damit war es – aus der Sicht des Autors – zu einer falschen Weichenstellung gekommen, denn nun folgte man vielerorts dieser mehr mathematischen als werkstoffkundlichen Betrachtungsweise. Eine vergleichbare Fehlentwicklung gab es auch in der Sowjetunion.

Ein Ansatz für 3D-Beanspruchung dieser Kategorie "anisotropes homogenes Kontinuum mit einheitlichem Bruchgeschehen", der beliebig viele Koeffizienten enthalten kann, stammt von *Gol'denblat* und *Kopnov* [59]:

$$(F_{ij}\sigma_{ij})^\alpha + (F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^\beta + (F_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn})^\gamma + \dots = 1, \quad (4.14)$$

$$i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3 \quad \alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{3} \quad \text{usw.}$$

Weiteste Verbreitung hat eine Vereinfachung der *Gol'denblat*, *Kopnov*-Bruchbedingung gefunden. Mit $\alpha = \beta = 1$ beschränkt sie sich auf quadratische und lineare Spannungsterme. Sie wurde 1963 von *Zacharov* [60] veröffentlicht und ab 1971 von *Tsai* und *Wu* [61] weltweit als "die überlegene Faserverbund-Bruchbedingung" herausgestellt. Für (σ_1, σ_2) -Beanspruchung stellt sie eine verschobene und gedrehte Ellipse dar, **Bild 4.5**.

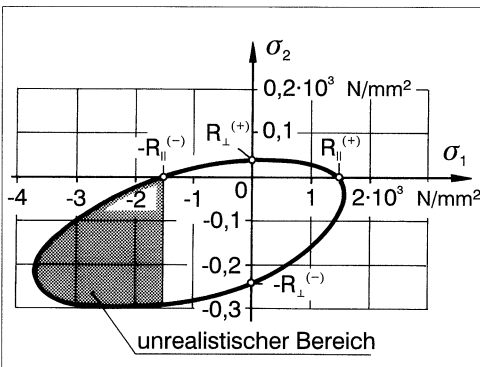


Bild 4.5: (σ_1, σ_2) -Bruchkurve nach *Tsai, Wu* [61] für CFK nach [38], dort S. 263. Im 3. Quadranten wird die faserparallele Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ mit einem Faktor 2,5 überschritten! (Basis-Festigkeiten: $R_{\parallel}^{(+)} = R_{\parallel}^{(-)} = 1500 \text{ N/mm}^2$; $R_{\perp}^{(+)} = 40 \text{ N/mm}^2$; $R_{\perp}^{(-)} = 246 \text{ N/mm}^2$)

Bestehend an dieser im Westen als *Tsai, Wu*-Bruchbedingung bekannt gewordenen Formulierung ist ihre mathematische Eleganz. Man hat nur eine einzige Gleichung zu bearbeiten, und sie läßt sich mit den bekannten Tensortransformationen in verschiedene Richtungen transformieren. Auch verleitet die Tatsache, daß zwischen fast allen Spannungen "Interaktionen" bestehen, zu der Vermutung, daß die Physik wohl ganz gut berücksichtigt sei; alle Spannungen werden formal vollkommen gleich behandelt. In Wirklichkeit sind aber einige der Interaktionen höchst fragwürdig, wie auch aus Bild 4.5 hervorgeht.

Da solche "anisotrop gemachten Fließ-Bedingungen", die ein einheitliches Bruchgeschehen bei allen Spannungszuständen voraussetzen, naturgemäß keine Angabe über die tatsächliche Bruchart bei Faser-Matrix-Verbunden liefern, kann man mit ihnen bei der schichtweisen Bruchanalyse von Laminaten auch nicht in physikalisch vertretbarer Weise über den Beginn der mit den ersten Zwischenfaserbrüchen einsetzenden Rißbildung hinweg rechnen.

In den 70-er Jahren herrschte in Deutschland, basierend auf Vorstellungen von einer "universellen" kritischen Dehnung bei Thermoplasten, zeitweilig die Meinung vor, daß "Dehnungs-Kriterien" sich auch für Faser-Kunststoff-Verbunde besser eignen würden als die bisherigen "Spannungs-Kriterien" [62]. Es wurden analog zu den mit Spannungen formulierten Grenzbedingungen (4.10) bis (4.12) entsprechende Bedingungen mit den Verzerrungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{21}$ aufgestellt. Diese aus dem Gebiet der isotropen Kunststoffe übernommene Betrachtungsweise scheitert aber, wenn sie auf Zfb angewandt wird, letztendlich an der "Tücke" der Orthotropie der stark anisotropen Faser-Matrix-Verbunde [42].

Bei der jüngsten der bisherigen Bruchbedingungen-Generationen werden Fb und Zfb wieder, wie schon in der Frühzeit, unterschieden. Sie sind für 2D- und 3D-Beanspruchung anwendbar. Zwei bekannte Vertreter dieser Gattung sind die Polynome von *Hashin* [3] und *Puck, Knaust* [6,63]. Bei diesen werden für Fb – zumindest bei isotropen Fasern wie Glasfasern – nach wie vor einfache Ansätze wie Gl. (4.10) auf S. 53 benutzt, oder stattdessen auch:⁴

$$\text{Fb: } \left(\frac{\varepsilon_1}{e_{\parallel}^{(\pm)}} \right)^2 = 1, \quad \begin{array}{ll} e_{\parallel}^{(+)} & \text{für } \varepsilon_1 > 0 \\ e_{\parallel}^{(-)} & \text{für } \varepsilon_1 < 0. \end{array} \quad (4.15)$$

Hierin ist e_{\parallel} die Bruchdehnung des UD-Verbunds in Faserichtung.

Bei stark anisotropen Fasern wie Kohlenstofffasern und Fasern aus aromatischem Polyamid (Aramid) müssen u.U. auch Querspannungen und Schubspannungen berücksichtigt werden [6,11,28,64].

Die Zfb-Bedingungen dieser bisher jüngsten Generation "konventioneller" Bruchbedingungen sind Interpolationspolynome der Form von Gl. (4.14), in denen aber – anders als in dieser – nur Spannungen und Festigkeiten vereinigt werden, die zum Zfb gehören. So tritt in der Zfb-Bedingung von *Hashin* [3] die Spannung σ_1 gar nicht auf, und es wird beim Zfb sogar auch noch Zugversagen und Druckversagen der Matrix unterschieden. Insofern lassen sich diese Bruchbedingungen aus physikalischer Sicht im Vergleich zu den Fb und Zfb vermischenden Polynomen nach *Tsai, Wu* und anderen Autoren noch am ehesten vertreten. Sie weisen aber doch noch erhebliche Ungereimtheiten auf, vor allem bei 3D-Beanspruchung, die erst durch die im Teil III dargestellte neue Art von Zfb-Bedingungen überwunden werden.

⁴Gl. (4.15) für Fb ist der einzige bekannte Fall, in dem sich eine echte Dehnungs-Bruchbedingung bewährt.

Teil II

Entwicklungsstand bei den Bruchanalyse-Modellen für Beanspruchung in der Schichtebene

5 Bruchbedingungen

5.1 Bruchbedingungen für Zwischenfaserbruch

5.1.1 Wege zu erhöhter Aussagekraft

Der entwerfende und dimensionierende Konstrukteur kann sich heutzutage nicht mehr damit zufriedengeben, daß eine Bruchbedingung ihm nur die Information liefert, daß eine Spannungscombination zu irgendeinem Bruch führt. Zumindest muß er, um zielgerichtet erfolgversprechende Änderungen am Laminat-Entwurf vornehmen zu können, eindeutig darüber Aufschluß erhalten, ob es sich um Faserbruch oder Zwischenfaserbruch handelt. Bei Fb ist eine Vergrößerung der Dicke der betroffenen Schicht angeraten¹, während dies bei Zfb normalerweise keine wirksame Abhilfe schafft. Den Zfb in einer Schicht kann man meistens nur dadurch unterdrücken oder zu höheren Belastungen verschieben, daß man Schichten mit anderen Faserrichtungen, die sich um 90° bzw. $\pm 45^\circ$ von der Faserrichtung der betroffenen Schicht unterscheiden, entweder neu anordnet oder vorhandene mit ungefähr passender Faserrichtung dicker ausführt. Aber selbst wenn die Information "Zfb" eindeutig ist, möchte man zusätzlich erfahren, um welchen Modus es sich handelt. Ist es der Modus C, interessiert die Größe des Bruchwinkels, damit die von dem schrägen Bruch ausgehende Sprengwirkung im Laminat beurteilt werden kann.

Alle diese Wünsche blieben bislang weitgehend unerfüllt; ganz besonders natürlich bei der Benutzung einer Global-Bruchbedingung in Verbindung mit dem First Ply Failure-Konzept. Dieses basiert lediglich auf der Vermutung, daß der erste Schicht-Bruch im Laminat ein Zfb ist. Die Erfahrung lehrt aber, daß dies nicht immer zutrifft. Zwischen FPF und Totalbruch erhält man mit diesem Konzept keine Information über das sukzessive Bruchgeschehen.

Ein wesentlicher Fortschritt konnte in neuerer Zeit durch eine neuartige Bruchanalyse-Methode erzielt werden, in die Teil III des Buches einen Einblick vermittelt. Die damit gewonnenen Zfb-Bedingungen basieren auf der Erfahrung, daß die allermeisten Faserverbundstoffe sich beim Zwischenfaserbruch ausgesprochen spröde verhalten, so daß auf sie die altbekannte

¹Eine Ausnahme stellen Federelemente dar. Bei diesen müssen ganz bestimmte Steifigkeiten eingehalten werden. Deshalb kann im allgemeinen die Fasermenge nicht erhöht werden. Hier hilft u.U. eine geschicktere Faserorientierung [19,20,27,44].

Festigkeitshypothese von *O. Mohr* [54] angewandt werden kann, die folgendermaßen lautet:

Die Bruchgrenze eines Materials wird durch die Spannungen der Bruchebene bestimmt.

Hashin hat schon in einer 1980 erschienenen Publikation [3] den Gedanken geäußert, daß man Bruchbedingungen für UD-Faserverbunde auf eine gesunde physikalische Basis stellen könne, wenn man die Mohrsche Festigkeitshypothese sinngemäß auf UD-Verbunde übertragen würde. Er hat die Idee jedoch nicht umgesetzt, weil er den mit solchen "wirk-ebenebezogenen" Bruchbedingungen verbundenen numerischen Aufwand scheute. Nachdem heute auch im Konstruktionsbüro eine unvergleichlich größere Rechenkapazität verfügbar ist als in den 80-er Jahren, spielt der numerische Aufwand keine so große Rolle mehr. Überraschenderweise wurde nun sogar gefunden, daß im Vergleich zu den heute gebräuchlichen Bruchbedingungen überhaupt kein zusätzlicher Rechenaufwand entsteht, solange nur der für Faserverbundbauteile oft maßgebende $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand behandelt zu werden braucht. Deshalb werden im folgenden Abschnitt bereits Bruchbedingungen der neuen Art empfohlen. Sie liefern nicht nur physikalisch plausible Spannungen beim Bruch, sondern zusätzlich auch noch die Informationen "Bruch-Modus" und "Bruchwinkel".

5.1.2 Empfehlenswerte Zwischenfaserbruch-Bedingungen

Obwohl die hier aufgeführten Zfb-Bedingungen auf einer recht anspruchsvollen Betrachtungsweise beruhen, die aus der Anwendung der Mohrschen Festigkeitshypothese resultiert, sind sie für die Konstruktionspraxis wegen ihrer einfachen Handhabbarkeit bestens geeignet. Am leichtesten erkennt man aus **Bild 5.1**, wodurch sie sich von den bisher gebräuchlichen Bruchbedingungen unterscheiden. Gezeigt ist die vollständige (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve in der Schnittebene $\sigma_1 = 0$. Sie setzt sich aus je einem Abschnitt von zwei Ellipsen für die Modi A und C und zwei Abschnitten einer Parabel für den Modus B zusammen. Die Schnittpunkte mit den Achsen sind selbstverständlich – wie bei herkömmlichen Bruchbedingungen auch – durch die Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$, die Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ und die Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ gegeben, aber die Festigkeit bei kombinierter Beanspruchung im Bereich $\sigma_2 > 0$ wird nicht von $R_{\perp}^{(-)}$ und die Festigkeit im Bereich $\sigma_2 < 0$ nicht durch $R_{\perp}^{(+)}$ beeinflusst. Als Parameter erscheinen in den Bruchbedingungen neben den Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\parallel}$ die Neigungen $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ der Bruchkurve an der Stelle $\sigma_2 = 0$. Die drei eigenständigen Bruchbedingungen für die Bruchmodi A, B, C lauten:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{R_{\perp}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(+)}}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel}} = 1 \quad \text{für Modus A,} \quad (5.1)$$

Tabelle 5.1 Zwischenfaserbruchbedingungen für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung bei $\sigma_1 = 0$ und Beziehungen zwischen den werkstoffspezifischen Parametern.

Bruch-Modus	Bruchbedingung	Gl.nr.	Gültigkeitsbereich
A $\theta_{fp} = 0^\circ$	$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(1 - \frac{R_{\perp}^{(+)}}{p_{\perp\parallel} R_{\perp\parallel}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(+)}}\right)^2} + p_{\perp\parallel} \frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel}} = 1$	(5.1)	$\sigma_2 \geq 0$
B $\theta_{fp} = 0^\circ$	$\frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left(\sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2 \right) = 1$	(5.2)	$\sigma_2 < 0$ und $0 \leq \left \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right \leq \frac{R_{\perp\perp}^A}{ \tau_{21c} }$
C $\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{-\sigma_2}}$	$\left[\left(\frac{\tau_{21}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)} R_{\perp\parallel})} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(-)}} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp}^{(-)}}{(-\sigma_2)} = 1$	(5.3)	$\sigma_2 < 0$ und $0 \leq \left \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right \leq \frac{ \tau_{21c} }{R_{\perp\perp}^A}$

Defini- tion	$p_{\perp\parallel}^{(+)} = - \left(\frac{d\tau_{21}}{d\sigma_2} \right)_{\sigma_2=0}$ der (σ_2, τ_{21}) - Kurve für $\sigma_2 \geq 0$			$p_{\perp\parallel}^{(-)} = - \left(\frac{d\tau_{21}}{d\sigma_2} \right)_{\sigma_2=0}$ der (σ_2, τ_{21}) - Kurve für $\sigma_2 \leq 0$		
Parameter- Beziehungen	$p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel} \frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp\parallel}}$		(5.6)	$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp\parallel}}{2p_{\perp\parallel}} \left(\sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel} \frac{R_{\perp}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}}} - 1 \right)$		(5.8)
				$\tau_{21c} = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)} \frac{(-)}{R_{\perp\parallel}}}$		(5.9)

Möglichkeiten zur Berücksichtigung eines Einflusses von σ_1 finden sich in den Abschnitten 5.1.3 und 9.4.1

In der Gl. (5.3) für den Modus C erscheint der Parameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$, der an der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve nicht unmittelbar in Erscheinung tritt. Er bezieht sich auf die Bruchkurve für eine kombinierte $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\perp})$ -Beanspruchung, die beim schrägen Bruch nach Modus C eine Rolle spielt. Der Wert von $p_{\perp\perp}^{(-)}$ bestimmt auch die Höhe des Maximums der ertragbaren Schubspannung im Bereich $\sigma_2 < 0$ (s. Gl. (5.10)).

Die Bruchbedingungen für die Modi A, B, C haben ihren Ursprung in zwei "wirkebene-bezogenen" Ansätzen für die auf einer beliebigen faserparallelen Schnittebene auftretende Anstrengung in bezug auf Zfb (Inter Fibre Fracture, IFF) infolge der dort herrschenden Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$. Dabei müssen die Fälle $\sigma_n \geq 0$ und $\sigma_n < 0$ unterschieden werden. Die schnittwinkelabhängige Zfb-Anstrengung ist

$$\mathcal{E}_{IFF}(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{R_{\perp}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{E}_{IFF}(\theta) = \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n\right)^2} + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (5.5)$$

Bei dem den Bruchbedingungen für die Modi B und C zugrundeliegenden "parabolischen Ansatz" nach Gl. (5.5) ist von einer vorausgesetzten Kopplung der Neigungsparameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ der folgenden Art Gebrauch gemacht worden:

$$\frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} = \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}}. \quad (5.6)$$

Zur Festlegung der Parameter aufgrund vorliegender Versuchsergebnisse bestimmt man zweckmäßigerweise $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ aus der Neigung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für $\sigma_2 \leq 0$ im Schnittpunkt mit der τ_{21} -Achse. Durch die Wahl von $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ sind auch die Koordinaten des Umschlagpunkts c festgelegt, s. Gl. (5.9) und Bild 5.1. In diesem schließen sich die Parabel für Modus B und die Ellipse für Modus C knickfrei, d.h. mit gleicher Neigung, aneinander an. Dies hat seinen Grund darin, daß beide Kurven in der Gl. (5.5) ihren gemeinsamen Ursprung haben. Bei Faser-Kunststoff-Verbunden liegt $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ meistens zwischen 0,1 und 0,3. Etwas höher ergibt sich oft der Wert des Neigungsparameters $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ der Bruchkurve für den Modus A. Gegenüber der heute meistens als (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve benutzten verschobenen Ellipse nach Gl. (4.6) auf S. 47 stehen für die Anpassung an Versuchsergebnisse außer den Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\parallel}$ zusätzlich die freien Parameter $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ zur Verfügung. Damit ist in der Regel eine wesentlich bessere Anpassung an Versuchsergebnisse als mit der *Tsai, Wu*-Bruchbedingung möglich; ein Beispiel zeigt **Bild 5.2**.

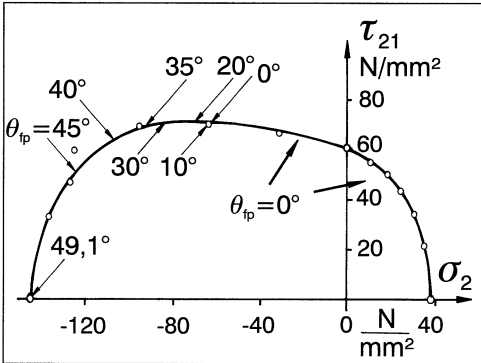


Bild 5.2: Anpassung der Bruchbedingungen nach Gln. (5.1), (5.2) und (5.3) an Versuchsergebnisse von *Knappe* und *Schneider* [87] mit Neigungsparametern $p_{\perp\parallel}^{(+)} = 0,43$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)} = 0,16$. Der theoretisch zu erwartende Bruchwinkel θ_{fp} wurde mit Gl. (5.7) berechnet.

Der zu erwartende Bruchwinkel θ_{fp} wird rechnerisch ermittelt, indem man unter allen als Bruchebene in Betracht kommenden faserparallelen Schnittebenen zwischen $\theta = -90^\circ$ und $\theta = +90^\circ$ diejenige mit der maximalen schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}_{IFF}(\theta)$ sucht. Der Schnittwinkel, unter dem sich das Maximum von $\mathcal{E}_{IFF}(\theta)$ errechnet, ist der sich beim Modell einstellende Bruchwinkel θ_{fp} . Solange sich bei einer (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung $\theta_{fp} = 0^\circ$ ergibt, lassen sich die Bruchbedingungen (5.4) und (5.5) aus dem $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum sehr einfach in die (σ_2, τ_{21}) -Ebene übertragen, denn mit den Transformationsformeln nach Gl. (2.1) auf S. 27 ist $\sigma_n = \sigma_2, \tau_{nt} = 0, \tau_{n1} = \tau_{21}$. Beim Vergleich von (5.1) mit (5.4) sowie (5.2) mit (5.5) werden diese Zusammenhänge sogleich offenbar.

Der Bruchbedingung (5.3) für den Modus C kann man nicht ansehen, daß sie genauso wie (5.2) ihren Ursprung in dem "parabolischen Ansatz" nach Gl. (5.5) hat. Beim Modus C ist der Bruchwinkel $\theta_{fp} \neq 0^\circ$, so daß die Spannungs-Transformation nach Gl. (2.1) nicht so einfache Ergebnisse liefert wie beim Modus A und B. Es ist deshalb sehr überraschend, daß sich auch für den Modus C eine höchst einfache Bruchbedingung in Form einer Ellipsengleichung ergibt. Womit dies zusammenhängt, wird im folgenden kurz erläutert. (Eine ausführliche Darstellung mit dem erforderlichen mathematischen Beweis findet sich im Abschnitt 9.5.2).

Wandert man auf der Bruchkurve in Bild 5.1 vom Punkt b, der zur reinen $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung gehört, zum "Umschlagspunkt" c, an dem der Bruch vom "geraden" Bruch ($\theta_{fp} = 0^\circ$) in einen "schrägen" Bruch ($\theta_{fp} \neq 0^\circ$) umschlägt, so wächst dabei die Druckspannung auf der Bruchebene ($\theta_{fp} = 0^\circ$) von $\sigma_n = \sigma_2 = 0$ bis $\sigma_n = \sigma_2 = -R_{\perp\perp}^A$ an. Eigenartigerweise zeigt sich nun, daß (bei dem gewählten Modell) bei Überschreitung des Punktes c die erreichte Druckspannung **auf der Bruchebene**, $\sigma_n = -R_{\perp\perp}^A$, konstant bleibt. Dies kommt dadurch zustande, daß sich die Bruchebene umso "schräger" einstellt, je höher die Druckspannung $|\sigma_2|$ wird.

Dies Phänomen hat zur Folge, daß sich der Bruchwinkel θ_{fp} beim Modus C ganz einfach berechnen läßt, denn es gilt $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta_{fp} = -R_{\perp\perp}^A$. Die überraschend simple Beziehung

für den Bruchwinkel beim Modus C lautet daher:

$$\theta_{fp} = \arccos \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{-\sigma_2}} \quad \text{für } \sigma_1 = 0. \quad (5.7)$$

Hierin ist σ_2 der Wert der Druckspannung **beim Bruch!** $R_{\perp\perp}^A$ ist ein Festigkeitsparameter, der in den neuen Bruchbedingungen in Verbindung mit der Schubspannung τ_{nt} auftaucht, die eine $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung darstellt. ($R_{\perp\perp}^A$ ist der Bruchwiderstand, den die Spannungswirkebene ihrem Bruch durch eine in ihr wirkende alleinige $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung entgegensetzt). Es besteht eine Beziehung zwischen $R_{\perp\perp}^A$ und der Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$, Gl. (9.13) auf S. 142, die vom gewählten Bruchmodell abhängt. Aus ihr folgt mit Gl. (5.6):

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})} = \frac{R_{\perp\parallel}}{2p_{\perp\parallel}^{(-)}} \left(\sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{R_{\perp}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}}} - 1 \right). \quad (5.8)$$

Es ist zu beachten, daß bei Berücksichtigung eines die Zfb-relevanten Festigkeiten schwächenden Einflusses der faserparallelen Spannung σ_1 in der Gl. (5.7) für den Bruchwinkel bei $R_{\perp\perp}^A$ ein Vorfaktor (Schwächungsfaktor) f_w erscheint, der dafür sorgt, daß σ_1 keinen Einfluß auf den Bruchwinkel gewinnt. Nähere Einzelheiten hierzu können dem Abschnitt 9.5.2 im Teil III entnommen werden.

Auf der Bruchkurve für $\sigma_1 = 0$ hat der Umschlagspunkt c die Koordinaten:

$$\sigma_{2c} = -R_{\perp\perp}^A \quad \text{und} \quad \tau_{21c} = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)}} \quad \text{für } \sigma_1 = 0. \quad (5.9)$$

Da die zum Modus C gehörende Ellipse stets durch den Koordinaten-Nullpunkt verläuft, Bild 5.1, findet sich die höchste ertragbare Schubspannung bei $\sigma_2 = -0,5R_{\perp}^{(-)}$, und ihre Höhe ergibt sich bei $\sigma_1 = 0$ aus

$$\tau_{21\max} = R_{\perp\parallel} (1 + p_{\perp\perp}^{(-)}) \quad \text{für } \sigma_1 = 0. \quad (5.10)$$

Ein Blick auf die Tabelle 5.1 bestätigt, daß bei der Anwendung der neuen Bruchbedingungen von einem erhöhten Rechenaufwand überhaupt keine Rede sein kann. Anders als bisher üblich muß man lediglich vorab aufgrund des Verhältnisses $|\tau_{21}/\sigma_2|$ entscheiden, welche der drei Bruchbedingungen anzuwenden ist. Dafür erhält man aber neben der besseren Anpaßbarkeit die wertvolle Information über den zu erwartenden Modus des Zfb. In den Bruchbedingungen (5.1) bis (5.3) sind die jeweiligen Bruchfunktionen bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1; der Zahlenwert der Bruchfunktion gibt also bereits die Anstrengung $\mathcal{E} = (f_{Res})^{-1}$ an.

5.1.3 Einfluß der faserparallelen Spannung

Gemäß der Mohrschen Festigkeitshypothese dürfte die faserparallele Spannung keinen Einfluß auf den Zwischenfaserbruch haben, denn dieser findet auf einer faserparallelen Ebene statt, und die dort wirkenden Spannungen hängen nicht von σ_1 ab, sondern nur von $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$. Im Experiment kann man aber Mikro-Brüche in der Matrix bei alleiniger σ_1 -Beanspruchung erzeugen, wenn man eine Matrix verwendet, die eine deutlich niedrigere Bruchdehnung besitzt als die Fasern. Dabei handelt es sich dann allerdings nicht um Zfb in der hier gemeinten Bedeutung, sondern um Mikro-Risse, die quer zu den Fasern verlaufen und an diesen gestoppt werden. Beim Überschreiten der Matrix-Bruchdehnung erscheinen solche Risse zwischen den Elementarfasern in großer Zahl; das Phänomen wird deshalb oft als "multiple fracture" bezeichnet [6, 29]. Es hat seine Ursache darin, daß bei einer σ_1 -Beanspruchung die Matrix mit den Fasern "parallel geschaltet" ist; das bedeutet, daß die Matrix die gleiche Dehnung ε_1 wie die Fasern erfährt. Selbstverständlich trachtet man stets danach, ein Matrixmaterial zu verwenden, dessen Bruchdehnung größer als die der Fasern ist, aber wenn hohe Wärmebeständigkeit verlangt wird, ist dies oft nicht möglich. In solchen Fällen vermindern die sich einstellenden Mikroschäden durch σ_1 natürlich die "Zfb-Festigkeiten".

In früheren Arbeiten [1, 2, 6, 42, 63] wurde auch für Faser-Matrix-Kombinationen, bei denen die Matrix eine deutlich höhere Bruchdehnung als die Fasern hatte, "vorsichtshalber" ein vermindender Einfluß der σ_1 -Beanspruchung auf die zur Zfb-Grenze gehörenden Spannungen angenommen. Bei einer "quadratischen" Zfb-Bedingung geschah dies, indem den Termen mit $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ ein Zusatzterm $Z(\sigma_1)$ hinzugefügt wurde, wobei zwei verschiedene Formen benutzt wurden, und zwar entweder

$$Z(\sigma_1) = \left(\frac{\sigma_1}{E_{\parallel} e_M^{(\pm)}} \right)^2 \quad \begin{array}{ll} e_M^{(+)} & \text{für } \varepsilon_1 > 0 \\ e_M^{(-)} & \text{für } \varepsilon_1 < 0 \end{array}, \quad (5.11)$$

oder

$$Z(\sigma_1) = \frac{\sigma_1^2}{E_{\parallel}^2 e_M^{(+)} e_M^{(-)}} + \frac{\sigma_1}{E_{\parallel}} \left(\frac{1}{e_M^{(+)}} - \frac{1}{e_M^{(-)}} \right). \quad (5.12)$$

Hierin sind $E_{\parallel} e_M^{(+)}$ und $E_{\parallel} e_M^{(-)}$ die σ_1 -Spannungen des UD-Verbunds, bei der die Zug-Bruchdehnung $e_M^{(+)}$ bzw. Druck-Bruchdehnung $e_M^{(-)}$ der Matrix erreicht wird.

Ohne diesen Zusatzterm wäre der in [2] beschriebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörper ein sich in σ_1 -Richtung erstreckender Zylinder mit elliptischem Querschnitt nach Bild 4.4 auf S. 54. Mit dem Zusatzterm $Z(\sigma_1)$ wird er mit Gl. (5.12) zu einem sehr langgestreckten Ellipsoid [6,42,63], mit Gl. (5.11) zu einem Bruchkörper aus zwei Halb-Ellipsoiden [1,2]. Die Endkuppen dieser Zfb-Ellipsoide werden durch die Faserbruchflächen weggeschnitten. Für diese Form des $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Bruchkörpers entstand der Ausdruck "Bruch-Zigarre", **Bild 5.3**.

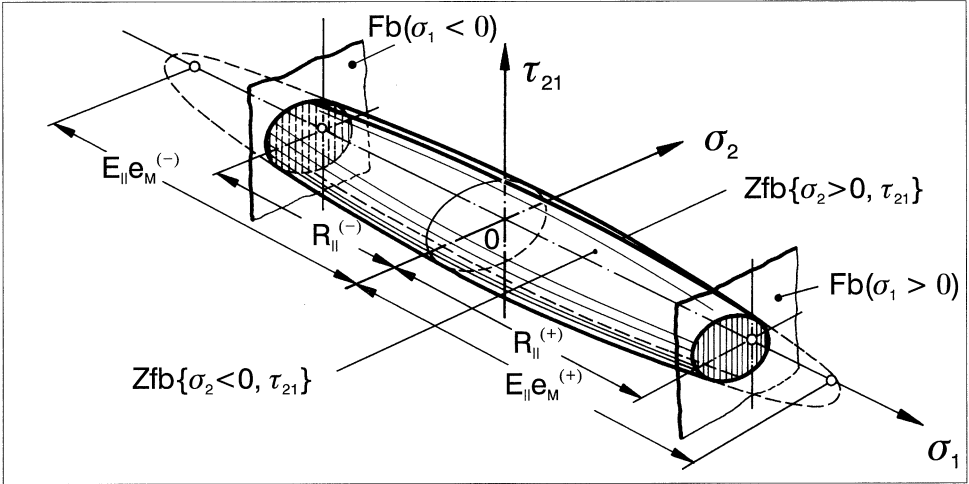


Bild 5.3: Als "Bruch-Zigarre" bezeichneter Bruchkörper für ebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustände

Wahrscheinlich bleibt man bei der Berechnung des Zfb-Reservefaktors bei $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung auf der "sicheren Seite", wenn man einen Zusatzterm in der Art der Gl. (5.11) oder Gl. (5.12) in die Zfb-Bedingung einführt. Trotzdem ist diese Vorgehensweise unbefriedigend, denn es bestehen Zweifel, ob dies auch der Realität gerecht wird. Es ist nicht zu erwarten, daß sich σ_1 in allen Oktanten des $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungsraumes gleich auswirkt. Bei einer σ_2 -Druckbeanspruchung könnte sich eine zusätzliche σ_1 -Druckbeanspruchung auch erhöhend statt vermindern auf die Zfb-Festigkeit auswirken. Dieser Fragen müßte sich die Forschung noch annehmen.

Die Beantwortung der mit dem σ_1 -Einfluß zusammenhängenden Fragen wird dadurch erheblich erschwert, daß beachtliche Verspannungen zwischen Fasern und Matrix in der Faserlängsrichtung auftreten. Erste "Mikro-Eigenstressen" entstehen bei der Herstellung des Faser-Matrix-Verbunds als Folge der Reaktionsschwindung des Matrixmaterials und des weiteren bei der Abkühlung nach der Härtung. Weil der Wärmeausdehnungskoeffizient des Matrixmaterials wesentlich höher ist als der der Fasern (Kohlenstofffasern besitzen sogar einen leicht negativen Wärmeausdehnungskoeffizienten in Faserrichtung), sind die Abkühlspannungen in der Matrix – ebenso wie die Spannungen aus der Reaktionsschwindung – stets Zugspannungen. Teilweise können diese durch Druckspannungen ausgelöscht werden, die bei der Quellung des Matrixmaterials infolge Feuchtaufnahme entstehen. Gefährlicher als stationäre Zustände sind für ein Laminat hohe Temperatur- und Feuchtegehalts-Gradienten. Es ist absehbar, daß in diesem Bereich trotz aller Forschungsbemühungen manche Einflüsse rechnerisch nur sehr ungenau erfaßbar bleiben werden.

Eine weitere Ursache für Mikro-Eigenstressungen, die aber etwas besser durchschaubar ist, sind die Querkontraktionsbehinderungen der Matrix durch die Fasern, die bei einer Querbeanspruchung des Verbunds durch σ_2 und/oder σ_3 auftritt. Weil der Quer-E-Modul der Fasern höher ist als der E-Modul der Matrix, tritt bei Querbeanspruchung eine viel größere Dehnung in der Matrix (quer zur Faserrichtung) auf als in der Faser. Man spricht von der Dehnungs-Vergrößerung, **Bild 5.4**.

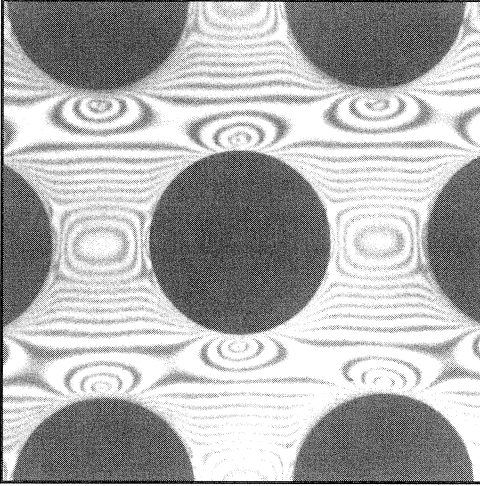


Bild 5.4: Isochromaten am Makro-Modell für GFK bei Quer-Druckbeanspruchung σ_{\perp} machen die Dehnungs- und Spannungsüberhöhung zwischen den Fasern sichtbar [69]. (Beanspruchungsrichtung waagerecht)

Zur Dehnung der Matrix würde, wenn die Matrix allein vorhanden wäre, eine hohe Querkontraktion ($-\nu_M \varepsilon_M$) gehören. Sie wird aber in Faserrichtung durch die steifen Fasern nahezu verhindert. So entsteht in der Matrix eine "Zwangsspannung" in Faserrichtung

$$\sigma_{1M} \approx \nu_M (\sigma_2 + \sigma_3), \quad (5.13)$$

die mit $\nu_M = 0,35$ bis etwa 70% der Matrix-Zugfestigkeit betragen kann, wobei die lokale Dehnungsvergrößerung noch nicht einmal berücksichtigt ist. Wenn sich dann noch eine relativ hohe σ_1 -Spannung überlagert, die eine Spannung in der Matrix mit gleichem Vorzeichen wie diejenige nach Gl. (5.13) bewirkt, kann dies für die Matrix durchaus kritisch werden. Diese letzten Betrachtungen dürften erneut gezeigt haben, wie dringend in den Fragen, die mit dem Einfluß von σ_1 auf den Zfb und der Verspannung von Faser und Matrix in der Faserrichtung zusammenhängen, eine Klärung herbeigeführt werden muß.

Ein vollkommen anders gearteter Effekt, der die Zfb-Festigkeit mindert, tritt in Erscheinung, wenn die σ_1 -Beanspruchung des UD-Verbunds sich dem Fb nähert. Das "Brechen" einer sehr großen Zahl von Elementarfaseren unterliegt natürlich statistischen Gesetzen. Wenn die σ_1 -Spannung etwa die Höhe von 70% derjenigen Spannung erreicht, die zum Faserbruch

in seiner hier benutzten Bedeutung führt, machen sich – besonders durch Schallemission – die ersten Elementarfaserbrüche bemerkbar. Mit weiter steigender σ_1 -Spannung nimmt die Häufigkeit von solchen "vorzeitigen" Elementarfaserbrüchen zu. Mit Sicherheit ist zu erwarten, daß in der Nähe der Elementarfaser-Bruchstellen Ablösungen an der Faser/Matrix-Grenzfläche und auch Mikro-Risse in der Matrix entstehen. Diese schwächen zweifellos den Faser/Matrix-Verbund und setzen dadurch die Zfb-Festigkeiten herab.

Für den Fall der schwellenden Belastung und $\sigma_1 > 0$ liegen gesicherte experimentelle Erfahrungen vor, durch die diese Vorstellungen untermauert werden. Hierbei kann man sich insbesondere auf die bei der Entwicklung der erwähnten schwellend beanspruchten Pkw-Drehrohrfeder stützen [25]. In der äußeren UD-Schicht des zweischichtigen Torsionsrohres tritt eine hohe positive Spannung σ_1 auf. Die dadurch pulsierend zugbeanspruchten Fasern dieser Schicht ermüden, so daß im Laufe der Lebensdauer der Drehfeder zunehmend Brüche einzelner Fasern auftreten. Diese haben zwar makromechanisch gesehen zunächst keinen unmittelbaren Effekt, sie führen aber mit Sicherheit in der Nachbarschaft der Bruchstellen einzelner Fasern zu Mikroschäden. Diese schwächen offenbar den UD-Verbund in seiner Widerstandsfähigkeit gegen Zwischenfaserbruch.

Um solche "Degradationen" rechnerisch zu erfassen, kann man vernünftigerweise annehmen, daß alle in den Zfb-Bedingungen (5.1) bis (5.3) enthaltenen Festigkeitsparameter, $R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\parallel}, R_{\perp\perp}^A$ durch einen Schwächungsfaktor f_w ($w \hat{=}$ weakening) herabgesetzt werden; und zwar alle im gleichen Maße. Dann läßt sich aus den Bruchfunktionen der Faktor $(f_w)^{-1}$ ausklammern. Multipliziert man anschließend die Bruchbedingungen mit f_w , so nehmen sie folgende Form an:

$$F(\sigma_2, \tau_{21}, R_{\perp}^{(+)}, R_{\perp}^{(-)}, R_{\perp\parallel} \cdots) = f_w(\sigma_1), \quad (5.14)$$

mit $0 < f_w(\sigma_1) < 1$. Die Bruchkörper behalten ihre Gestalt, werden aber mit dem Schwächungsfaktor $f_w(\sigma_1)$ geometrisch ähnlich verkleinert.

Für $f_w(\sigma_1)$ muß nun eine "vernünftige" Funktion von σ_1 gewählt werden. Wegen all der erwähnten Unsicherheiten hat es keinen Sinn, einen Ansatz zu machen, der allzu "sophisticated" ist. Mangels weitergehender Erfahrungen kann hier auch nur eine Empfehlung für Faser-Kunststoff-Verbunde gegeben werden, und zwar folgende:

Bis $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 0,7$ wird keine Abminderung der Zfb-Festigkeiten vorgenommen. Zwischen $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 0,7$ und $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 1$ fällt $f_w(\sigma_1)$ zunehmend steiler vom Wert 1 auf den Wert 0,5 ab.

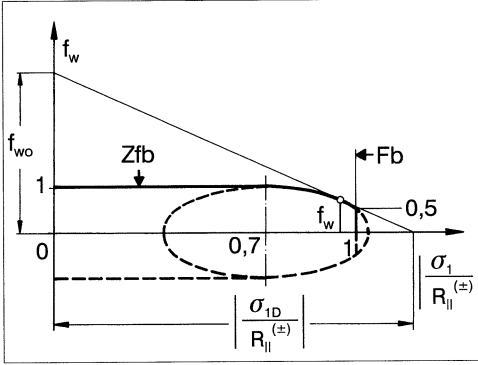


Bild 5.5: Angenommener Verlauf des Schwächungsfaktors $f_w(\sigma_1)$. Variable Hilfsgrößen f_{w0} und $|f'_w|$ oder σ_{1D} für die iterative Rechnung

In **Bild 5.5** ist ein angenommener Verlauf des Schwächungsfaktors $f_w(\sigma_1)$ über dem Verhältnis $|\sigma_1/R_{\parallel}|$ dargestellt. Bis $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 0,7$ ist $f_w = 1$, und von $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 0,7$ an fällt f_w nach folgender Ellipsengleichung auf den Wert 0,5 bei $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 1$ ab:

$$f_w^2 + \frac{1}{0,12} \left(\left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right| - 0,7 \right)^2 = 1 \quad \text{für } \left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right| \geq 0,7. \quad (5.15)$$

Wenn man den hieraus erhaltenen Ausdruck für f_w in die Zfb-Bruchbedingungen (5.1) bis (5.3) einführt, geht deren Homogenität bezüglich der Spannungen verloren, und man kann sie nun nicht mehr zur direkten Berechnung der Anstrengung oder des Reservefaktors benutzen. Eine Möglichkeit, die Homogenität vom Grad 1 wiederherzustellen, besteht darin, die Ellipse abschnittsweise durch Geraden (d.h. durch eine lineare Abhängigkeit von σ_1) zu ersetzen, die mit der Ellipse an der jeweils betrachteten Stelle $|\sigma_1/R_{\parallel}|$ sowohl im Wert f_w als auch in der Steigung f'_w übereinstimmen, s. Bild 5.5. Die Zfb-Bruchbedingungen nehmen dann eine Form an, wie z.B. für die Gl. (5.1) gezeigt:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{R_{\perp}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(+)}} \right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel}} = f_w(\sigma_1) \quad \text{für Modus A,} \quad (5.16)$$

$$\text{mit } f_w(\sigma_1) = f_{w0} - |f'_w| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} = f_{w0} - \frac{f_{w0}}{\sigma_{1D}} \sigma_1 = f_{w0} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} \right).$$

Hierin ist f_{w0} der (fiktive) Wert von f_w an der Stelle $|\sigma_1/R_{\parallel}| = 0$, $|f'_w|$ der Absolutwert der Steigung der Tangente an die Ellipse an der Stelle $|\sigma_1/R_{\parallel}|$. Werte für f_{w0} und $|f'_w|$ errechnen sich aus den folgenden Beziehungen:

$$f_{w0} = f_w + \left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right| |f'_w|, \quad (5.17)$$

$$|f'_w| = \left| \frac{d f_w}{d \left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right|} \right| = \frac{\left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right| - 0,7}{0,12 f_w} \quad \text{für } \left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}} \right| \geq 0,7. \quad (5.18)$$

Damit kann man nun mit den Bruchbedingungen (5.1) bis (5.3), wenn alle gemäß Gl. (5.16) umgeschrieben werden – wobei sie homogen vom Grad 1 bleiben – die Anstrengung für einen gegebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand durch Iteration berechnen. Für jeden neuen Rechengang bestimmt man die Größen f_{w_o} und $|f'_w|$ mit Hilfe der Gln. (5.17) und (5.18) mit dem im vorhergegangenen Rechengang erreichten Wert $|\sigma_1/R_{\parallel}|$ und dem dazu gehörenden Wert f_w , der sich aus der Ellipsengleichung (5.15) ergibt.

Weitere grundsätzliche Erläuterungen hierzu finden sich im Abschnitt 9.4.1 in Teil III.

5.2 Bruchbedingungen für Faserbruch

Bisher wurde als Faserbruch-Grenze meistens ein Spannungszustand angesehen, bei dem unter kombinierter Beanspruchung eine faserparallele Spannung σ_1 des UD-Verbunds auftritt, die gleich der Längsfestigkeit (Zugfestigkeit $R_{\parallel}^{(+)}$ oder Druckfestigkeit $R_{\parallel}^{(-)}$) aus dem einachsigen Bruchversuch ist, s. Gl. (4.10) auf S. 53. Analog wurde auch eine Bruchbedingung mit der unter kombinierter Beanspruchung auftretenden faserparallelen Dehnung ε_1 des UD-Verbunds und der Längs-Bruchdehnung $e_{\parallel}^{(+)}$ bzw. $e_{\parallel}^{(-)}$ formuliert, s. Gl. (4.15) auf S. 56. Die Wirklichkeit liegt etwa in der Mitte zwischen diesen beiden Ansätzen, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden.

Ausgegangen wird nicht von einer Bruchhypothese für den UD-Verbund, sondern von einer Bruchhypothese für die Fasern; sie lautet:

Die Fasern brechen im UD-Verbund unter einem allgemeinen räumlichen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand, wenn sie die Spannung in ihrer Längsrichtung erreichen, die bei einachsiger $\sigma_{\parallel}^{(+)}$ - bzw. $\sigma_{\parallel}^{(-)}$ -Beanspruchung zum Faserbruch des UD-Verbunds führt.

Hieraus leitet sich auch zunächst noch keine Bruchbedingung für den UD-Verbund, sondern eine Bruchbedingung für die Fasern ab:

$$\sigma_{1F} = R_{\parallel F}^{(+)} \quad \text{für } \sigma_{1F} > 0, \quad (5.19)$$

$$\sigma_{1F} = -R_{\parallel F}^{(-)} \quad \text{für } \sigma_{1F} < 0. \quad (5.20)$$

Es wird also vorausgesetzt, daß für die Fasern die Bruchbedingung der maximalen Normalspannung in Faserlängsrichtung gilt. Zu beachten ist, daß $R_{\parallel F}^{(+)}$ und $-R_{\parallel F}^{(-)}$ nicht an Einzelfasern oder Faserbündeln gemessene Festigkeiten sind, sondern die Zugspannung bzw.

die Druckspannung der Fasern, die beim Bruch des UD-Verbunds erreicht wird, und zwar bei einachsiger Zug- bzw. Druckbeanspruchung mit σ_1 . Linear-elastisches Verhalten vorausgesetzt, errechnet sich diese folgendermaßen:

$$R_{\parallel F}^{(+)} = \frac{R_{\parallel}^{(+)}}{E_{\parallel}} E_{1F} = e_{\parallel}^{(+)} E_{1F} \quad \text{und} \quad R_{\parallel F}^{(-)} = \frac{R_{\parallel}^{(-)}}{E_{\parallel}} E_{1F} = e_{\parallel}^{(-)} E_{1F}. \quad (5.21)$$

Während $R_{\parallel F}^{(+)}$ wohl die "echte" Faser-Zugfestigkeit (im Verbund) darstellt, ist $R_{\parallel F}^{(-)}$ häufig keine "echte" Druckfestigkeit der Fasern, weil bei $\sigma_{1F} < 0$ das Versagen meistens durch elastische Instabilität – sogenanntes Mikroklicken – der durch die Matrix elastisch gebetteten Fasern erfolgt. Es darf jedoch angenommen werden, daß dieser innere Knickvorgang nicht von einer zusätzlichen Spannung σ_2 beeinflusst wird, sondern allenfalls von einer zusätzlichen Spannung τ_{21} , s. Gl. (5.28). Somit kann $R_{\parallel F}^{(-)}$ zunächst ebenso wie $R_{\parallel F}^{(+)}$ als eine Konstante betrachtet werden. (Anders verhält es sich bei "hydrostatischem" Druck $\sigma_2 = \sigma_3$.)

Es folgt nun die etwas mühselige Herleitung der aus den Bruchbedingungen für die Fasern resultierenden Bruchbedingungen des UD-Verbunds. Wer sich diese ersparen möchte – das Ergebnis ist für die großen Zusammenhänge nicht so wichtig – möge auf S. 75 weiterlesen.

Bereits wenn $\sigma_1 = 0$ ist, aber $\sigma_2 \neq 0$, tritt wegen der unterschiedlichen Elastizitätsmoduln und Querkontraktionszahlen eine Verspannung von Fasern und Matrix in faserparalleler Richtung ein, bei $\sigma_2 > 0$ ist $\sigma_{1F} < 0$, und bei $\sigma_2 < 0$ ist $\sigma_{1F} > 0$. Dies wird durch das folgende Elastizitätsgesetz mit erfaßt:

$$\varepsilon_{1F} = \frac{\sigma_{1F}}{E_{1F}} - \frac{\nu_{21F}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \sigma_2. \quad (5.22)$$

Der Faktor $m_{\sigma F}$ berücksichtigt, daß wegen der unterschiedlichen Moduln von Faser und Matrix (in Richtung von σ_2) die Spannung σ_2 ungleichförmig verteilt ist; im Faserbereich ist sie etwas höher als im Matrixbereich, s. Bild 5.4 auf S. 68. Der Faktor $m_{\sigma F}$ ist der mittlere Vergrößerungsfaktor (magnification factor, m) der Querspannung (Index σ) für die Faser (Index F). Bei GFK dürfte er 1,3 und bei CFK 1,1 betragen.

Die faserparallele Dehnung der Fasern ist gleich derjenigen des Verbunds:

$$\varepsilon_{1F} = \varepsilon_1. \quad (5.23)$$

Damit läßt sich aus Gl. (5.22) die Längs-Spannung σ_{1F} in den Fasern berechnen:

$$\sigma_{1F} = \varepsilon_1 E_{1F} + \nu_{21F} m_{\sigma F} \sigma_2. \quad (5.24)$$

Wenn diese Spannung den gleichen Wert erreicht wie die Spannung in den Fasern beim Bruch des UD-Verbunds unter einachsiger Zug- bzw. Druckspannung σ_1 , "brechen" die Fasern

auch bei kombinierter (σ_1, σ_2) -Beanspruchung. Die Bruchspannungswerte ergeben sich bei vorausgesetztem linear-elastischem Verhalten der Faser als

$$\sigma_{1F} = R_{\parallel F}^{(+)} = e_{\parallel}^{(+)} E_{1F} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{1F} = R_{\parallel F}^{(-)} = -e_{\parallel}^{(-)} E_{1F}. \quad (5.25)$$

Damit erhält man als Fb-Bedingung des UD-Verbunds für (σ_1, σ_2) -Beanspruchung

$$\frac{1}{e_{\parallel}^{(+)}} \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{21F}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \sigma_2 \right) = 1 \quad \text{für} \quad (\dots) \geq 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{e_{\parallel}^{(-)}} \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{21F}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \sigma_2 \right) = -1 \quad \text{für} \quad (\dots) < 0, \quad (5.27)$$

wenn die Bruchstauchung $e_{\parallel}^{(-)}$ als positiver Zahlenwert angegeben wird.

In einer Erwiderung an *L. J. Hart-Smith* hat *E. C. Edge* [64] auf Versuchsergebnisse hingewiesen, aus denen hervorgeht, daß die faserparallele Druckfestigkeit $R_{\parallel}^{(-)}$ und damit auch die Bruchstauchung $e_{\parallel}^{(-)}$ stark herabgesetzt werden, wenn zu $\sigma_1 < 0$ eine Schubspannung τ_{21} hinzutritt. Dies wird damit erklärt, daß τ_{21} -Beanspruchung das Schubknicken (kinking) der Faser bei faserparalleler Druckspannung begünstigt. *Edge* gibt in [64] eine Interaktionsformel an, die $R_{\parallel}^{(-)} = 0$ werden läßt, wenn τ_{21} die Zwischenfaserbruchgrenze erreicht, also $\tau_{21} = R_{\perp \parallel}$ wird. Dies steht im Widerspruch zu unserer experimentellen Erfahrung, nach der in einer UD-Schicht innerhalb eines Laminats, in der sogar schon viele Risse infolge der τ_{21} -Beanspruchung aufgetreten sind, noch erhebliche σ_1 -Druckspannungen übertragen werden können. Es erscheint deshalb angebracht, eine wesentlich schwächere "Schubkorrektur" als die von *Edge* angegebene vorzusehen, nämlich beispielsweise:

$$\frac{1}{e_{\parallel}^{(-)}} \left| \left(\varepsilon_1 + \frac{\nu_{21F}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \sigma_2 \right) \right| + (10\gamma_{21})^2 = 1 \quad \text{für} \quad (\dots) < 0. \quad (5.28)$$

Bei $(10\gamma_{21})^2$ handelt es sich um einen rein empirischen Ansatz. Für das Rechnen oberhalb von Zfb erscheint es vorteilhaft, einen Ansatz mit γ_{21} statt τ_{21} zu wählen, weil nach der Rißbildung keine "saubere" Angabe über τ_{21} , wohl aber über γ_{21} gemacht werden kann.

In [64] wird auch auf einen merklichen Anstieg von $R_{\parallel}^{(-)}$ mit einem gleichzeitig wirkenden hydrostatischen Druck $\sigma_2 = \sigma_3$ hingewiesen. Ob solche Effekte auch bei $\sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$ existieren, ist noch ungewiß. Deshalb sollte auf die Formulierung irgendwelcher über die obigen Gleichungen hinausgehenden Interaktionen zwischen σ_1 und σ_2 beim Faserbruch vorerst verzichtet werden.

Eingangs wurde schon erwähnt, daß bei der Bedingung für Faserbruch die Wirklichkeit zwischen $(\sigma_1/R_{\parallel})^2 = 1$ und $(\varepsilon_1/e_{\parallel})^2 = 1$ liegen würde. Dies kann man jetzt leicht zeigen, indem man die Gln. (5.26), (5.27) etwas umformt, wobei das Elastizitätsgesetz

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{\parallel}} - \frac{\nu_{\perp \parallel}}{E_{\parallel}} \sigma_2 \quad (5.29)$$

benutzt wird. Im Vergleich zu den alten Bruchbedingungen (4.10) und (4.15) ergibt sich auf der rechten Seite bei der Größe "1" jeweils ein Korrekturglied, nämlich

$$\left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right| = 1 + \left(\nu_{\perp\parallel} - \nu_{21F} \frac{E_{\parallel}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \right) \frac{\sigma_2}{R_{\parallel}^{(\pm)}}, \quad (5.30)$$

$$\left| \frac{\varepsilon_1}{e_{\parallel}^{(\pm)}} \right| = 1 - \frac{\nu_{21F} m_{\sigma F} \sigma_2}{E_{1F} e_{\parallel}^{(\pm)}}. \quad (5.31)$$

Man erkennt, daß $(\sigma_1/R_{\parallel}^{(\pm)})$ größer als 1 sein darf, daß aber nicht ganz $(\varepsilon_1/e_{\parallel}^{(\pm)}) = 1$ gilt.

Gl. (5.30) ist bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1. Somit ergibt sich für die Anstrengung bzgl. Faserbruch-(Fibre Fracture, FF) für positive Faserspannung:

$$\mathcal{E}_{FF} = \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(+)}} - \left(\nu_{\perp\parallel} - \nu_{21F} \frac{E_{\parallel}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \right) \frac{\sigma_2}{R_{\parallel}^{(+)}} \quad \text{für } \sigma_1 \geq 0. \quad (5.32)$$

Wenn man Gl. (5.28) ebenfalls mit den Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ schreibt, erhält man lineare Terme in σ_1 und σ_2 , aber einen quadratischen in τ_{21} .

$$\begin{aligned} \text{Mit} \quad \sum L &= \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(-)}} - \left(\nu_{\perp\parallel} - \nu_{21F} \frac{E_{\parallel}}{E_{1F}} m_{\sigma F} \right) \frac{\sigma_2}{R_{\parallel}^{(-)}} \\ \text{und} \quad Q &= \left(10 \frac{\tau_{21}}{G_{\perp\parallel}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

errechnet sich in diesem Fall die Faserbruch-Anstrengung als Lösung einer quadratischen Gleichung gemäß Gl. (4.9) folgendermaßen:

$$\mathcal{E}_{FF} = \frac{1}{2} \left(\sum L + \sqrt{(\sum L)^2 + \left(20 \frac{\tau_{21}}{G_{\perp\parallel}} \right)^2} \right) \quad \text{für } \sigma_1 < 0. \quad (5.34)$$

Für die im nächsten Abschnitt vorgenommene Darstellung von Bruchkörpern im Spannungsraum eignen sich natürlich nur die Formulierungen der Bruchfunktion mit $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$. Beim Rechnen mit nicht-linearen Stoffgesetzen sind jedoch die ursprünglichen Formulierungen mit $\varepsilon_1, \sigma_2, \gamma_{21}$ vorteilhaft. Alle drei Größen sind im Rechenprogramm bei jedem Rechenschritt abrufbar. Wegen des ausgeprägt degressiven Verlaufs der (τ_{21}, γ_{21}) -Kurve wird durch die Benutzung von γ_{21} statt τ_{21} auf einfache Weise erreicht, daß – wie beabsichtigt – die Schubkorrektur bei relativ hohen τ_{21} -Spannungen verstärkt ins Gewicht fällt.

Beim iterativen Rechnen kann es wegen des "Rückkopplungseffekts", der daraus resultiert, daß die Zfb-relevante Spannung τ_{21} die Fb-Anstrengung beeinflusst und die Fb-Anstrengung wiederum Rückwirkungen auf die Zfb-Anstrengung und die daraus abgeleitete

Abminderung von $G_{\perp\parallel s}$ haben kann, zu Konvergenzproblemen kommen. Diesen muß man u.U. durch verkleinerte Schrittweiten begegnen.

In diesem Abschnitt sind eine ganze Reihe von Effekten, die den Fb beeinflussen können, aufgezeigt worden, und zugleich sind analytische Möglichkeiten zu ihrer Erfassung angegeben worden. Die Aufzählung erhebt noch keinen Anspruch auf Vollständigkeit; möglicherweise ist die Schubempfindlichkeit der C-Faser [28,30] noch zu wenig beachtet worden. Vieles muß noch durch mühselige experimentelle Kleinarbeit geklärt werden. Bis dahin spricht nichts dagegen, mit der uralten Fb-Bedingung $(\sigma_1/R_{\parallel})^2 = 1$ zu arbeiten. Die Abweichung gegenüber der Gl. (5.30) bleibt normalerweise unter 5%.

Im übrigen bereitet aber das Rechnen mit den hier hergeleiteten Fb-Bedingungen (5.26) und (5.27) außer vielleicht bei der Bestimmung von σ_2 oberhalb der Zfb-Rißbildungsgrenzen keine besonderen Schwierigkeiten. Will man jedoch mit kleinstmöglichem Aufwand von den hier vorgestellten Ergebnissen Gebrauch machen, empfiehlt sich eine Mittelwertbildung aus den Fb-Bedingungen (4.10) und (4.15):

$$\frac{1}{2} \left(\left| \frac{\sigma_1}{R_{\parallel}^{(\pm)}} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1}{e_{\parallel}^{(\pm)}} \right| \right) = 1. \quad (5.35)$$

Man scheut sich noch etwas, die verfeinerten Bruchbedingungen nach (5.26) und (5.28) zu empfehlen, solange die zugrundeliegende Bruchhypothese der maximalen Faser-Längsspannung noch nicht gesichert erscheint. Heftig widersprochen wird dieser Hypothese durch *Hart-Smith* [28], der eine merkliche Abnahme von $R_{\parallel F}$ für den Fall annimmt, daß die Faser etwa gleich großen Längs- und Querdehnungen mit ungleichem Vorzeichen ausgesetzt ist. Dies bedarf noch der experimentellen Klärung. Hierauf wird im Abschnitt 11.3 und in [65] näher eingegangen. Die Hauptsache bleibt vorerst, daß überhaupt eine eigenständige Fb-Bedingung benutzt wird.

5.3 Bruchkörper

Ob der erste Bruch, der in einer UD-Schicht eintritt, ein Zfb oder ein Fb ist, hängt von den Spannungsverhältnissen ab. Dies wird bei näherer Betrachtung der aufgestellten Bruchbedingungen deutlich. In den Fb-Bedingungen dominiert σ_1 , dagegen erscheinen σ_2 und τ_{21} nur in einem Korrekturterm. Bei den Zfb-Bedingungen verhält es sich umgekehrt, in diesen haben σ_2 und τ_{21} einen starken Einfluß und σ_1 hat in einem weiten Bereich zunächst gar keine und erst bei Annäherung an den Fb eine spürbare Auswirkung auf den Zfb. Aus dem eingangs in Kapitel 2 geschilderten Bruchgeschehen in Laminaten kann man schließen, daß in einer Schicht innerhalb eines Laminats zuerst Zfb und später auch noch Fb eintreten kann, während ein Fb gleichzeitig ein "katastrophaler" Zfb ist. Für den Bruchkörper bedeutet dies,

daß die Fb-Flächen – es gibt eine für Zug ($\sigma_1 \geq 0$) und eine für Druck ($\sigma_1 < 0$) – vom Zfb-Körper etwas wegschneiden und so seinen Gültigkeitsbereich begrenzen. Hingegen besitzen die Fb-Flächen auch außerhalb des Zfb-Körpers noch ihre Gültigkeit, nämlich für Fb nach eingetretener Zf-Rißbildung. Dabei kann an dieser Stelle noch nicht erklärt werden, woher man oberhalb der Rißbildungsgrenze den in die Fb-Bedingung einzusetzenden Wert von σ_2 nimmt. Bei der Schubkorrektur gibt es ein solches Problem nicht, weil sie von vornherein mit γ_{21} statt mit τ_{21} formuliert wurde.

Der Einfluß frühzeitiger Elementarfaserbrüche wurde ursprünglich in (Abschnitt 5.1.3) von $|\sigma_1/R_{||}|$ abhängig gemacht. Nach den inzwischen durchgeführten Betrachtungen zum Faserbruch erscheint es jedoch sehr viel einleuchtender, $|\sigma_1/R_{||}|$ in den Beziehungen für $f_w(\sigma_1)$ durch die Fb-Anstrengung \mathcal{E}_{FF} zu ersetzen, weil der Fb und seine Vorstufen bei genauerer Betrachtung nicht nur von σ_1 abhängen. Dies ist physikalisch sinnvoll und erleichtert außerdem das praktische Rechnen, aber es erschwert die Visualisierung, denn man möchte natürlich den Bruchkörper im $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Raum darstellen.

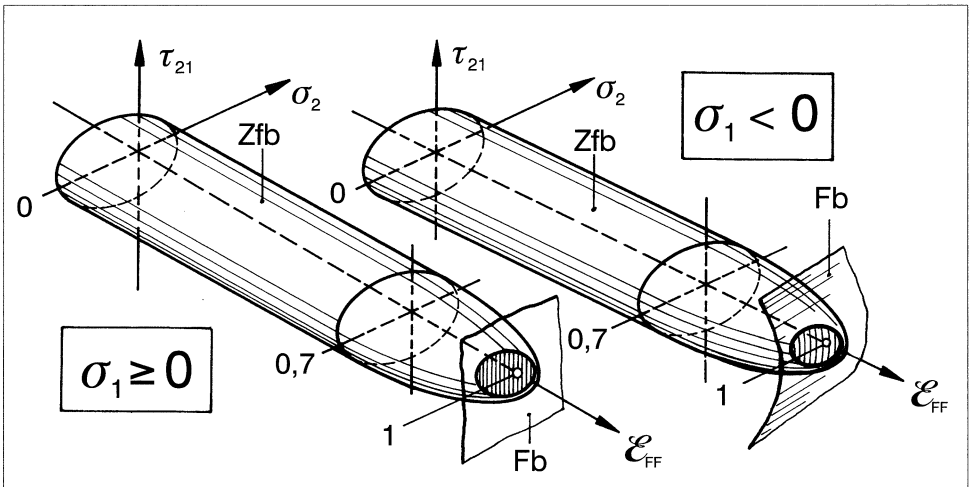


Bild 5.6: Bruchkörper nach Gln. (4.6) für Zfb und (4.10) für Fb für ebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung bei $\sigma_1 \geq 0$ und $\sigma_1 < 0$, dargestellt in Abhängigkeit von der Fb-Anstrengung \mathcal{E}_{FF}

Bild 5.6 zeigt zunächst die Darstellung des Bruchkörpers im $(\mathcal{E}_{FF}, \sigma_2, \tau_{21})$ -Raum. Für den Zfb-Körper gelten sinngemäß die Ausführungen des Abschnitts 5.1.3; an die Stelle von $|\sigma_1/R_{||}|$ tritt \mathcal{E}_{FF} . Im Bereich $\mathcal{E}_{FF} \geq 0,7$ sind die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurven in Schnitten $\mathcal{E}_{FF} = \text{const.}$ geometrisch ähnliche Verkleinerungen der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für $\mathcal{E}_{FF} = 0$. Da es definitionsgemäß nur positive Anstrengungswerte gibt, muß auch der Bereich negati-

ver Faserspannungen über positiven \mathcal{E}_{FF} -Werten aufgetragen werden. In diesem Fall macht sich die Schubkorrektur dadurch bemerkbar, daß die Fb-Fläche nicht wie bei positiver Faserspannung eine zur (σ_2, τ_{21}) -Ebene parallele Ebene ist, sondern eine einfach, und zwar parabelförmig, gekrümmte Fläche.

In **Bild 5.7** ist die übliche Darstellung des Bruchkörpers im $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Raum vorgenommen worden. Gemäß Gl. (5.26) ist die Fb-Fläche für positive Faserspannung eine auf der (σ_1, σ_2) -Ebene senkrecht stehende und um einen kleinen Winkel (von etwa 5° bis 8° bei gleichen Maßstäben für σ_1 und σ_2) gegenüber der (σ_2, τ_{21}) -Ebene gedrehte Ebene. Nun sind die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurven auf solchen, um den gleichen Winkel gedrehten Schnittebenen geometrisch ähnliche Verkleinerungen der Bruchkurve für $\mathcal{E}_{FF} = 0$, die durch die τ_{21} -Achse verläuft. Bei negativer Faserspannung erschwert die Schubkorrektur die geometrische Darstellung; die Durchdringungskurve von Zfb-Fläche und Fb-Fläche ist keine ebene Kurve.

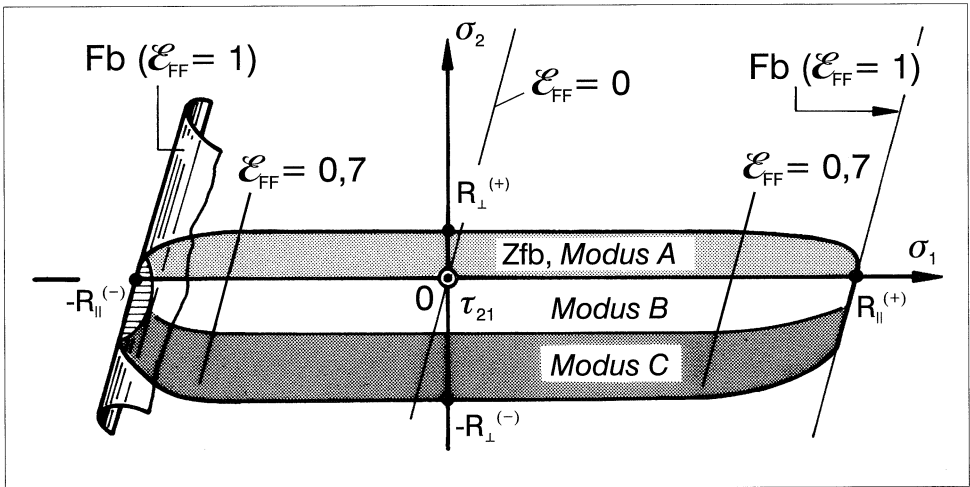


Bild 5.7: Bruchkörper nach Gln. (5.1) bis (5.3) für Zfb und (5.26) und (5.28) für Fb für ebene $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung, dargestellt im $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungsraum

Bemerkenswert ist, daß die Bruchfläche des UD-Verbunds sich bei Benutzung der neuen Zfb-Bedingungen aus 5 Teil-Bruchflächen zusammensetzt, nämlich 3 Flächen für die Zfb-Modi A, B, C (die beiden Modus B-Flächen nur einmal gezählt) und je einer Fb-Fläche für positive und negative Faserspannung. Demgegenüber stellen die vielen heute noch gebräuchlichen globalen Bruchbedingungen wie diejenige von *Tsai, Wu* eine einzige Ellipsoid-Oberfläche dar, so als ob es nur einen einheitlichen Bruch-Modus gäbe.

5.4 Berücksichtigung von Eigenspannungen

Bei der Festigkeitsanalyse von Laminaten müssen in vielen Fällen die Eigenspannungen berücksichtigt werden, die durch die gegenseitige Verspannung der Einzelschichten bei Änderung der Temperatur und der Feuchtekonzentration entstehen. Dabei muß man allerdings gegen eine Grundvoraussetzung verstoßen, die bei der Aufstellung von Bruchbedingungen getroffen wird, nämlich, daß die beteiligten Spannungen stets in einem unveränderlichen Verhältnis zueinander verbleiben, d.h. daß der Spannungszustandsvektor unter Beibehaltung seiner Richtung aus dem Koordinatenursprung des Spannungsraumes herauswächst. Auch bei der experimentellen Ermittlung von Festigkeiten und Bruchkurven ist man stets bemüht, diese Voraussetzung zu erfüllen, weil eine Abhängigkeit der Ergebnisse vom Lastpfad zu erwarten ist [66]. Man ist demzufolge normalerweise gezwungen, stets mit der gleichen Bruchkurve bzw. dem gleichen Bruchkörper zu rechnen, ob nun Eigenspannungen vorhanden sind oder nicht. Solange die Eigenspannungen gegenüber den zum Bruch führenden Spannungen relativ klein bleiben, dürfte der Fehler sich in tolerierbaren Grenzen halten.

Beim Vorhandensein von Eigenspannungen kann man die Begriffe Reservefaktor und Anstrengung nicht mehr in der gewohnten Weise anwenden. Dies soll durch **Bild 5.8** veranschaulicht werden. Um das Grundsätzliche zu zeigen, genügt es, einen einfach darstellbaren (σ_2, τ_{21}) -Spannungszustand zu betrachten. Gezeigt sind zwei gleich lange Spannungsvektoren $\{\sigma\}^{(l)}$. (l steht für lastbedingt, load dependent) Beide rühren von einer gleich hohen Belastung her, aber einmal geht $\{\sigma\}^{(l)}$ vom Koordinatenursprung aus, während im anderen Fall $\{\sigma\}^{(l)}$ sich einem bestehenden Eigenspannungszustand $\{\sigma\}^{(r)}$ (residual stress, r) überlagert, wodurch der Spannungsvektor $\{\sigma\}$ entsteht. Ohne Eigenspannungen ergibt sich der Reservefaktor f_{Res} in gewohnter Weise. Wenn aber Eigenspannungen vorliegen, kann man nur einen Reservefaktor $f_{Res}^{(l)}$ der lastbedingten Spannungen $\{\sigma\}^{(l)}$ definieren:

Der Reservefaktor der lastbedingten Spannungen ist derjenige positive Faktor, mit dem alle lastbedingten Spannungen erhöht werden müßten, damit Bruch eintreten würde.

Während es sinnvoll ist, einen Reservefaktor $f_{Res}^{(l)}$ der lastbedingten Spannungen einzuführen, wäre es unsinnig, bei Existenz von Eigenspannungen von einer "Werkstoff-Anstrengung" der lastbedingten Spannungen $\{\sigma\}^{(l)}$ zu sprechen, denn es kann ja nicht nur ein Teil der im Werkstoff wirkenden Spannungen, nämlich der lastbedingte, für dessen Anstrengung maßgeblich sein. Bei Berücksichtigung der Eigenspannungen wird unter "Anstrengung" nicht der Kehrwert $(f_{Res}^{(l)})^{-1}$ verstanden, sondern der Kehrwert des Faktors, um den sich der Spannungsvektor $\{\sigma\} = \{\sigma\}^{(r)} + \{\sigma\}^{(l)}$ unter Beibehaltung seiner Richtung verlängern müßte, damit Bruch eintreten würde, vgl. (1) \rightarrow (2) und (1) \rightarrow (3) in Bild 5.8.

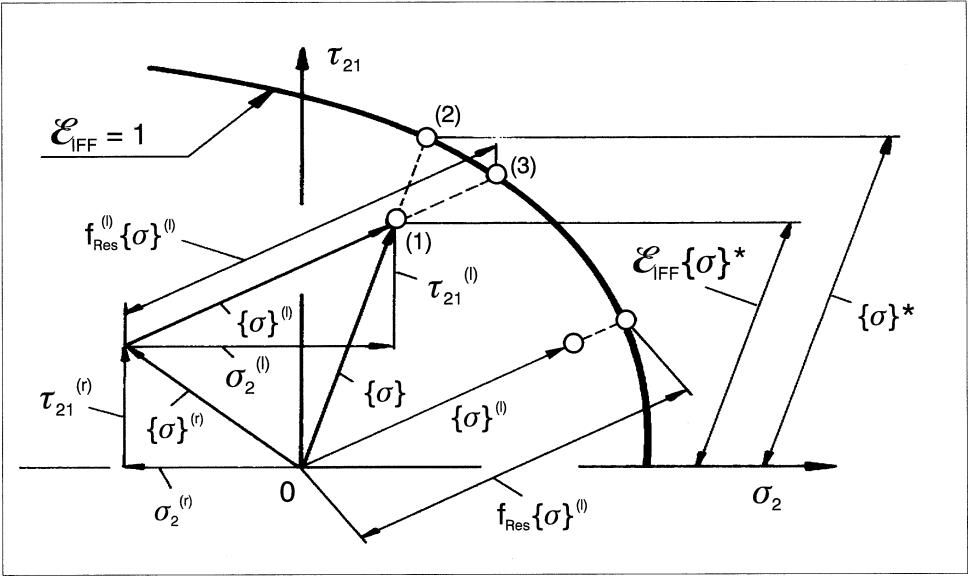


Bild 5.8: Zur Definition des Reservefaktors $f_{Res}^{(l)}$ der lastbedingten Spannungen und der Anstrengung \mathcal{E}

Im Falle des hier betrachteten ebenen Spannungszustands setzen sich die herrschenden Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21}$ folgendermaßen zusammen:

$$\sigma_1 = \sigma_1^{(r)} + \sigma_1^{(l)} \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_2^{(r)} + \sigma_2^{(l)} \quad ; \quad \tau_{21} = \tau_{21}^{(r)} + \tau_{21}^{(l)} . \quad (5.36)$$

Die zum Bruch führenden Spannungen ergeben sich dann mit den als konstant angenommenen Eigenspannungen, den momentan herrschenden "Last-Spannungen" und dem Reservefaktor der lastbedingten Spannungen folgendermaßen:

$$\sigma_1 = \sigma_1^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_1^{(l)} \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)} \quad ; \quad \tau_{21} = \tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)} . \quad (5.37)$$

Der besseren Übersichtlichkeit halber wird zunächst an einer einfachen konventionellen Bruchbedingung, nämlich Gl. (4.6) von S. 47 gezeigt, was sich ändert, wenn Eigenspannungen berücksichtigt werden.

Mit den Abkürzungen $a = \frac{1}{R_{\perp}^{(+)} R_{\perp}^{(-)}} \quad ; \quad b = \left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{1}{R_{\perp}^{(-)}} \right) \quad ; \quad c = \frac{1}{R_{\perp}^2}$

schreibt sie sich folgendermaßen: $a \sigma_2^2 + b \sigma_2 + c \tau_{21}^2 = 1$.

Ein Spannungszustand $\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)}$; $\tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)}$

soll die Bruchbedingung erfüllen. Die ergibt eine quadratische Gleichung für $f_{Res}^{(l)}$:

$$\begin{aligned} (f_{Res}^{(l)})^2 \left[a (\sigma_2^{(l)})^2 + c (\tau_{21}^{(l)})^2 \right] + f_{Res}^{(l)} \left[2a \sigma_2^{(r)} \sigma_2^{(l)} + b \sigma_2^{(l)} + 2c \tau_{21}^{(r)} \tau_{21}^{(l)} \right] + \\ + a (\sigma_2^{(r)})^2 + b \sigma_2^{(r)} + c (\tau_{21}^{(r)})^2 = 1. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die letzten drei Terme auf der linken Seite der Gleichung weisen darauf hin, daß auch der Eigenspannungszustand allein schon eine (eigentlich Langzeit-)Bruchgefahr darstellt. Beachtenswert ist auch, daß $\tau_{21}^{(l)}$ jetzt in der Bruchbedingung nicht nur quadratisch, sondern auch linear auftritt. Jetzt nimmt demnach das Vorzeichen der Schubspannung Einfluß auf das Ergebnis. Dies kann man sich auch anhand von Bild 5.8 vergegenwärtigen.

Mit den neuen Bruchbedingungen (5.1) bis (5.3) erhält man auf gleiche Weise:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\perp\parallel}^2} (\tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)})^2 + \left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)})^2 = \\ = \left[f_{w_o} - \frac{|f_w'|}{R_{\parallel}^{(\pm)}} (|\sigma_1^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_1^{(l)}|) - \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}} (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)}) \right]^2 \quad \text{für Modus A,} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\perp\parallel}^2} (\tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)})^2 + \left(\frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)})^2 = \\ = \left[f_{w_o} - \frac{|f_w'|}{R_{\parallel}^{(\pm)}} (|\sigma_1^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_1^{(l)}|) - \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)}) \right]^2 \quad \text{für Modus B,} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{[2(1+p_{\perp\parallel}^{(-)})R_{\perp\parallel}]^2} (\tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \tau_{21}^{(l)})^2 + \frac{1}{(R_{\perp}^{(-)})^2} (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)})^2 = \\ = \frac{1}{R_{\perp}^{(-)}} (\sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_2^{(l)}) \left[\frac{|f_w'|}{R_{\parallel}^{(\pm)}} (|\sigma_1^{(r)} + f_{Res}^{(l)} \sigma_1^{(l)}|) - f_{w_o} \right] \quad \text{für Modus C.} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Wenn $\sigma_1 = 0$ ist oder nicht berücksichtigt wird, ist $f_{w_o} = 1$ und $f_w' = 0$ zu setzen! Die Gln. (5.39) bis (5.41) stellen in jedem Fall quadratische Gleichungen für $f_{Res}^{(l)}$ dar.

Nun wird, wie auch aus dem Bild 5.8 hervorgeht, die Entscheidung darüber, welcher Bruch-Modus eintritt, erschwert. Dies ist durch den Ausgangspunkt des Lastspannungsvektors (= Spitze des Eigenspannungsvektors) und seine Richtung vorbestimmt. Es ist also eine kleine "geometrische" Rechenoperation nötig, um zu entscheiden, welcher Modus auftritt.

6 Degradation nach der Reißbildung

6.1 "Verschmieren" der Risse

Anfang der 60-er Jahre begann in Deutschland eine intensive Entwicklung von GFK-Hochleistungs-Segelflugzeugen. Aus der extremen Schlankheit der Tragflügel dieser Flugzeuge, die aus **Bild 6.1** erkennbar wird, resultieren außergewöhnlich hohe Festigkeitsanforderungen, insbesondere natürlich im Bereich der Flügelwurzel beim Übergang in den Rumpf.

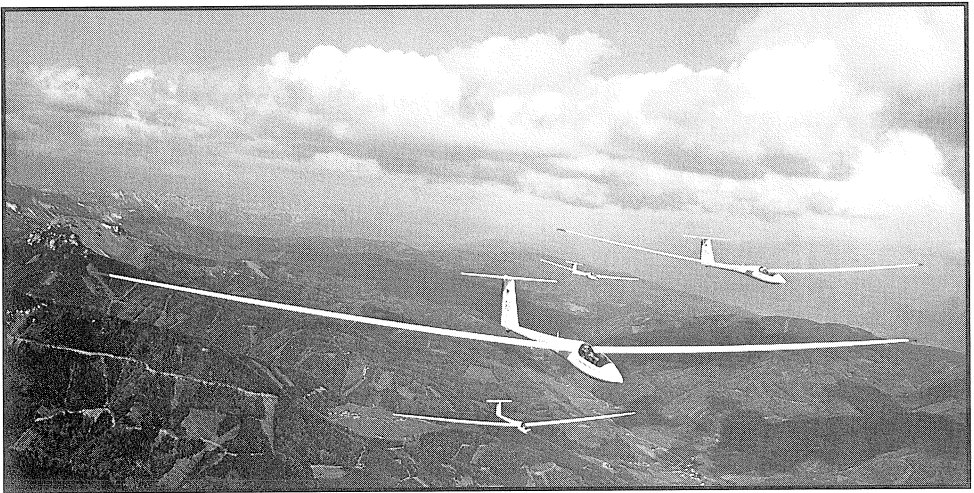


Bild 6.1: Bei modernen Hochleistungs-Segelflugzeugen resultieren aus der ungewöhnlichen Schlankheit der Tragflügel extreme Festigkeitsanforderungen.

Nachdem anfänglich mittragende Sandwichkerne aus Balsaholz an der Lastaufnahme beteiligt waren, ging man bald dazu über, die gesamte Primärstruktur, Tragflügel, Rumpf und Leitwerk, in reiner Faserverbundbauweise auszuführen. Bei der Entwicklung und der Festigkeits-Erprobung der frühen GFK-Flugzeuge stellte sich heraus, daß in der Festig-

keitsanalyse der Lamine noch eine riesige Lücke klaffte, und zwar für den sehr weiten Beanspruchungsbereich zwischen beginnender Ribbildung und dem Totalbruch. Zwar war die klassische Laminat-Theorie 1960 schon in ihren Ansätzen vorhanden – sie wurde damals zur Unterscheidung von der Netztheorie "Kontinuumstheorie" genannt – aber man sah keine Möglichkeit, mit ihr über die Entstehung der ersten Risse hinaus zu rechnen, weil dann ja kein "Kontinuum" mehr existierte. Die ältere Netztheorie konnte zwar gewisse Anhaltspunkte für das Tragverhalten der "total gerissenen" Struktur geben, aber insgesamt war die Situation äußerst unbefriedigend, denn der "Nach-Ribbildungs-Bereich" erwies sich als um ein Vielfaches größer als der ribfrei ertragbare Lastbereich. Dies veranlaßte den Autor 1968/69 zur Suche nach einer Abhilfe, die in erster Linie den Bedürfnissen der GFK-Konstruktionspraxis gerecht werden sollte [1,2]. Die folgende in [2] getroffene Aussage ist aber auch heute noch Grundlage aller realistischen "Post-Failure"-Theorien für Lamine:

"Es liegt nahe, ebenso wie man bisher schon in den einzelnen UD-Schichten die Auswirkung der unterschiedlichen Moduln von Fasern und Harz auf die Elastizität der UD-Schicht durch "Verschmieren" der Faser/Harz-Struktur zu einem homogenen Kontinuum makroskopisch – d.h. im Mittelwert richtig – erfaßte, auch die Risse zu "verschmieren" und so jedenfalls makroskopisch die Auswirkung der Risse auf die Steifigkeit der "gerissenen" UD-Schicht und damit auf die Steifigkeit des ganzen Mehrschichtenverbunds rechnerisch zu erfassen. Die Risse äußern sich dann in einer Abminderung einiger Elastizitätsgrößen der betroffenen UD-Schicht."

Genau genommen werden auch schon bei der Spannungsanalyse unterhalb der Ribbildungsgrenze, wenn nicht-lineare Spannungs-Verzerrungs-Zusammenhänge berücksichtigt werden, nicht nur Fasern und Matrix verschmiert, sondern auch Risse. In diesem Fall handelt es sich allerdings um unsichtbare "Mikrorisse", denn diese verursachen im wesentlichen die Nichtlinearität, vgl. Bilder 1.3 auf S. 5 und 3.7 auf S. 39. Das kann man unter anderem daraus schließen, daß bei einem der Entlastung folgenden zweiten Belastungszyklus bis zur gleichen Lasthöhe keine Nichtlinearität und Schädigungshysterese mehr auftritt [67].

Natürlich stellt das Verschmieren von "Makrorissen", die eine Schicht vollständig durchtrennen, ein wesentlich gröberes Vorgehen dar als das Verschmieren von Mikrorissen. Man muß sich darüber im klaren sein, daß die bei dieser Verfahrensweise unvermeidliche Vernachlässigung der Spannungskonzentration an den Ribspitzen gravierend sein kann, insbesondere bei Laminen, die nur aus sehr wenigen, dicken Schichten bestehen. Solche kommen allerdings sehr selten vor und erfordern ggf. besondere Maßnahmen wie das Einfügen einer "Ribstopperschicht", s. Bild 2.4 auf S. 17. Für die vorherrschenden fein- und vielschichtigen Lamine in Bauteilen stellt das Verschmieren der Zwischenfaser-Risse sicher eine "vernünftige" Annäherung an die Wirklichkeit dar. Vermutlich ist sie für die Konstruktionspraxis

sogar die einzige Vorgehensweise, die noch einfach genug handhabbar und doch hinreichend wirklichkeitsnah ist. Auf die lokale Kerbwirkung wird im Abschnitt 11.1 nochmals eingegangen. Hier geht es zunächst darum, die Last-Umverteilung unter den Schichten im Laminat "im Mittel richtig" berechenbar zu machen. Durch das Verschmieren der Risse wird erreicht, daß der Algorithmus der schichtenweisen Spannungsanalyse auch nach eingetretener Rißbildung weiterbenutzt werden kann. Die diskontinuierlich mit Rissen durchgesetzten Schichten werden durch ein homogenes Kontinuum ersetzt, dessen Eigenschaften – in erster Linie die "Quer-Steifigkeiten" – sich abhängig vom Ausmaß der Rißbildung stetig ändern. Im Sinne der Damage Mechanics stellt sich somit erstens die Frage nach dem Evolutionsgesetz, welches das Ausmaß der Rißbildung bestimmt (Bruchmechanik!), und zweitens nach dem zu einer bestimmten Rißdichte gehörenden Steifigkeitsverlust. Für den Spezialfall der reinen σ_2 -Zugbeanspruchung liegen bereits analytische Lösungen vor, die auch weitgehend experimentell bestätigt werden konnten [68]. Für die Bruchanalyse im Zuge einer Bauteilentwicklung müssen aber zumindest alle denkbaren $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungskombinationen in Betracht gezogen werden, so daß man in der Konstruktionspraxis wohl noch für einige Zeit mit phänomenologischen Modellen wird vorliebnehmen müssen.

6.2 Abminderungsfunktion für Elastizitätsgrößen

6.2.1 Bruch-Modus A

Aus dem Erscheinungsbild der Zf-Rißbildung und aufgrund mikromechanischer Vorstellungen vom Kraftfluß im Verbund ergibt sich, daß der Elastizitätsmodul E_{\parallel} in der Faserrichtung einer UD-Schicht nicht nennenswert durch die faserparallelen Risse beeinflusst wird.

Der Kraftfluß bei $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung wird an jedem Riß unterbrochen, so daß er im Rißbereich über die Nachbarschichten umgeleitet werden muß. Folglich müssen bei verschmierten Rissen die "Quer-Moduln" $E_{\perp s}$ und $G_{\perp\parallel s}$, wenn sie die Quersteifigkeiten im Mittel richtig angeben sollen, abgemindert werden. Auch der Mechanismus der Querkontraktion, der sich in der Querkontraktionszahl $\nu_{\perp\parallel}$ (es handelt sich um die größte) ausdrückt, wird durch die Risse verändert. Die mikromechanische Berechnung von $\nu_{\perp\parallel}$ geschieht mit einer einfachen "Mischungsregel", die auf der Annahme basiert, daß bei der Querkontraktion von Fasern und Matrix keine Hohlräume entstehen. Solche sind aber durch die Risse vorgegeben; die Querkontraktion $(-\nu_{\perp\parallel}\varepsilon_1)$ erfolgt nicht mehr "en bloc", sondern streifenweise, wobei sich die Risse öffnen. Mit fortschreitender Rißbildung wird sich folglich der Wert von $\nu_{\perp\parallel}$ verkleinern; bei einem reinen Netzwerk ist $\nu_{\perp\parallel} = 0$. Bei der Abminderung von $E_{\perp s}$, $G_{\perp\parallel s}$ und $\nu_{\perp\parallel}$ soll als extremer Grenzfall die Situation des reinen Netzwerks erreichbar sein.

In [2] wurde für die durch kombinierte $(\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung hervorgerufene Bruchart nach Modus A folgende Annahme getroffen:

E_{\parallel} bleibt von der Rißbildung unbeeinflusst. $E_{\perp s}, G_{\perp\parallel s}, \nu_{\perp\parallel}$ werden in gleichem Maße mit einem Faktor η abgemindert, der von der Rißdichte abhängt.

Das Problem bestand darin, bei Unkenntnis des Zusammenhangs zwischen Rißdichte und mittlerem Steifigkeitsverlust und unbekanntem Evolutionsgesetz der Rißbildung einen Ansatz für η zu finden. Eine Lösung ergab sich aus der folgenden Überlegung: Wenn man mit einer Zfb-Bruchbedingung – bei zunächst vorausgesetztem linear-elastischen Verhalten – \mathcal{E}_{IFF} -Werte > 1 errechnet, bedeutet dies, daß die Zfb-Grenze überschritten wurde, und zwar um so mehr, je höher der Wert für \mathcal{E}_{IFF} ausfällt. Grundsätzlich kann man also die **”Überanstrengung”** ($\mathcal{E}_{IFF} - 1$) als eine Variable benutzen, welche die Rißdichte und damit die Modulabminderung steuert. Anstrengungswerte $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ kann man auch als **Überschreitungsgrad** der Rißbildungsgrenze bezeichnen. Gesucht also ist eine Abminderungsfunktion

$$\eta = \eta(\mathcal{E}_{IFF} - 1) \quad \text{oder} \quad \eta = \eta(\mathcal{E}_{IFF}). \quad (6.1)$$

Für $\mathcal{E}_{IFF} = 1$ ist $\eta = 1$ und für $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ gilt $0 \leq \eta < 1$. Die Parameter der Funktion müssen natürlich durch geeignete Versuche an verschiedenen Laminaten und bei unterschiedlichen Belastungen ermittelt werden. Generell kann man aber bereits aus experimenteller Erfahrung vorhersagen, daß η nach dem Überschreiten der Rißbildungsgrenze zunächst nur sehr schwach abfällt ($\hat{=}$ geringe Rißbildungsrate), dann folgt ein steiler Abfall ($\hat{=}$ gehäufte Rißbildung) und anschließend wieder ein abgeflachter Verlauf ($\hat{=}$ abebbende Rißbildung).

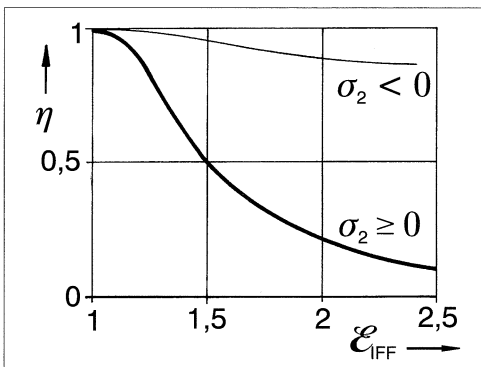


Bild 6.2: Abminderungsfaktor η für die Elastizitätsgrößen $E_{\perp s}, G_{\perp\parallel s}, \nu_{\perp\parallel}$ in Abhängigkeit vom ”Überschreitungsgrad” $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ des Beginns der Zwischenfaserrißbildung ($\mathcal{E}_{IFF} = 1$) nach [2]

Bild 6.2 gibt den in [2] gewählten Verlauf von $\eta = \eta(\mathcal{E}_{IFF})$ wieder. Aus dem Bild geht auch hervor, daß bei kombinierter $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung, d.h. bei den Bruch-Modi B und C, keine starke Abminderung erfolgen darf, weil die Risse sich nicht öffnen können und die

Rißflächen sich auch nach dem Zfb berühren und Druckkraft übertragen. Es war erwartet worden, daß nach dem Bekanntwerden dieser Methode vielerorts bei den Bruchversuchen η -Verläufe ermittelt würden, was aber leider bis heute nur vereinzelt geschehen ist.

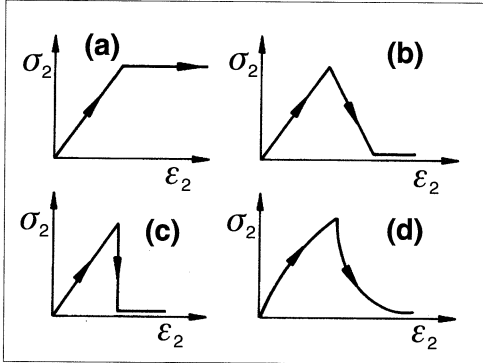


Bild 6.3: "Nach-Bruch-Theorien", zusammengestellt von Nahas [7]: (a) Hahn, Tsai-Methode, (b) Petit, Waddoups-Modell, (c) Chiu-Modell, (d) Nahas-Modell

Wie in [68] kommt auch in der Übersicht von Nahas [7] bei der Erwähnung der Nach-Bruch-Theorien nur der Sonderfall der einachsigen σ_2 -Zugbeanspruchung vor. **Bild 6.3** gibt die in [7] erwähnten Modellannahmen für den Verlauf der über der Länge gemittelten Spannung σ_2 bei fortschreitender Rißbildung wieder. Keiner der gezeigten Verläufe erscheint realistisch. Gegen die Annahme einer nach dem Rißbildungsbeginn konstant bleibenden mittleren Spannung σ_2 spricht die Vorstellung, daß an jeder Rißstelle die örtliche Spannung zu "null" wird, und daß es einer gewissen Anlaufstrecke bedarf, bis sich die Spannung wieder so weit aufgebaut hat, daß erneut die Festigkeit $R_{\perp}^{(+)}$ erreicht ist, und somit ein neuer Riß entstehen kann. Wäre $R_{\perp}^{(+)}$ eine Konstante, so müßte demnach die mittlere Spannung σ_2 nach dem Rißbildungsbeginn kleiner als $R_{\perp}^{(+)}$ sein. Nun ist $R_{\perp}^{(+)}$ allerdings in Wirklichkeit über die Länge der Schicht statistisch verteilt, so daß zuerst Risse an "schwächeren" Stellen und später an "festeren" Stellen entstehen. So kann man sich durchaus vorstellen, daß nach der Entstehung der allerersten Risse, die auch von Fehlstellen ausgelöst sein können, die über die Länge gemittelte Spannung σ_2 eine Weile konstant bleibt oder sogar noch etwas ansteigt, um erst später abzufallen. Die übrigen σ_2 -Verläufe enden alle mehr oder weniger abrupt bei $\sigma_2 = 0$. Dies ist nun wiederum nicht mit der Vorstellung vom charakteristischen Schädigungszustand (CDS) in Einklang zu bringen, denn wenn sich nach dem Erreichen des CDS keine neuen Risse mehr bilden können, bedeutet dies, daß die gerissene Schicht von nun an eine konstante Reststeifigkeit behält und somit die Spannung mit weiter wachsender Dehnung wieder proportional zu den Verzerrungen ansteigen muß.

Experimente zur Ermittlung des tatsächlichen Steifigkeitsabfalls nach Einsetzen der Rißbildung müßten u.a. an $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminaten durchgeführt werden, bei denen die 90° -Schicht erheblich dicker ist als die 0° -Schichten. Einige solche Versuche mit empfindlicher Deh-

nungsaufnahme sind in den 60-er Jahren am *Deutschen Kunststoff-Institut* in Darmstadt durchgeführt worden [69], wenn auch zu einem anderem Zweck. Dennoch kann man aus der Abb. 17 in [69] einige Anhaltspunkte zum Verlauf der mittleren σ_2 -Spannung entnehmen.

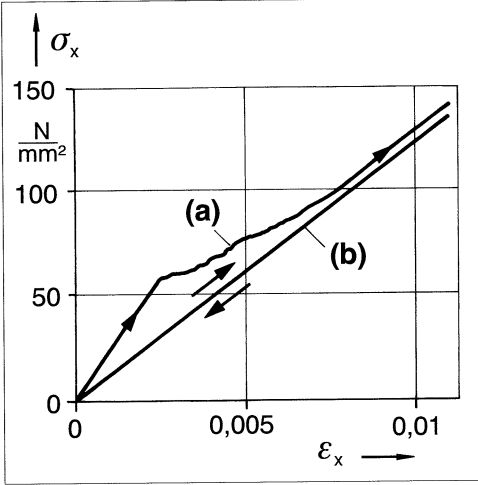


Bild 6.4: (a) Spannungs,Dehnungs-Diagramm eines $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ -Laminats (Verhältnis von Dicke der 90° -Schicht zur Gesamtdicke 0,75) bei einachsiger Zugbeanspruchung in Richtung der 0° -Fasern bis zu einer Dehnung $\epsilon_x = 1,1\%$ (b) Spannungs, Dehnungslinie für nur noch allein tragende 0° -Schicht

Bild 6.4 gibt Einzelheiten aus der erwähnten Abb. 17 in etwas vereinfachter Form wieder. Man kann deutlich erkennen, daß σ_2 nicht im Mittel konstant bleibt, denn sonst müßte die Spannungs,Dehnungs-Linie des Laminats nach dem "Knie", das den Rißbildungsbeginn anzeigt, parallel zu der Linie verlaufen, die sich bei nur noch allein tragender 0° -Schicht ergibt. Denn für die Spannung σ_x des Laminats gilt mit den Schichtdicken t

$$\sigma_x(t_{0^\circ} + t_{90^\circ}) = \sigma_{10^\circ}t_{0^\circ} + \sigma_{290^\circ}t_{90^\circ}. \quad (6.2)$$

Aus dem Abstand der aufgenommenen (σ_x, ϵ_x) -Linie und der Linie für die allein tragende 0° -Schicht erhält man also Aufschluß über den Verlauf von σ_{290° in Abhängigkeit von $\epsilon_{290^\circ} = \epsilon_x$, wobei in diesem Fall die Zfb-Anstrengung der 90° -Schicht näherungsweise proportional zu ϵ_2 ist. Ob ein CDS mit der zugehörigen Reststeifigkeit der 90° -Schicht auftritt, kann nicht mit Sicherheit festgestellt werden; man gewinnt den Eindruck, daß bei einer Anstrengung $\mathcal{E}_{IFF} \approx 4,5$ noch eine kleine Reststeifigkeit ($\leq 10\%$) vorhanden ist.

Aufgrund des allgemeinen Wissens über den Ablauf der fortschreitenden Rißbildung und der Anhaltspunkte aus Bild 6.4 gelangt man zu einem Ansatz für die Elastizitätsgrößen-Abminderungsfunktion $\eta(\mathcal{E}_{IFF})$ für den Bruch-Modus A der folgenden Art:

$$\eta = \frac{1 - \eta_r}{1 + c(\mathcal{E}_{IFF} - 1)^\xi} + \eta_r. \quad (6.3)$$

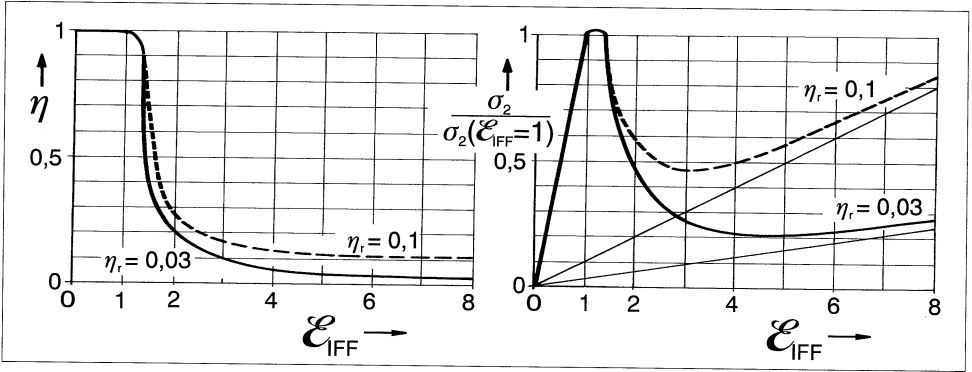


Bild 6.5: (a) Abminderungsfaktor η nach Gl. (6.3) mit $c = 4$ und $\xi = 2$. (b) Verlauf der mittleren, "verschmiert" betrachteten Spannung σ_2 in der 90° -Schicht eines $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ -Laminats, linear elastisch gerechnet. Die mittlere Spannung σ_2 ist auf die beim Erreichen der Rißbildungs-Grenze auftretende Spannung σ_2 (Zfb) bezogen.

Durch die Größe η_r wird erfaßt, daß eine kleine Reststeifigkeit erhalten bleibt. Die Konstante c und der Exponent ξ dienen zur Anpassung an Versuchsergebnisse. Die Messungen nach Bild 6.4 gestatten nur eine sehr unzulängliche Anpassung; $c = 4$ und $\xi = 2$ erscheinen "vernünftig". Mit diesen Werten sind die in **Bild 6.5** dargestellten Verläufe berechnet worden, die allerdings nur exemplarisch betrachtet werden sollten. Bemerkenswert ist vor allem der außerordentliche starke Einfluß des Wertes η_r auf die mittlere Spannung σ_2 . Er beeinflusst die Spannungsaufnahme der gerissenen Schicht bei hohen "Überschreitungsgraden" der Rißbildungsgrenze sehr stark. Eine 8-fache Überschreitung einer Zfb-Dehnungsgrenze von 0,3 % ist bei $(0^\circ, 90^\circ)$ -GFK-Laminaten durchaus denkbar. Solange keine verlässlichen Messungen über Reststeifigkeiten vorliegen, kann allenfalls empfohlen werden, bei GFK mit $\eta_r \approx 0,03$ bis 0,05 zu rechnen (vorzugsweise mit 0,03 für annähernde Spannungs Konstanz auf niedrigem Niveau) und bei CFK $\eta_r = 0$ zu setzen, denn bei CFK kann kaum eine Sättigung mit Rissen festgestellt werden [68]. Dies mag allerdings auch daran liegen, daß ganz so weite Überschreitungen der Rißbildungsgrenze wie bei GFK-Laminaten bei CFK-Laminaten wegen der meistens etwas niedrigeren Faser-Bruchdehnung nicht realisierbar sind.

Versuche zur Klärung des Nach-Zfb-Verhaltens bei $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung sind viel schwieriger als die beschriebenen Versuche an $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminaten, weil zur Rißbildung relativ große Schubverformungen $\gamma_{21} \approx 0,04$ bis 0,05 gehören, s. Bild 3.3 auf S. 35. Man kann am ehesten an rohrförmige Probekörper mit $(90^\circ, \pm 75^\circ)$ -Wicklung denken, bei denen die zu untersuchende außenliegende 90° -Schicht durch eine Rißstopperschicht gegen die auch in

der $\pm 75^\circ$ -Wicklung zu erwartende Rißbildung "isoliert" ist. Vorerst erscheint es vernünftig, für $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung die gleiche Abminderung vorzusehen wie bei $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung und somit auch bei Kombinationen von $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und $\tau_{\perp\parallel}$ die Moduln $E_{\perp s}$ und $G_{\perp\parallel s}$ gleich abzumindern.

Mit der in [2] vorgenommenen Einführung der Anstrengung \mathcal{E}_{IFF} oder Überanstrengung ($\mathcal{E}_{IFF} - 1$) als derjenigen Variablen, welche die Abminderung der Elastizitätsgrößen $E_{\perp s}, G_{\perp\parallel s}, \nu_{\perp\parallel}$ steuert, wurde die für kombinierte Beanspruchungen erforderliche Verallgemeinerung erreicht. Sie bewährt sich insbesondere auch dann, wenn sich das Verhältnis der Spannungen untereinander bei einer Belastungssteigerung oder im Laufe der Zeit ändert.

Für die Durchführung der Spannungsanalyse nach eingetretener Rißbildung infolge Zfb nach Modus A bedarf es noch einiger Präzisierungen:

Die Zfb-Anstrengung \mathcal{E}_{IFF} muß, damit überhaupt die Überanstrengung (oder "Überdehnung") in Erscheinung tritt, mit Elastizitätsgrößen berechnet werden, die noch nicht mit η abgemindert sind.

Da man in der Regel bereits vor der Rißbildung mit Sekantenmoduln $E_{\perp s}, G_{\perp\parallel s}$ gerechnet hat, die von den erreichten Spannungen σ_2, τ_{21} abhängig gemacht wurden, stellt sich die Frage, mit welchen Sekantenmoduln nach Eintritt der Rißbildung gerechnet werden soll. Eine halbwegs "exakte" Lösung ist hier wegen des inhomogenen Spannungszustands in der gerissenen Schicht nicht angebar. Vernünftig erscheint es, mit dem Sekantenmodul $E_{\perp s}$ bzw. $G_{\perp s}$ zu rechnen, welcher zu der über der Länge gemittelten Spannung σ_2 (Bild 6.5) bzw. τ_{21} gehört. D.h., daß nach dem Beginn der η -Abminderung die Sekantenmoduln $E_{\perp s}$ und $G_{\perp\parallel s}$ bei den Spannungen σ_2 bzw. τ_{21} im Spannungs,Verzerrungs-Diagramm abzugreifen sind, die sich unter Verwendung der mit η abgeminderten Elastizitätsgrößen errechnen. (In [2] war empfohlen worden, nach Einsetzen der η -Abminderung die Überanstrengung mit den Sekantenmoduln zu berechnen, die bei Erreichen der Rißbildungsgrenze vorlagen. Dies erscheint aber bei genauerer Überlegung nicht mehr plausibel.)

Hier kann nun auch die noch offen gebliebene Frage beantwortet werden, welcher Wert für σ_2 oberhalb der Rißbildungsgrenze in die Faserbruchbedingung eingesetzt werden soll. Will man möglichst korrekt vorgehen, sollte man in die Fb-Bedingung den Wert für σ_2 einsetzen, der sich mit der η -Abminderung errechnet.

Es sei darauf hingewiesen, daß in dieser Arbeit ein Höchstmaß an "physikalischer Korrektheit", das in der Konstruktionspraxis gerade noch praktikabel erscheint, dargestellt wird. Ob es immer sinnvoll ist, dies in den Rechenprogrammen in vollem Umfang umzusetzen, muß von Fall zu Fall geprüft werden. Man sollte sich stets dessen bewußt sein, wieviel Willkür z.B. vorerst noch in der angesetzten η -Funktion steckt. Deshalb erscheint es durchaus angebracht, in Rechenprogrammen, wenn nötig oder wünschenswert, aufgrund der Kenntnis der Zusammenhänge Vereinfachungen vorzunehmen. Darauf wird in Kapitel 7 noch eingegangen.

6.2.2 Bruch-Modi B und C

Wenn bei einer kombinierten (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung σ_2 eine Druckspannung ist, können entstehende Zf-Risse sich nicht öffnen; die gespeicherte Formänderungsenergie sorgt dafür, daß die Rißflächen aufeinandergepreßt bleiben. Eine nennenswerte Druck-Entspannung kann also nicht stattfinden, selbst wenn bei der Rißentstehung etwas Material "zerbröselt". Wohl aber können die beiden Rißflächen sich unter der Wirkung der τ_{21} -Schubspannung etwas gegeneinander verschieben. Dort, wo die gerissene Schicht mit den Nachbarschichten verklebt ist, ist keine solche Relativbewegung möglich, in der Schichtdickenmitte ist sie am größten. Die Relativbewegung bei Schub ist analog zum Öffnen der Risse bei Zug zu betrachten. Dies berechnete im Bereich $\sigma_2 \geq 0$ dazu, $E_{\perp s}$ und $G_{\perp \| s}$ in gleichem Maße mit η abzumindern. Insofern wird der in [2] gemachte Vorschlag, im Bereich $\sigma_2 < 0$ sowohl $E_{\perp s}$ als auch $G_{\perp \| s}$ nur sehr schwach abzumindern, vgl. Bild 6.2 auf S. 84, der Realität nicht ganz gerecht. Es gibt keinen Grund, zwei fast reine τ_{21} -Spannungszustände, einmal mit einer zusätzlichen sehr kleinen Spannung $\sigma_2 > 0$ und ein anderes Mal mit einer sehr kleinen Spannung $\sigma_2 < 0$, unterschiedlich zu behandeln. Mit anderen Worten: Die Abminderungsfunktion η sollte beim Durchgang durch $\sigma_2 = 0$ keinen Sprung aufweisen.

Wenn die beim Bruch erreichbare σ_2 -Druckspannung anwächst, nimmt mit ihr gleichzeitig der Reibwiderstand $\mu\sigma_2$ zu, der die Relativbewegung der Rißflächen erschwert. Ein Teil des τ_{21} -Schubes muß dann gar nicht mehr über die Nachbarschichten umgeleitet werden, sondern wird durch Reibkräfte direkt über die Rißflächen übertragen. Will man sehr konsequent vorgehen, muß man dementsprechend die η -Abminderung für $G_{\perp \| s}$ mit zunehmender σ_2 -Druckspannung beim Bruch allmählich zurücknehmen. Ohne an dieser Stelle die Frage zu erörtern, "ob sich der Aufwand lohnt", wird für die η -Abminderung im Bereich $\sigma_2 < 0$ folgende unterschiedliche Abminderung vorgeschlagen:

- Der Sekantenmodul $E_{\perp s}$ erfährt überhaupt keine η -Abminderung. Er wird am $(\sigma_2, \varepsilon_2)$ -Diagramm abgegriffen, das bei Bedarf zu diesem Zweck "verlängert" wird.
- Für die Abminderung von $G_{\perp \| s}$ wird der gleiche Funktionsverlauf von η wie im Bereich $\sigma_2 \geq 0$ benutzt; jedoch wird die Abminderung η mit wachsender σ_2 -Druckspannung allmählich weniger wirksam gemacht. Dazu wird folgende Interpolation zwischen den Werten $\eta^{(+)}$ und 1 vorgeschlagen:

$$\eta^{(-)} = \eta^{(+)} \cos^2 \rho + 1 \sin^2 \rho \quad \text{für} \quad \sigma_2 < 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \arctan \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right|. \quad (6.4)$$

$\eta^{(-)}$ und $\eta^{(+)}$ sind hierin die einander entsprechenden η -Werte (bei gleichem \mathcal{E}_{IFF} -Wert) für $\sigma_2 < 0$ bzw. $\sigma_2 > 0$.

7 Durchführung und Auswertung der Bruchanalyse

7.1 Rißbildung und Verformungsverhalten

Nachdem nun die Werkzeuge der schichtenweisen Bruchanalyse, nämlich Spannungsanalyse, Bruchbedingungen und Degradationsmodelle, vorgestellt worden sind, muß noch kurz ihre Anwendung erörtert werden. Einen Überblick über den Ablauf kann man sich am ehesten aus einem Fluß-Schema verschaffen; ein solches zeigt **Bild 7.1** auf S. 92.

Wenn man die Modelle und Methoden in der dargestellten relativ "perfekten" Form anwendet, wird damit ein Belastungsvorgang eines Laminats vom Belastungsbeginn bis zum Totalbruch recht wirklichkeitsnah auf dem Rechner simulierbar. All die Nichtlinearitäten und Interaktionen bedingen allerdings viele Iterationen. Wenn man z.B. "in einem Zug", d.h. nicht durch Steigerung der Belastung in kleinen Schritten, die Rißbildungsgrenze einer Schicht ermitteln will, wählt man für die erste Rechnung normalerweise erheblich zu hohe Sekantenmoduln und benötigt dann einige Iterationsschleifen, bis Moduln, Spannungen und Verzerrungen sowie ggf. auch η -Abminderungsfaktoren hinreichend in Einklang gebracht sind [2]. Die Anzahl der je Laststufe nötigen Iterationen ist geringer, wenn man die Belastung rechnerisch in kleinen Inkrementen steigert. Dies ist ohnehin immer dann nötig, wenn man das nicht-lineare Spannungs,Verzerrungs-Diagramm des Laminats berechnen will. Ein solches erhält man einschließlich der Information über den Rißbildungsbeginn aller nacheinander betroffenen Schichten. Hierbei ist vorallem auch die Angabe über den Bruch-Modus (A, B, C) von größtem Interesse. Der Rißbildungsbeginn einer Schicht zeigt sich im Spannungs,Verzerrungs-Diagramm des Laminats durch eine mehr oder weniger ausgeprägte Steigungsänderung, ein sogenanntes "Knie" an [69], s. auch Bild 6.4 auf S. 86.

7.2 Delaminationsgefahr

Ein Delaminationsbeginn kann mit Hilfe der schichtenweisen Bruchanalyse nicht annähernd so zuverlässig vorhergesagt werden wie die "intralaminaren" Zwischenfaserbrüche. Die Frage, ob intralaminare oder interlaminare Brüche auftreten, kann naturgemäß nur mit Hilfe

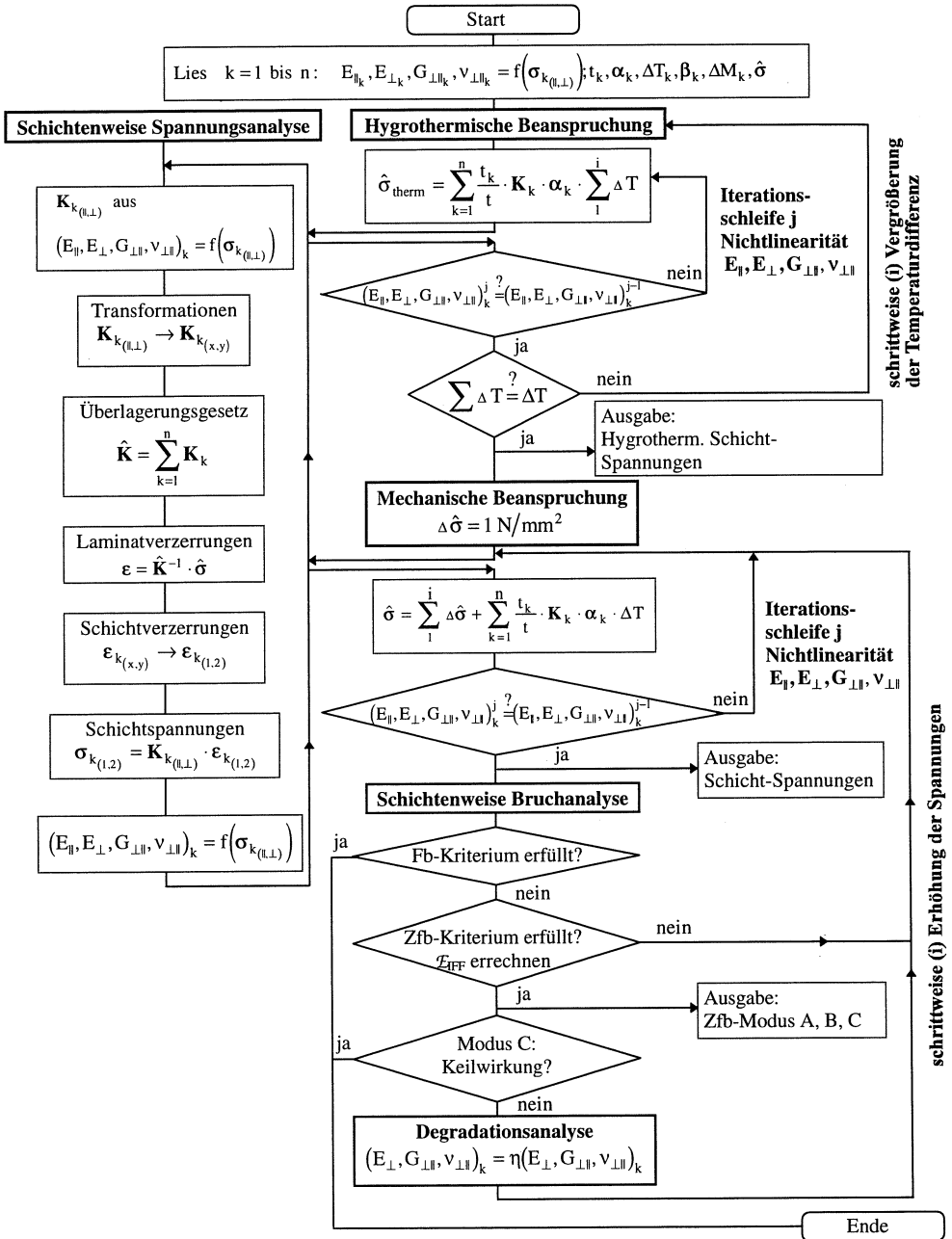


Bild 7.1: Flußdiagramm der schichtenweisen Spannungs- und Bruchanalyse

einer kompletten 3D-Bruchanalyse untersucht werden, die erst im Teil III behandelt wird. Mit den dort angegebenen Delaminationsbedingungen läßt sich feststellen, ob primär, d.h. bevor ein intralaminarer Bruch eintritt, eine Delamination zu erwarten ist. Die Erfahrung lehrt, daß dies in "ungestörten" Bereichen von Bauteilen äußerst selten der Fall ist. Dies erklärt sich sehr einfach daraus, daß sich dort, d.h. in einiger Entfernung von Krafteinleitungsstellen und "freien Rändern", keine gefährlichen interlaminaren Spannungen entwickeln können, weil hierfür die aus Gleichgewichtsgründen nötigen hohen Gradienten der intralaminaren Spannungen (s. Abschnitt 3.4) fehlen. Dies ging bereits mit größter Deutlichkeit aus einer elementaren Betrachtung an biegebeanspruchten GFK- und CFK-Rohren [45] hervor. In [70] wird über eine 1,6 Jahre (netto!) andauernde Schwingbeanspruchung mit 10^8 Schwingungsspielen eines GFK-Kastenträgers berichtet, bei dem bei der Konstruktion besonders auf "sanfte" Übergänge zwischen Gurt und Steg geachtet worden war. Nur bei einem etwas zu klein ausgefallenen Rundungsradius entwickelte sich eine örtlich begrenzte Delamination zwischen dem $\pm 45^\circ$ -Steg-Laminat und dem 0° -Gurt.

Aus den vielen Schwingversuchen an GFK-Antriebswellen, über die in [27] berichtet wird, wurde vor allem folgende Erfahrung gewonnen: Nennenswerte Delaminationen entwickeln sich an solchen "glatten" Bauteilen mit relativ homogenen Spannungszuständen und ohne freie Ränder offenbar immer erst dann, wenn zuvor intralaminare Zf-Risse entstanden sind. Dadurch, daß an den Rissen, insbesondere solchen vom Modus A, der Kraftfluß einer Schicht plötzlich unterbrochen wird, werden die intralaminaren Spannungen σ_2 und τ_{21} an dieser Stelle gleich "null". Nach einigen Millimetern – bei größerer Rißdichte auch schon nach Bruchteilen eines Millimeters – erreichen σ_2 und τ_{21} aber durch die Wirkung von interlaminaren Schubspannungen wieder eine solche Höhe, daß erneut ein Riß entstehen kann. An den Rißstellen existieren nun plötzlich die für die Entstehung interlaminarer Schubspannungen nötigen hohen Gradienten der intralaminaren Spannungen, s. Bild 2.6 auf S. 20. Der ursprüngliche Beanspruchungszustand in der Schichtebene verwandelt sich durch die Zf-Rißbildung lokal in einen räumlichen Beanspruchungszustand! Die Umgebung der Kreuzungspunkte von Rissen benachbarter Schichten sind Orte besonders hoher Spannungskonzentrationen und deshalb oft der Ausgangspunkt von Delaminationen.

Die Auswertungen der in [27] beschriebenen Versuche legt die Vermutung nahe, daß nahezu eine "Sättigung" mit intralaminaren Rissen eingetreten sein muß, bevor sich eine "ausgeprägte" Delamination bemerkbar macht. Darüber, wann und in welchen Schichten des Laminats hohe Rißdichten erreicht werden, kann der Überschreitungsgrad ($\mathcal{E}_{IFF} > 1$) aus der Zfb-Analyse Aufschluß geben. Damit bietet sich eine Möglichkeit, Ort und Belastungshöhe (oder Schwingspielzahl) anzugeben, für die eine erhöhte Delaminationsgefahr zu erwarten ist. In **Bild 7.2** ist der Versuch unternommen worden, für (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung eine Markierungslinie für den Grenzzustand "Erhöhte Delaminationsgefahr" festzulegen. Wie hoch

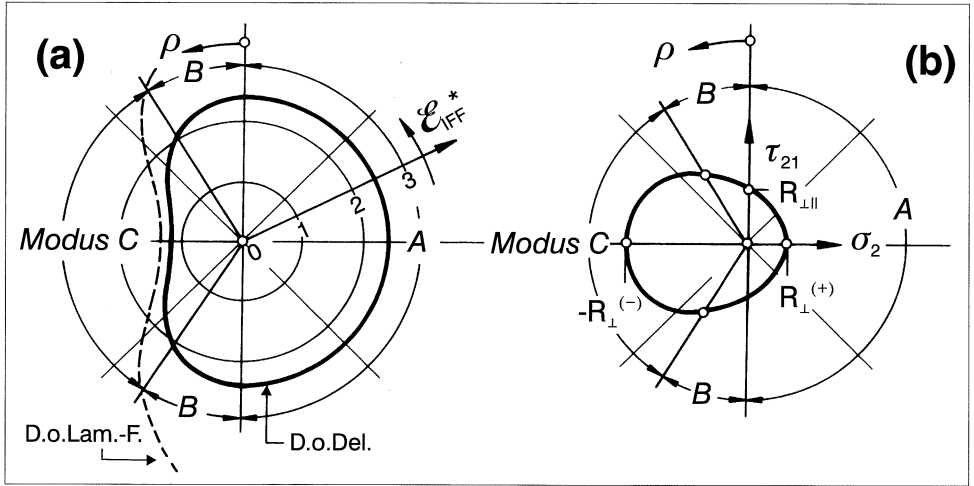


Bild 7.2: (a) Darstellung der "Warn Grenzen" für hohe Delaminationsgefahr (Danger of Delamination, D.o. Del.) und Gefahr des Laminatversagens (Danger of Laminate Failure, D.o. Lam-F.) in einem Polardiagramm; (b) Figur zur Herstellung der Verbindung zwischen dem Winkel ρ im Polardiagramm und den Winkeln an der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve

für bestimmte Faser-Matrix-Kombinationen und Herstellverfahren der Überschreitungsgrad ($\mathcal{E}_{IFF} > 1$) anzusetzen ist, ab dem eine erhöhte Delaminationsgefahr besteht, kann nur aus experimenteller Erfahrung entschieden werden; deshalb sind die im Bild gewählten Zahlenwerte nur exemplarisch zu werten. Wegen der mit großen Bruchwinkeln verbundenen "Sprengkraft" beginnt die Markierungslinie bei reiner Quer-Druckbeanspruchung bereits bei $\mathcal{E}_{IFF_0}^* = 1,25$. Bis zur reinen Quer/Längs-Schubbeanspruchung nimmt der delaminationskritische Wert von \mathcal{E}_{IFF}^* dann gleichmäßig nach folgender Beziehung

$$\mathcal{E}_{IFF}^* = \mathcal{E}_{IFF_0}^* (m \cos^2 \rho + \sin^2 \rho) \quad \text{für } \sigma_2 < 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \arctan \left| \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right| \quad (7.1)$$

bis auf den m -fachen Wert zu. Im Bereich des Modus A bleibt er konstant. Das Bild 7.2 zeigt den Verlauf von \mathcal{E}_{IFF}^* für $m = 2$ in Form eines Polardiagramms.

Mehr als dieses "Aufmerksam machen" auf den Ort und die Belastungshöhe, bei denen mit einer erhöhten Delaminationsgefahr gerechnet werden muß, kann die hier dargestellte elementare Betrachtungsweise nicht leisten. Aber selbst dies stellt schon einen nicht geringzuschätzenden Fortschritt dar. Im Rahmen der im Teil III behandelten Bruchanalyse bei räumlichen Spannungszuständen wird im Abschnitt 9.3 noch einmal auf die Delaminationsproblematik eingegangen.

7.3 Laminat-Versagen

Wegen der großen Zerstörungen, die mit einem Faserbruch – im hier benutzten Wortsinn – einhergehen, wird man in der Regel Fb in einer Schicht mit Laminatversagen gleichsetzen. Dies erscheint insbesondere dann angebracht, wenn sich Fb nicht nur für eine eng begrenzte Stelle, sondern für einen größeren Bauteilbereich errechnet. Ob nach eingetretenem Fb noch eine Resttragfähigkeit vorhanden ist, oder die verbleibenden Schichten sogar noch eine Laststeigerung ermöglichen, kann man prüfen, indem man alle Elastizitätsgrößen der vom Fb betroffenen Schicht zu "null" setzt, aber ihre geometrischen Daten unverändert läßt. Man sollte jedoch bei der Bewertung von Rechenergebnissen oberhalb einer Belastung, bei der bereits ein Fb eingetreten ist, bedenken, daß der Fb einer Schicht normalerweise auch Schäden in Nachbarschichten bewirkt.

Beim Auftreten von Zfb des Modus C, und zwar insbesondere solchen mit stark überwiegender σ_2 -Druckbeanspruchung, die zu großen Bruchwinkeln θ_{fp} führt, ist nicht nur die SpannungsKonzentration an der Rißstelle, sondern die von der Keilwirkung herrührende "Sprengkraft" zu beachten, die nach erfolgter Delamination das Beulen einzelner abgelöster Schichten begünstigen kann. Wie hoch die von einem schrägen Bruch nach Modus C ausgehende Gefahr einzuschätzen ist, hängt außer vom Bruchwinkel θ_{fp} vor allem von der relativen Dicke (Verhältnis von Schichtendicke zu Laminatdicke) der betroffenen Schicht oder Schichten und ihrer Plazierung im Laminat ab. Sollte sich bei großen Bruchwinkeln und großer relativer Dicke ein Überschreitungsgrad ergeben, der deutlich über $\mathcal{E}_{IFF}^* = 1,25$ hinausgeht, kann auch dies Laminatversagen bedeuten. In Bild 7.2 ist deshalb im Bereich des Modus C außer der Linie für erhöhte Delaminationsgefahr eine weitere Linie, diesmal für mögliches Laminatversagen, eingezeichnet, und zwar für Werte, die sich als $(\mathcal{E}_{IFF}^*)^{1,5}$ aus den \mathcal{E}_{IFF}^* -Werten nach Gl. (7.1) errechnen. Wenn sich die durch die Warnungslinie angezeigte als kritisch hinsichtlich Laminatversagen betrachtete Situation nicht durch einen veränderten Laminataufbau beseitigen läßt, muß sie detaillierter, evtl. auch experimentell abgeklärt werden.

7.4 Anwendung auf gewebeartige Strukturen

Obwohl man zur Erzielung hoher Schädigungs- und Bruchgrenzen, wie bereits im Abschnitt 2.1 erläutert, eine gestreckte Fadenführung anstrebt, kommt man oft aus herstelltechnischen Gründen nicht umhin, Gewebe, Wickelstrukturen mit Wickelbandüberkreuzungen oder geflochtene Faserstrukturen einzusetzen [21,22]. Glasseidengewebe spielen beispielsweise in der Hochspannungs-Elektrotechnik eine bedeutende Rolle, wo neben guten mechanischen Eigenschaften eine hervorragende elektrische Güte (Durchschlagfestigkeit, Glimmentladungsfreiheit usw.) unabdingbar ist. Ein typisches Beispiel sind mit feinen Glasseidengeweben im

Vakuum-Imprägnierverfahren hergestellte Lichtbogen-Löschkammern, die mechanisch und elektrisch hochbelastbare Innendruckbehälter darstellen. Es fragt sich deshalb, inwieweit die vorgestellten, mit idealisierten UD-Schichten aufgebauten Modelle auch auf gewebeartige Strukturen übertragbar sind. In [2] ist dazu folgendes ausgeführt worden:

Wir vermuten – und erste experimentelle Erfahrungen bestätigen dies –, daß man auch das Verhalten von Gewebelaminaten oder im Faser-Wickel-Verfahren hergestellten Verbunden, bei denen die Fasern gleicher Richtung nicht in geschlossenen UD-Schichten liegen, recht gut mit dem Modell "Schichtenverbund aus UD-Schichten" erfassen kann.

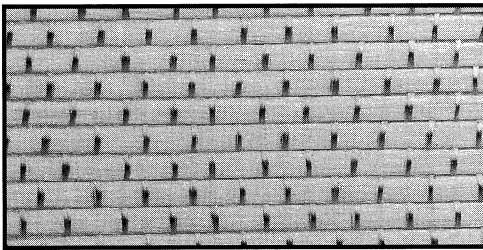


Bild 7.3: Kettstarkes Glasseidengewebe

Inzwischen ist diese Auffassung durch weitere Experimente bestätigt worden, wobei es sich allerdings um Strukturen mit relativ geringer Fadenwelligkeit handelte, wie sie für hochbeanspruchte Bauteile, z.B. Segelflugzeugteile, in Betracht kommen. **Bild 7.3** zeigt ein kettstarkes Gewebe, bei dem mehr als 90% aller Fasern parallel orientiert in den Kettfäden vereinigt sind. Es versteht sich von selbst, daß Lamine aus solchen Geweben, auch wenn in ihnen die einzelnen Gewebelagen unterschiedlich orientiert sind, so daß die Lamine solchen aus UD-Prepreglagen ähneln, recht gut mit dem Modell "Schichtenverbund aus UD-Schichten" beschrieben werden können. Die Brauchbarkeit des Modells wird um so fragwürdiger, je mehr sich die Fasermengen in Kett- und Schußrichtung dem Verhältnis 1:1 nähern und je ausgeprägter die Fadenwelligkeit ist, die durch die Art der Bindung (Atlas-, Köper-, Leinwandbindung) bestimmt wird. Die nicht gestreckte Fadenlage ist sowohl bei Zug- als auch bei Druckbeanspruchung nachteilig. Bei Zug tendieren die Fäden dazu, sich zu strecken, so daß im Bereich der Fadenkrümmung unerwünschte Zusatzbeanspruchungen entstehen. Unter Druckbeanspruchung neigen die gekrümmten Fäden zum Knicken, so daß an den Überkreuzungspunkten von Kett- und Schußfäden auch leicht Delaminationen entstehen können.

Bild 7.4 zeigt schematisch die Struktur eines Gewebes aus gleichen Kett- und Schußfäden, bei dem der "Schuß" beim Webvorgang (abwechselnd über 2 und unter 2 Kettfäden) eine Köperbindung erzeugt hat. In **Bild 7.5** sind Kett- und Schußfäden gedanklich "entflochten" worden. Die beiden Fadenlagen mit jeweils gleichgerichteten Fasern unter-

scheiden sich von einer UD-Schicht des Modells dadurch, daß die Fasern nicht gleichmäßig, sondern in Fäden gebündelt¹ auftreten, und vor allem durch den regelmäßigen Wechsel der Höhenlage. Jeder Faden wechselt ständig in einer "sanften Welle" seine Lage zwischen Ober- und Unterseite des Gewebes. Trotzdem legt das Bild der zwei gekreuzten Schichten es nahe, das bewährte Modell "Schichtenverbund aus UD-Schichten" beizubehalten.

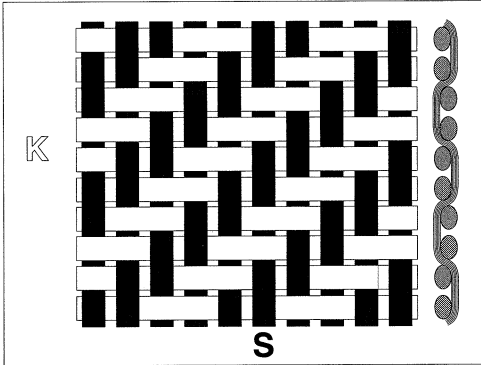


Bild 7.4: Gewebestruktur in Körperbindung, Kettfäden *K* und Schußfäden *S*

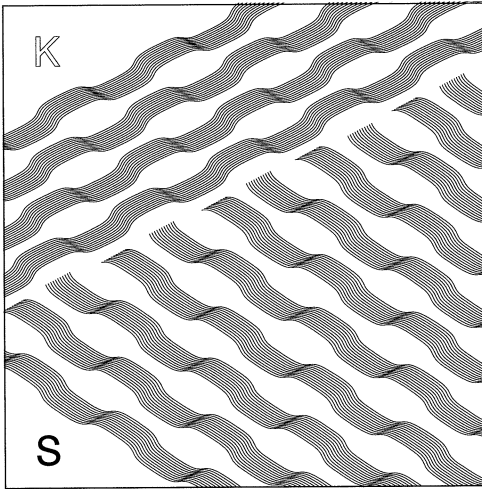


Bild 7.5: Kett- und Schußfäden des Gewebes nach Bild 7.4 gedanklich "entflochten"

Wenn die Abweichungen zwischen der wirklichen Faserstruktur und dem Modell relativ groß sind, empfiehlt es sich allerdings, eine spezielle "Kalibrierung" des Modells vorzunehmen, indem man Modellparameter an Versuchsergebnisse anpaßt, die man an einem entsprechenden Gewebelaminat ermittelt. Als Rechenmodell für die Gewebelage wird hierfür

¹Eine gewisse Fadenbündelung ist allerdings auch meistens in UD-Schichten zu beobachten, die mit UD-Prepregs oder im Wickelverfahren mit Rovings hergestellt werden.

ein $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat aus einer größeren Anzahl von UD-Schichten gewählt (nicht zwei unverbundene UD-Schichten!). Am realen Gewebelaminat müssen dann mindestens drei Belastungsversuche mit genauer Dehnungs- bzw. Schubwinkelmessung bis zum Bruch durchgeführt werden. Um störende Randeffekte auszuschalten und um eine Schubbeanspruchung gleichmäßig und störungsfrei in den Probekörper einleiten zu können, empfiehlt es sich, Zug/Druck-Torsions-Prüfungen [24] an rohrförmigen Probekörpern vorzunehmen, bei denen die Fäden in Axial- und Umfangsrichtung verlaufen (x -Richtung = Axialrichtung = Kett-richtung K, Schußrichtung S). Bei der Kalibrierung des Rechen-Modells entstehen gewisse Schwierigkeiten daraus, daß zunächst auch die für die Rechnung zu benutzenden Elastizitätsgrößen nicht genau bekannt sind. Es empfiehlt sich das folgende schrittweise Vorgehen:

1. Torsionsversuch

Aufgenommen wird dabei das (τ_{xy}, γ_{xy}) -Diagramm, das gleichzeitig das $(\tau_{\perp\parallel}, \gamma_{\perp\parallel})$ -Diagramm ist. Daraus erhält man $G_{\perp\parallel S}$. Vor allen Dingen wird das Torsionsmoment bei Beginn der Rißbildung registriert. Daraus und mit den geometrischen Abmessungen läßt sich $\tau_{xy}(Zfb) = R_{\perp\parallel}$ berechnen. Bei der weiteren Belastung über die Rißbildungsgrenze hinaus erhält man erste Anhaltspunkte für die in Betracht kommende Abminderungsfunktion $\eta(\mathcal{E}_{IFF})$. Wie im Abschnitt 2.5 ausführlich erörtert, macht es aber keinen Sinn, die Torsionsbelastung allzuweit über den Rißbildungsbeginn hinaus zu steigern, weil sich dann nur noch undefinierte und unberechenbare Zerstörungsvorgänge abspielen; eine echte Schubfestigkeit R_{KS} des Gewebelaminats gibt es nicht!

2. Zugversuch

Es wird das $(\sigma_x, \varepsilon_x)$ -Diagramm aufgenommen. Seine Auswertung gestaltet sich etwas schwieriger als beim (τ_{xy}, γ_{xy}) -Diagramm, weil die Verteilung der Last auf die Schichten nun "statisch unbestimmt" ist und deshalb mehrere Elastizitätsgrößen, nämlich $E_{\parallel}, E_{\perp S}, \nu_{\perp\parallel}$ ins Spiel kommen, und weil man weit über den Zfb-Rißbildungsbeginn hinaus bis zum Faserbruch belasten muß. Man wird für die Elastizitätsgrößen zunächst Erfahrungswerte ansetzen müssen, die man dann sukzessive mit Versuchswerten korrigiert. Aus den registrierten Lasten bei Rißbildungsbeginn (in den Schußfäden!) sowie bei Faserbruch (der Kettfäden) und dem Vergleich mit den am Modell errechneten Spannungen σ_{2S} (bei Rißbildungsbeginn) und σ_{1K} (bei Faserbruch) erhält man die beiden Modellparameter $R_{\perp}^{(+)}$ und $R_{\parallel}^{(+)}$.

3. Druckversuch

Dieser wird genau so wie der Zugversuch durchgeführt, und zwar bis zum Totalbruch. Damit wird $R_{\parallel}^{(-)}$ erhalten. Möglicherweise erhält man aus Meßwerten für Zfb des Modus C in den Schußfäden auch einen Anhaltswert für $R_{\perp}^{(-)}$. Falls vor dem Totalbruch keine Zfb des Modus C beobachtet werden, kann man solche eventuell in einem weiteren Versuch mit zusätzlicher Torsionsbelastung herbeiführen.

Wenn das zu modellierende Gewebe nicht in Kette und Schuß ganz gleich ausgeführt ist, muß man den 2. und 3. Versuch zusätzlich an Probekörpern ausführen, bei denen die Schußfäden in Axialrichtung verlaufen.

Selbstverständlich wird man, wenn bei den Versuchen gewebespezifische Schädigungsgrenzen beobachtet werden, z.B. Delamination an Fadenkreuzungspunkten, diese auch in das Rechen-Modell einbauen.

Wenn man vorwiegend oder ausschließlich mit Gewebelaminaten arbeitet, kann es sinnvoll sein, die Modelle noch weiter im Hinblick auf spezifische Gewebeeigenschaften abzuwandeln, wobei u.U. Ergebnisse strukturmechanischer Untersuchungen [23,71] genutzt werden können. Keinesfalls sollte man aber die Homogenisierung so weit treiben, daß die Schädigungs- und Bruchvorgänge nicht mehr eindeutig den Kettfäden bzw. Schußfäden zugeordnet werden können. Sonst wäre man beim Laminat-Entwurf wieder außerstande, gezielte Verbesserungen vorzunehmen.

Im übrigen besteht kein Zweifel, daß sich innerhalb eines Kett- oder Schußfadens genau die gleichen Schädigungs- und Bruchvorgänge abspielen wie in einer ausgedehnten UD-Schicht. Nur sind die geometrischen Abmessungen der zu betrachtenden UD-Bereiche sehr viel kleiner, so daß sich der "dünne Schicht"- und "in situ"-Effekt (s. Abschnitt 11.2) wahrscheinlich sehr stark bemerkbar machen wird. Vielleicht erklärt dies die bisweilen erstaunlich hohen Rißbildungsgrenzen, die mit Laminaten aus sehr feinen Glasseidengeweben erreicht werden.

7.5 "Schnelle Programme" für den Laminat-Entwurf

Wenn man beim Rohentwurf eines Laminats die netztheoretischen Regeln beachtet, kann man sicher sein, ein Laminat mit einem "vernünftigen" Fasergerüst zu erhalten. Möglichst bald sollte sich aber dann eine – eventuell noch grobe – schichtenweise Bruchanalyse mit einer Bestimmung der verschiedenen Bruch-Modi anschließen. Das frühe Entwurfsstadium stellt eine der schwierigsten aber auch wichtigsten Phasen bei der Bauteilentwicklung dar, denn oft entscheidet der Entwurf bereits über Erfolg oder Mißerfolg eines Faserverbundbauteils. Herstelltechnische Probleme und die damit eng verbundene Kostenentwicklung müssen ebenso wie die hier behandelten auch nicht gerade einfachen Festigkeitsprobleme in eine Harmonie gebracht werden. Dabei ist es eine große Hilfe für den Konstrukteur, wenn ihm für die Beurteilung der Festigkeitsfragen eine benutzerfreundliche Software zur Verfügung steht, die ihm schnell und zuverlässig die kritischen Stellen seines Laminatentwurfs aufzeigt. Für die vielen Entscheidungen, die während der Entwurfsphase getroffen werden müssen, braucht man vor allem Programme, die schnell sind, und die Auswirkung der vorgenommenen Veränderungen am Schichtaufbau deutlich erkennbar darstellen. Zu Gunsten der Schnelligkeit, Anschaulich-

keit und Dialogfähigkeit kann man in der Entwurfsphase ohne weiteres auf manche Feinheit der Spannungs- und Bruchanalyse verzichten.

So ist es z.B. durchaus denkbar, bei der Verformungsanalyse viele Rechenoperationen einzusparen, indem man nicht-lineares Rechnen, dort wo es zulässig erscheint, vermeidet. Hierzu kann man die folgenden Überlegungen anstellen.

Bei der Beurteilung der Auswirkung der Moduln $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$ auf die Rechenergebnisse treten zwei Bereiche mit ganz unterschiedlicher Sensitivität auf.

1. Die gewählten Moduln $E_{\perp S}$ und $G_{\perp S}$ haben Einfluß auf die errechneten Verformungen des Laminats. Wenn dieses netztheoretisch gut konzipiert ist, wirken sich die gewählten Moduln für σ_{\perp} - und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung aber nur geringfügig auf die errechneten Verformungen des Laminats aus, weil diese ganz überwiegend durch die faserdominierten Steifigkeiten (richtiger: Nachgiebigkeiten) bestimmt werden. Insbesondere bei netztheoretisch tragfähigen CFK-Laminaten spielt es für die Laminatverformung fast keine Rolle, ob die Nichtlinearität bei $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$ beachtet wird. Hier kann es eher von Belang sein, ob das schwach progressive $(\sigma_{\parallel}, \varepsilon_{\parallel})$ -Diagramm bei der Verformungsrechnung berücksichtigt wird.
2. Bei der Berechnung der Spannungen σ_2 und τ_{21} in den einzelnen Schichten zwecks Beurteilung ihrer Zfb-Anstrengung kommt es sehr darauf an, daß man mit den richtigen Sekantenmoduln $E_{\perp S}$ und $G_{\perp\parallel S}$ rechnet, weil man sonst zu hohe Spannungen und damit auch zu hohe Zfb-Anstrengungen \mathcal{E}_{IFF} ermittelt.

Wenn man es ausschließlich mit netztheoretisch tragfähigen CFK-Laminaten zu tun hat, wie beispielsweise in der Luftfahrtindustrie, die nur mit $(0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ)$ -CFK-Laminaten arbeitet, kann man durchaus daran denken, die gesamte Verzerrungsanalyse des Laminats linear-elastisch durchzuführen. Um hierbei die Nichtlinearität der Spannungs, Verzerrungs-Beziehungen aber zumindest näherungsweise zu berücksichtigen, empfiehlt es sich, nicht mit den Anfangsmoduln $E_{\parallel}, E_{\perp}, G_{\perp\parallel}$ zu rechnen, sondern statt dessen z.B. mit dem Mittelwert aus Anfangsmodul und Sekantenmodul beim Bruch (aus den einachsigen Versuchen).

Die zur Bruchanalyse dienende Spannungsberechnung für die einzelnen Schichten muß dann aber sehr wohl iterativ unter Benutzung der tatsächlichen nicht-linearen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen durchgeführt werden. Da die mit der Spannungshöhe veränderlichen Sekantenmoduln bei dieser "aufgespaltenen" Rechnung keine Rückwirkung auf die Laminatverformung haben, braucht man unvergleichlich viel weniger Iterationen durchzuführen als bei einem Rechenlauf gemäß dem Flußdiagramm nach Bild 7.1 auf S. 92. Weil es wegen der fehlenden "Rückkopplungen" keine Konvergenzprobleme gibt, braucht man vor allem nicht in kleinen Laststufen bis zur tatsächlich wirkenden Belastung hochzurechnen, sondern kann direkt die zur gegebenen Belastung gehörenden Laminatverformungen ausrechnen.

Man kann in der Auslegungsphase eines Bauteils sogar daran denken, zunächst auch die η -Abminderung nach eingetretener Rißbildung gar nicht vorzunehmen. Hierzu sollte man sich noch einmal bewußt machen, daß die η -Abminderung ausschließlich dazu dient, die Verformungen des Laminats nach der Überschreitung von Rißbildungsgrenzen möglichst korrekt zu berechnen. Die Überschreitungsgrade ($\mathcal{E}_{IFF} > 1$) der Rißbildungsgrenzen der einzelnen Schichten werden hingegen mit Moduln berechnet, die nicht mit η abgemindert sind! Eine η -Abminderung würde die \mathcal{E}_{IFF} -Werte folglich nur mittelbar beeinflussen, und zwar dadurch, daß mit dieser die Laminatverzerrungen ein wenig größer ausfallen würden als ohne sie. Die Unterschiede zwischen Rechnungen mit und ohne η -Abminderungen sind natürlich dann besonders klein, wenn die Kräfte zum weit überwiegenden Teil von den Fasern aufgenommen werden. Bei CFK ($E_{\parallel}/E_{\perp} \approx 15$ bis $30 : 1$) ist dies noch viel ausgeprägter der Fall als bei GFK ($E_{\parallel}/E_{\perp} \approx 3 : 1$).

Weil man mit gesonderten Bruchbedingungen für Zfb und Fb arbeitet, kann man sich gleichzeitig einen Überblick über die Zfb-Anstrengungen und Fb-Anstrengungen aller Schichten verschaffen, ohne irgend eine Abminderung zwischenschalten zu müssen. Aus einem solchen Überblick erkennt man dann meistens sehr schnell, an welchen Stellen eine verfeinerte Rechnung vonnöten ist.

Wenn man mit der Genauigkeit dieses ersten Überblicks nicht zufrieden ist, kann man in einem zweiten Schritt die Moduln derjenigen Schichten, in denen ein hoher Wert $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ beim Modus A errechnet wurde, einmal drastisch abmindern, indem man z.B. $\eta = \eta_r$ setzt, s. Gl. (6.3) auf S. 86.

Anhand der mit den Methoden dieses Buches erhaltenen Informationen über \mathcal{E}_{IFF} und \mathcal{E}_{FF} mit der zugehörigen Angabe über den Bruch-Modus ist es relativ einfach, Verbesserungen am Laminatentwurf vorzunehmen. Wenn man an den Faserrichtungen nichts ändern will oder kann, läßt sich ein zu hoher \mathcal{E}_{FF} -Wert dadurch herabsetzen, daß man die Fasermenge der betroffenen Schicht oder Schichten erhöht. Bei einem zu hohen \mathcal{E}_{IFF} -Wert ist dies jedoch ganz unwirksam. In diesem Fall muß man zusätzliche Fasern unter etwa 90° oder etwa $\pm 45^\circ$ zur Faserrichtung der betroffenen Schicht anordnen, je nachdem, ob sich die Herabsetzung von σ_2 oder von τ_{21} der betroffenen Schicht als wirksamer erweist. Es muß aber auch der erforderliche Faseraufwand betrachtet werden, der zur Herabsetzung der einen oder anderen Spannung erforderlich ist, denn das Laminat als Ganzes soll ja "optimal" werden.

Diese wenigen Bemerkungen haben schon aufgezeigt, daß eine echte Laminat-Optimierung ein sehr schwieriges Unterfangen ist. Will man dieses "von Hand" bewältigen, gehört neben exzellenten Rechenwerkzeugen langjährige Erfahrung dazu. Deshalb wird zunehmend versucht, mit "automatischer Optimierung" zu arbeiten. Manche der heute verfügbaren Optimierungsprogramme kranken aber noch daran, daß sie mit unzulänglichen Bruchanalysen ausgestattet sind.

Zurückkommend auf die Frage des Verzichts auf die η -Abminderung sei noch folgendes erwähnt: Beim Arbeiten mit der von *Tsai* [5] empfohlenen Last Ply Failure (LPF)-Methode ist ein Verzicht auf Abminderung der Quersteifigkeiten nach dem First Ply Failure (FPF), wie er für die Berechnung in der Entwurfsphase ratsam erscheint, gar nicht denkbar. Hier **müssen** die Quersteifigkeiten **aller Schichten** degradiert werden, damit die Zfb und Fb nicht unterscheidende "Einheits"-Bruchbedingung nach dem ersten Schichtbruch nur noch annähernd wie eine Fb-Bedingung reagiert. Das wird dadurch erreicht, daß bei der Spannungsanalyse alle Zfb-relevanten Spannungen durch eine sehr starke Degradation, die der Netztheorie nahekommt, unterdrückt werden. *Tsai* schreibt deshalb in [5] eine rigorose Abminderung von $E_{\perp}, G_{\perp\parallel}, \nu_{\perp\parallel}$ in allen Schichten – auch den druckbeanspruchten – vor, nachdem der FPF eingetreten ist. Diese Vorgehensweise birgt die Gefahr in sich, daß katastrophale Brüche des Modus C vollkommen übersehen werden!

Teil III

Neue Wege zu realistischen Zwischenfaserbruch-Bedingungen für räumliche Beanspruchung

8 Grundlagen einer neuen Zwischenfaserbruch-Analyse

8.1 Wesen und Vorgeschichte der neuen Bruchanalyse

8.1.1 Spröbruch und Mohrsche Festigkeitshypothese

Die hier vorgestellte Forschungsarbeit soll keineswegs die Flut der existierenden Bruchbedingungen weiter vermehren. Sie verfolgt im Gegenteil das Ziel, die Zahl der in Betracht kommenden Bruchbedingungen auf einige wenige, dafür aber physikalisch begründete, zu begrenzen. Dazu ist eine unkonventionelle Betrachtungsweise nötig, die zu einer neuartigen Bruchanalyse-Methode führt. Diese unterscheidet sich grundsätzlich von dem bisher üblichen Vorgehen. Voraussetzung für die Anwendbarkeit der neuen Methode ist, daß in der UD-Schicht klar erkennbare Bruchebenen auftreten. Bei den in der Leichtbautechnik vorherrschenden Faserverbundwerkstoffen mit Polymer-Matrix und hohen Faservolumenanteilen ist dies in der Regel der Fall. Die schon bestehende Sprödeheit des Matrixmaterials wird noch durch die Fehlstellen verstärkt, die zwangsläufig durch das Einfügen der Fasern entstehen. Deshalb ist es denkbar, daß selbst ein "von Hause aus" duktiles Matrixmaterial, wie bestimmte Thermoplaste, sich im Faser-Matrix-Verbund, makromechanisch gesehen, spröde verhält. Viele Faser-Matrix-Verbunde brechen sowohl bei Fb als auch bei Zfb spröde, d.h., ohne äußerlich feststellbare plastische Verformungen treten Werkstofftrennungen auf bestimmten Ebenen ein. Bei Fb sind die "Bruchebenen" allerdings häufig sehr zerklüftet; demgegenüber führt Zfb, der hier betrachtet werden soll, zu relativ glatten Bruchebenen. Inwieweit sich die neue Betrachtungsweise für UD-Verbunde aus verschiedensten Materialien eignet, muß unter dem Gesichtspunkt des Spröbruches von Fall zu Fall geprüft werden.

Der Spröbruch-Charakter der für normale technische Anwendungen vor allem in Betracht kommenden Faser-Kunststoff-Verbunde legte es nahe, sich beim Aufstellen von Bruchbedingungen nicht – wie in der Vergangenheit vielfach geschehen – an die Fließkriterien für duktile Werkstoffe, sondern eher an die für Stoffe mit Spröbruch-Charakter aufgestellten Festigkeitshypothesen von *Coulomb* [72] und *Mohr* [54] anzulehnen.

Der neuen Methode liegt eine makromechanische oder eher als "halb-makromechanisch" zu bezeichnende Betrachtungsweise zugrunde. D.h., zur Beschreibung des Bruchzustands werden – wie in der Ingenieurpraxis allgemein üblich – über Faser- und Matrixquerschnitte gemittelte Beanspruchungen $\sigma_{\perp}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$ der UD-Schicht und die zugehörigen "Festigkeiten" $R_{\perp}^A, R_{\perp\perp}^A, R_{\perp\parallel}^A$ benutzt; es werden aber vermehrt mikromechanische Vorstellungen berücksichtigt. Der Index A bei den "Festigkeiten" weist bereits darauf hin, daß es sich hier nicht um die gewöhnlichen Festigkeiten handelt, sondern um Widerstände gegenüber einem Bruch in der Wirkebene (Action plane, A), in der die betreffende Beanspruchung wirkt. Dies wird im Abschnitt 8.3 erläutert.

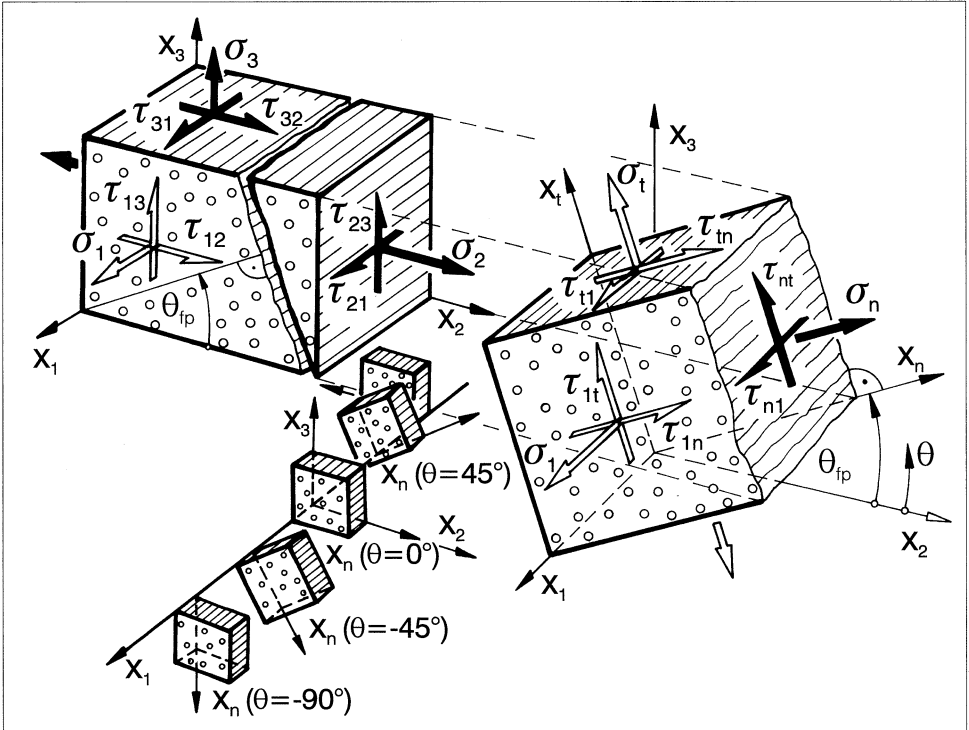


Bild 8.1: Bei der neuen Zfb-Bruchanalyse wird ein um die faserparallele x_1 -Achse drehbares (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem benutzt. Gezeigt sind einige spezielle Stellungen des (x_n, x_t) -Achsenkreuzes sowie die auf das (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem und das (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem bezogenen Spannungen bei einem allgemeinen räumlichen Spannungszustand eines UD-Verbunds. Das (x_n, x_t) -Achsenkreuz ist um den Bruchwinkel θ_{fp} so gedreht worden, daß x_n senkrecht zur Bruchebene steht. Auf dieser wirken die Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$.

Während in allen bisherigen 3D-Bruchkriterien die auf das **feste** (x_1, x_2, x_3) -Schichtkoordinatensystem bezogenen Spannungen erscheinen, wie sie sich direkt aus der schichtenweise Spannungsanalyse ergeben, erfordert die Mohrsche Hypothese, daß die neuen 3D-Bruchbedingungen mit Hilfe einer Funktion der **drei auf der Bruchebene wirkenden Spannungen** $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ ausgedrückt werden. Es wird mit einem um die Faserrichtung x_1 **drehbaren** (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem gearbeitet, dessen Stellung vom örtlichen Spannungszustand abhängt, **Bild 8.1**. Durch eine besondere Rechenoperation wird das (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem so gedreht, daß die x_n -Richtung zur Flächennormalen der zu erwartenden Bruchebene wird. Der Grund für die Wahl des drehbaren Koordinatensystems ist der, daß sich gemäß der Mohrschen Hypothese nur für die Bruchebene, die je nach Spannungszustand eine andere Lage einnimmt, physikalisch begründete Bruchbedingungen aufstellen lassen.

Die Festigkeitshypothese, die *Mohr* [54] am Anfang dieses Jahrhunderts für isotrope Stoffe aufstellte, lautet:

Die Bruchgrenze (und die Fließgrenze)¹ eines Materials wird durch die Spannungen der Bruchebene (und der Gleitebene) bestimmt.

Nur beim ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand kann man die Lage der Bruchebene manchmal auf einfache Weise den für den Bruch verantwortlichen Spannungen zuordnen. Bei einem allgemeinen räumlichen Spannungszustand läßt sich grundsätzlich nur noch aussagen, daß σ_1 (und theoretisch gemäß der Mohrschen Hypothese auch noch τ_{12} und τ_{13}) die Ursache für Fb auf einer zur x_1 -Richtung senkrechten Ebene sind, und daß die Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ bei der Erzeugung des Zfb mehr oder weniger zusammenwirken, Bild 1.1 auf S. 4. Über die Lage der Bruchebene beim Zfb weiß man a priori nur, daß der Bruch auf irgendeiner faserparallelen Schnittebene erfolgen wird [1,2]. Die Flächennormale der Bruchebene (fracture plane, fp) bei Zfb wird im allgemeinen – je nach der auftretenden Spannung oder Spannungscombination – um einen Winkel θ_{fp} gegenüber der Schichtebene, d.h. gegenüber der x_2 -Richtung, geneigt sein, wobei θ_{fp} zwischen -90° und $+90^\circ$ variieren kann. Das Aufsuchen der Bruchebene innerhalb einer Winkelspanne von 180° spielt bei der neuen Bruchanalyse-Methode eine wesentliche Rolle.

8.1.2 Hashin's Idee zum neuen Verfahren

Ein entscheidender Impuls für die neuartige Bruchanalyse ging von *Hashin* aus, der in einer 1980 erschienenen Arbeit [3] erstmals den Gedanken äußerte, daß die sinnngemäße Übertragung der Mohrschen Festigkeitshypothese auf UD-Verbunde eine solide physikalische Basis

¹ *Mohr* benutzte den Ausdruck "Elastizitätsgrenze". Hier interessiert nur das Bruchverhalten, nicht jedoch das Fließverhalten.

für UD-Bruchbedingungen darstellen könne. Er regte an, die teilweise schon bei der 2D-Beanspruchung praktizierte Zuordnung von Bruchebene und bruchrelevanten Spannungen [1,2] durch die Anwendung der Mohrschen Festigkeitshypothese auf UD-Verbunde bei 3D-Beanspruchung auszudehnen. *Hashin* formulierte die auf UD-Verbunde sowohl für Fb als auch für Zfb anzuwendende Bruchhypothese für Sprödbbruchverhalten folgendermaßen:

Wenn eine Versagensebene² identifiziert werden kann, wird das Versagen von der Normalspannung und den Schubspannungen auf der betreffenden Ebene bewirkt.

Für die rechnerische Behandlung des Zfb wird unter dieser Voraussetzung das schon erwähnte drehbare Koordinatensystem nötig, das in die jeweils zu erwartende faserparallele Bruchebene gedreht werden kann. *Hashin* führte hierzu das auf eine faserparallele Schnittebene bezogene (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem ein, das zum Aufsuchen der Bruchebene mit einem Winkel θ zwischen -90° und $+90^\circ$ um die x_1 -Achse gedreht wird, Bild 8.1.

Bei der Spannungsanalyse von Laminaten erhält man zunächst die auf das (x_1, x_2, x_3) -Schichtkoordinatensystem bezogenen "Schichtspannungen" $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$. Der Spannungszustandsvektor transformiert sich gemäß der Transformationsformel (wenn θ von der x_2 -Achse aus gemessen wird) folgendermaßen in das (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem:³

$$\begin{aligned} &\rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \tau_{t1} \\ \tau_{n1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & 2sc & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & -2sc & 0 & 0 \\ 0 & -sc & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & \textcircled{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}. \quad (8.1) \\ & \quad (c = \cos \theta, s = \sin \theta) \end{aligned}$$

Sowohl die soeben zitierte, von *Hashin* formulierte Bruchhypothese als auch eine im Abschnitt 8.2.2 aufgestellte erweiterte Zfb-Hypothese basieren auf der Vorstellung, daß der Zfb ausschließlich durch die auf der faserparallelen Bruchebene wirkenden (bei der Transformationsformel mit einem Pfeil markierten) Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ verursacht wird,

²In der vorliegenden Arbeit werden abweichend von *Hashin's* Nomenklatur die Bezeichnungen **Bruch** und **Bruchebene** benutzt, weil vorausgesetzt wird, daß das Versagen (failure) in Form einer Werkstofftrennung (fracture) auftritt.

³Häufig erweist es sich als zweckmäßig, die Transformationsformel mit den folgenden Additionstheoremen umzuschreiben (z.B. zwecks Benutzung des Mohrschen Spannungskreises):

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta.$$

während die gleichzeitig auf den beiden zur Bruchebene senkrechten Schnittebenen auftretenden Spannungen $\sigma_1, \sigma_t, \tau_{t1}$ das Bruchgeschehen nicht beeinflussen. Die auf der Bruchebene wirkende Normalspannung σ_n stellt eine Querbeanspruchung (σ_\perp), τ_{nt} eine Quer/Quer-Schubbeanspruchung ($\tau_{\perp\perp}$) und τ_{n1} eine Quer/Längs-Schubbeanspruchung ($\tau_{\perp\parallel}$) dar.

Die Bruchbedingung erhält unter dieser Voraussetzung die allgemeine Form

$$F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1, \quad (8.2)$$

oder in den $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, \theta)$ -Raum transformiert:

$$\tilde{F}(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, \theta_{fp}) = 1. \quad (8.3)$$

Ungewöhnlich ist, daß sich die Bruchbedingungen der neuen Art zunächst als Bruchflächen im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum darstellen. Zur Konstruktion der entsprechenden Bruchflächen im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungsraum, s. Bilder 9.16 und 9.17 auf S. 167, müssen die Bruchwinkel θ_{fp} bekannt sein. Zur besseren Unterscheidung der Bruchflächen bezeichnen wir die durch die Bruchbedingung im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum beschriebene Bruchfläche als **Master-Bruchfläche**, denn sie beherrscht als übergeordnete dreidimensionale Gesetzmäßigkeit das Bruchgeschehen aller Spannungszustände im fünfdimensionalen Spannungsraum.

Die Hauptschwierigkeit bei der Anwendung von Bruchbedingungen, die auf der Mohrschen Festigkeitshypothese beruhen, besteht darin, daß zur Bestimmung der zum Bruch führenden Spannungen zunächst der Bruchwinkel θ_{fp} durch die Lösung eines Extremwertproblems ermittelt werden muß. Und zwar muß der Höchstwert der vom Winkel θ abhängigen "Bruchgefahr" gesucht werden. Dies dürfte der Grund dafür sein, weshalb Hashin seine Idee nicht umgesetzt hat und offenbar seine Anregung auch bis 1992 [11] nirgends aufgegriffen wurde. Hashin selbst hat nur für den Spezialfall einer in den Spannungen homogenen⁴ Funktion $F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ für den Bereich $\sigma_n \geq 0$ angegeben, wie sich der Bruchwinkel θ_{fp} bestimmen läßt. Bei einem festen Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ nimmt nämlich in diesem Fall die linke Seite der Gl. (8.3) für den bei proportionaler Erhöhung der Spannungen eintretenden Bruch unter dem Winkel θ_{fp} ihren Maximalwert an.

Im Abschnitt 8.4.4 wird gezeigt, wie prinzipiell bei einem beliebigen Ansatz der neuen Art der Bruchwinkel gefunden wird. Eine analytische Lösung wird nur in Sonderfällen möglich sein. Beim allgemeinen räumlichen Spannungszustand wird man auf numerische Methoden zurückgreifen müssen, was aber angesichts der heute zur Verfügung stehenden Rechenkapazität kein Hindernis mehr darstellt.

⁴Eine Bruchfunktion ist bezüglich der Spannungen homogen vom Grad r , wenn sich bei Erhöhung aller Spannungen mit einem Faktor λ aus der Bruchfunktion der Faktor λ^r ausklammern läßt.

8.2 Physikalische Grundlagen

8.2.1 Bruchmechanischer Hintergrund

Von Festigkeitsprüfungen an UD-Verbundstoffen mit Polymer-Matrix in Verbindung mit Untersuchungen der Mikrostruktur des Verbundstoffs ist seit langem bekannt, daß die Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$ und die Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ ungekerbter Proben stark vom Vorhandensein sowie der Größe und Form innerer Defekte wie Poren, Härtungsrissen und unverbundenen Bereichen an der Faser/Matrix-Grenzfläche abhängen. Ebenso wie spröde homogene Stoffe zeigen UD-Verbundstoffe, wenn sie einen künstlich angebrachten, parallel zu den Fasern verlaufenden Riß enthalten, im wesentlichen ein Bruchverhalten, das sich mit der linear-elastischen Bruchmechanik beschreiben läßt [73,74]. Von dort her gesehen erscheint es ratsam, sich vor der Aufstellung von Bruchbedingungen für Zfb ihren bruchmechanischen Hintergrund zu vergegenwärtigen. Hierzu kann vor allem ein Beitrag von *Hahn*, *Erikson* und *Tsai* [75] aus dem Jahre 1982 dienen, der eine wichtige Ergänzung zu den 1980 von *Hashin* [3] angestellten Überlegungen darstellt.

Bei der bruchmechanischen Betrachtungsweise geht man von der Vorstellung aus, daß ein innerer Defekt der Ausgangspunkt für einen Riß ist, beispielsweise für einen Zfb, der eine UD-Schicht unter einem bestimmten Winkel durchläuft. Die Entstehung neuer Oberflächen während der Rißbildung und vor allem die dabei auftretenden plastischen Deformationen erfordern Energie, die aus der bei der Rißbildung freigesetzten "Dehnungsenergie" gewonnen wird. Deshalb spielt bei bruchmechanischen Betrachtungen die "Dehnungsenergie-Freisetzungsrates" eine wichtige Rolle. In [75] wurde gezeigt, daß sich mit Hilfe eines Ansatzes auf der Basis der Dehnungsenergie-Freisetzungsrates ein Zf-Bruchkriterium für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung gewinnen läßt, das ein quadratisches Polynom der Spannungen σ_2 und τ_{21} ist. Auch kann man aus einem solchen Ansatz zu einer Aussage über den sich einstellenden Bruchwinkel gelangen; z.B. ergibt er sich ohne Berücksichtigung von "innerer Reibung" (Reibkräfte auf den Rißflächen) bei einachsiger Quer-Druckbeanspruchung zu $\pm 45^\circ$. Wenn die rißauslösenden inneren Defekte als für den Werkstoff typische Risse betrachtet werden, kann die "ungekerbte" Festigkeit mit Hilfe der Bruchzähigkeit und der Größe des Defekts vorhergesagt werden. Vorausgesetzt, daß diese Vorstellungen zutreffend sind, ergibt sich eine Korrelation zwischen den Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}$ und $R_{\perp\parallel}$.

Wenn für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung eine Bruchbedingung (Gl. (4.6) auf S. 47)

$$F_2\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{21}^2 = 1 \quad (8.4)$$

aufgestellt wurde, so kann diese mit den nominellen Spannungsintensitätsfaktoren K'_2 und K'_6 in folgende Form umgeschrieben werden:

$$A_2K'_2 + A_{22}K'^2_2 + A_{66}K'^2_6 = 1 \quad (8.5)$$

mit

$$K'_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{a_0}} \quad \text{und} \quad K'_6 = \frac{\tau_{21}}{\sqrt{a_0}}.$$

Hierin ist a_0 die halbe Länge eines im Verbund vorhandenen faserparallelen Risses, von dem angenommen wird, daß von ihm der Zfb ausgeht, **Bild 8.2**.

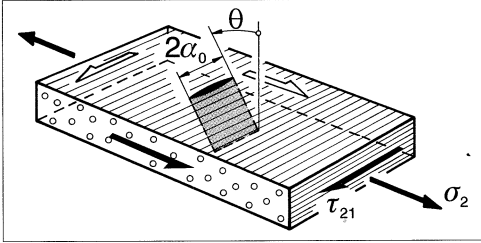


Bild 8.2: Um den Winkel θ geneigter Riß (Fehlstelle) der Länge $2a_0$ in einem UD-Verbund bei kombinierter Beanspruchung durch σ_2 und τ_{21}

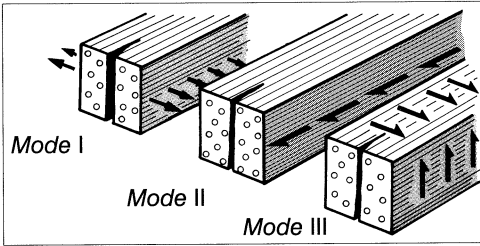


Bild 8.3: Rißöffnungs-Modi I, II, III der Bruchmechanik. Bei Mode I und II behält der Riß bei seiner Ausbreitung seine ursprüngliche Lage. Bei der Beanspruchung nach Mode III würde, wenn kein Ausgangsriß bestünde, der erste Anriß unter 45° zur Richtung der Schubspannung entstehen. Der sich ausbreitende Riß müßte sich eigentlich aus der Ausgangslage allmählich in die 45° -Lage drehen!

Wenn $\sigma_2 > 0$ und $\theta = 0^\circ$ ist, werden K'_2 und K'_6 zu den für Mode I bzw. Mode II, **Bild 8.3**, geltenden Spannungsintensitätsfaktoren K_I bzw. K_{II} . Folglich kann Gl. (8.5) im ersten Quadranten auch als eine sogenannte Mixed Mode-Bruchzähigkeitskurve für ebene (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung aufgefaßt werden.

Aus den gemessenen Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}$ und R_{\parallel} läßt sich mit Hilfe bekannter Bruchzähigkeits-Werte K_{Ic} (Mode I) und K_{IIc} (Mode II) die Größe a_0 des inneren Defekts errechnen. Hieraus ergibt sich die Korrelation zwischen $R_{\perp}^{(+)}$ und R_{\parallel} . (Wenn $\sigma_2 < 0$ ist, besteht keine Tendenz zur Rißöffnung; in diesem Fall ist $K_I = 0$.)

Das Studium der Arbeit [75] zeigt, daß die bruchmechanische Betrachtungsweise für die Weiterentwicklung der Bruchbedingungen der neuen Art hilfreiche Hinweise geben kann. Wegen experimenteller und theoretischer Unzulänglichkeiten erzielten die Autoren mit der "gemischten" Betrachtungsweise aber noch keine befriedigenden Ergebnisse. Sie beklagen, daß die Hauptschwierigkeit bei der Aufstellung von Beziehungen zwischen Festigkeiten und Bruchzähigkeiten im Mangel an geeigneten Bruchbedingungen begründet sei.

Im Grunde genommen erscheint es rückblickend recht verwunderlich, daß die durch die Arbeiten von *Hashin* [3] und *Hahn et al.* [75] gegebenen Anregungen nicht früher zu einer intensiven Neubearbeitung des "Problemkreises Bruchkriterien" geführt haben. Vermutlich erklärt sich dies vor allem daraus, daß Bruchversuche mit kombiniert wirkenden Spannungen außerordentlich schwierig durchzuführen sind, so daß die Unzulänglichkeiten der meisten existierenden Bruchbedingungen bislang nicht offenbar geworden sind. Für die hier zu entwickelnden Ansätze zu Zfb-Bedingungen lassen sich aus [75] folgende Schlüsse ziehen:

- Wegen des bruchmechanischen Hintergrunds ist bei den Zfb-Festigkeiten ein merklicher Größen-Einfluß zu erwarten, s. hierzu auch [24].
- Die der Arbeit von *Hashin* [3] zugrundeliegende Vorstellung vom Zusammenwirken der Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ bei der Zfb-Erzeugung korrespondiert weitgehend mit der bruchmechanischen Vorstellung von Mixed Mode-Bruchvorgängen aus Mode I, Mode III und Mode II nach Bild 8.3.
- Es besteht eine gewisse Gleichwertigkeit der bruchmechanischen Formulierungen und der "klassischen" Ansätze der Bruchbedingungen mit Spannungen und Festigkeiten. Von dort her gesehen gibt es somit keine schwerwiegenden Bedenken dagegen, die in der Ingenieurpraxis geläufige "klassische" Form der Bruchbedingungen beizubehalten.
- Wegen des Zusammenhangs mit der Dehnungsenergie-Freisetzungsrates ist zu erwarten, daß bei den Zfb-Bedingungen eine befriedigende Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen am ehesten mit Ansätzen in Form von Polynomen erreicht werden kann, in denen die Spannungen in der 2. Ordnung auftreten.
- Auch für die Beantwortung noch offener Fragen der Statistik, die sich im Zusammenhang mit der Anwendung von Bruchkriterien stellen, worauf *Hashin* in [3] hingewiesen hat, können die bruchmechanischen Modelle hilfreich sein [75].

8.2.2 Erweiterte Bruchhypothese

Hashin hat in [3] darauf aufmerksam gemacht, daß für den Fall einer auf der Bruchebene wirkenden Druckspannung $\sigma_n < 0$ ein anderer Ansatz nötig sei als für den Fall der Zugspannung $\sigma_n \geq 0$, für den er exemplarisch einen einfachen Ansatz angegeben hatte. Deshalb erschien es vordringlich, einen physikalisch plausiblen Ansatz für $\sigma_n < 0$ zu entwickeln. Dazu sind bereits in [11] einige Überlegungen angestellt worden, die hier vertieft werden.

Zu diesem Zweck wird zunächst ein UD-Verbund betrachtet, von dem man sich modellhaft vorstellt, daß er aus homogener, transversal-isotroper Materie (mit Rotationssymmetrie bezüglich der x_1 -Achse) besteht. Er sei mit einer einachsigen Quer-Druckspannung, z.B. mit

$\sigma_2 < 0$ beansprucht, alle anderen Spannungen seien "null". In Schnittebenen, in denen σ_2 wirkt, besteht gewiß keine Tendenz zu einem Bruch, denn es ist kein Grund ersichtlich, warum sich beidseitig an eine Wirkebene von σ_2 angrenzende Werkstoffpartien voneinander trennen sollten. Im Gegenteil, die Druckspannung σ_2 nähert die ihrer Wirkebene benachbarten Werkstoffpartien einander an, so daß man stattdessen eher eine mit dieser "Verdichtung" einhergehende Festigkeitserhöhung erwarten könnte.

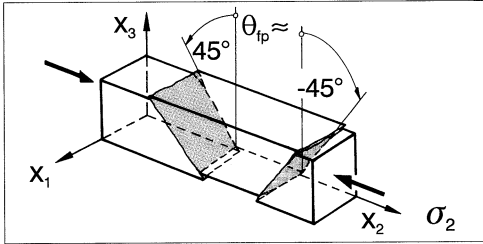


Bild 8.4: "Schräge" Brüche eines sich spröde verhaltenden Stoffes unter einachsiger Druckbeanspruchung σ_2

Aus Versuchen an quader- oder zylinderförmigen Probekörpern aus Stoffen, die sich spröde verhalten, ist bekannt, daß der Bruch nie in einer Schnittebene auftritt, in der die "äußere" Druckspannung σ_2 wirkt. Stattdessen entsteht ein Bruch auf "schrägen" Schnittebenen, die – grob gesprochen – um etwa $+45^\circ$ oder -45° gegen die Richtung der "äußeren" Druckspannung geneigt sind, **Bild 8.4**. (Später wird gezeigt, daß der Winkelbetrag meistens etwas größer als 45° ist). Auf diesen Schnittebenen tritt die maximale Schubspannung ($\mp \frac{1}{2} \sigma_2 \sin 2\theta_{fp}$) auf, vgl. (8.1) auf S. 108. Sie ist dem Betrage nach halb so hoch wie die "äußere" Druckspannung. Man muß hieraus schließen, daß ein sogenannter "Druckbruch" in Wirklichkeit ein durch Schub verursachter Bruch ist.

Auf den um $\pm 45^\circ$ geneigten Bruchebenen wirkt nach (8.1) zusätzlich zur maximalen Schubspannung eine "innere" Druckspannung ($\sigma_2 \cos^2 \theta_{fp}$), die – ebenso wie die maximale Schubspannung – halb so hoch ist, wie die "äußere" Druckspannung σ_2 . Diese auf der Bruchebene wirkende Druckspannung wird in Anbetracht der Vorstellung von einer Verdichtung des Werkstoffs sicher nicht den Bruch mitverursachen; wenn sie überhaupt Einfluß auf das Bruchgeschehen nimmt, behindert sie eher die Ausbildung des Schubbruchs durch einen reibungsähnlichen Widerstand. Darauf, daß ein solcher den Bruch behindernder Einfluß der Druckspannung vorhanden ist, deutet hin, daß Bruchwinkel gemessen werden, z.B. bei Grauguß [76], die etwas größer als 45° sind. Dies erklärt sich aus **Bild 8.5**.

Es gibt ein Indiz dafür, daß eine solche Behinderung des Schubbruchs durch eine gleichzeitig mit der Schubspannung auf der Bruchebene wirkende Druckspannung auch bei UD-FKV auftritt. Und zwar ist dies die bekannte Tatsache, daß bei der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve im Bereich kleiner Druckspannungen $\sigma_2 < 0$ die ertragbare Schubspannung τ_{21} zunächst mit zunehmender Druckspannung ansteigt, und zwar bis zu Werten, die 10 bis 30 % über der

Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$ bei reiner τ_{21} -Beanspruchung liegen können. Erst wenn die Druckspannung σ_2 dem Betrage nach größer wird als etwa die halbe Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$, fällt die ertragbare Schubspannung τ_{21} wieder ab, s. Bild 5.2 auf S. 64. Aufgrund von Berechnungen für den Bruchwinkel θ_{fp} mit Hilfe des später beschriebenen Modells gelangt man zu dem Ergebnis, daß im Bereich der Bruchkurve, in der τ_{21} mit $|\sigma_2|$ ansteigt, der Bruchwinkel $\theta_{fp} = 0^\circ$ ist, d.h., daß der Bruch auf der Schnittebene eintritt, auf der τ_{21} und σ_2 gemeinsam wirken. Wenn dies zutrifft, läßt sich der Anstieg der ertragbaren Schubspannung τ_{21} mit einer Behinderung des Schubbruchs durch "innere Reibung" infolge $\sigma_2 < 0$ deuten.

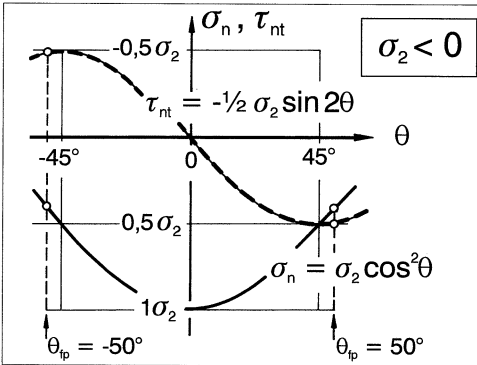


Bild 8.5: Spannungen auf einem schrägen Schnitt unter dem Winkel θ bei einachsiger Druckbeanspruchung σ_2 . Bei $\theta = \pm 45^\circ$ sind σ_n und τ_{nt} dem Betrage nach gleich groß. Vergrößert sich der Winkelbetrag auf $|\theta_{fp}| > 45^\circ$, so nimmt die bruchwirksame Schubspannung τ_{nt} nur wenig ab, die bruchbehindernde Druckspannung $|\sigma_n|$ aber sehr stark. Deshalb stellt sich ein Bruchwinkel $|\theta_{fp}| > 45^\circ$ ein.

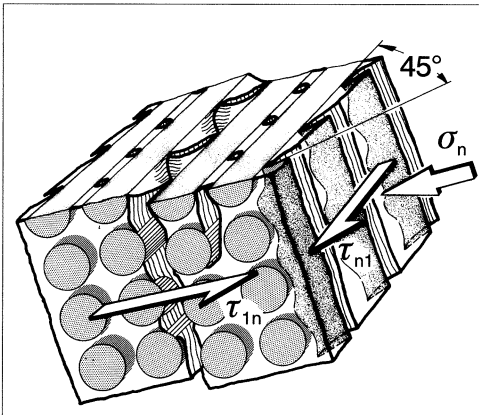


Bild 8.6: Mikromechanisch betrachtetes Bruchgeschehen bei kombinierter $\tau_{\perp\parallel}$ - und $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung (Grafik: K. Strube)

Mikromechanische Betrachtungen erhärten die Vorstellung, daß Druckspannung $\sigma_n < 0$ den Schubbruch infolge τ_{n1} erschwert. Bei fester Haftung zwischen Faser und Matrix spielt sich das Mikro-Bruchgeschehen bei $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung vorwiegend in der Matrix ab. In einer spröden Matrix treten die ersten Mikrorisse infolge der Haupt-Zugspannung unter etwa 45° zur Faserrichtung auf, **Bild 8.6**. Die für die Entstehung dieser ersten Mikrorisse

verantwortliche Haupt-Zugspannung in der Matrix wird durch eine quer zu den Fasern wirkende Druckspannung herabgesetzt.⁵ Die Mikrorisse werden, sobald sie auf die hochfesten Fasern treffen, gestoppt. Mehrere Mikrorisse können sich zu kammartigen Teilbrüchen vereinigen. Diese werden durch eine zusammen mit τ_{n1} wirkende σ_n -Druckspannung ineinander gedrückt, so daß auch diese gebrochenen Bereiche noch Schubkraft übertragen.

Ferner kann man sich vorstellen, daß an Fehlstellen wie Lufteinschlüssen und unverbundenen Stellen der Faser/Matrix-Grenzfläche auftretende lokale Zugspannungsspitzen durch die überlagerte Druckspannung gemildert werden, so daß der bruchfördernde Einfluß dieser Fehlstellen verringert wird.

Die Wirkung all dieser mikromechanischen Effekte kann man makromechanisch als eine Art "inneren Reibungswiderstand" beschreiben, der mit steigender Druckspannung zunimmt und sich zum ursprünglichen, d.h. dem bei reiner Schubbeanspruchung wirksamen, Schubbruchwiderstand der Wirkebene addiert. Damit gelangt man zu der folgenden präzisierten und erweiterten Bruchhypothese:

1. Wenn unter der Wirkung einer Quer-Zugspannung ($\sigma_n \geq 0$) eine faserparallele Bruchebene auftritt, so wird der Bruch gemeinsam von der auf der Bruchebene (im Augenblick des Bruches) wirkenden Quer-Zugspannung σ_n und den dort gleichzeitig wirkenden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} verursacht.
2. Eine auf einer Bruchebene wirkende Quer-Druckspannung ($\sigma_n < 0$) trägt nicht zur Erzeugung des Bruches bei, sondern erschwert den durch die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} verursachten Schubbruch, indem sie einen mit steigender Druckspannung $|\sigma_n|$ anwachsenden zusätzlichen Widerstand der Spannungs-Wirkebene gegen Schubbruch hervorruft.
3. Bei ebener Beanspruchung in der transversal-isotropen Ebene tritt der Bruch entweder als ein durch Druckspannung σ_n behinderter Schubbruch infolge τ_{nt} oder als reiner Zugbruch infolge von σ_n als größter Haupt-Zugspannung ein, je nachdem, welche Bruchmöglichkeit zuerst erreicht wird.

Die dritte Aussage beruht auf der Erkenntnis, daß die *Coulomb, Mohr*-Bruchhypothese für isotrope Stoffe, die sich "wahrhaft" spröde (intrinsically brittle) verhalten, das Bruchgeschehen bei reiner Schubbeanspruchung nicht richtig beschreibt [76]. Diese Stoffe brechen nämlich bei reinem Schub unter der Wirkung der maximalen Haupt-Normalspannung, d.h.

⁵Schon dieser Effekt allein könnte den Anstieg der ertragbaren Schubspannung τ_{21} mit steigender Druckspannung $|\sigma_2|$ erklären.

unter $+45^\circ$ zur Richtung der Schubspannung. Der 3. Satz der erweiterten Bruchhypothese stellt eine auf die Situation am UD-Verbund umgeschriebene Fassung der von *Paul* [76] 1961 publizierten Modifikation der *Coulomb, Mohr*-Bruchhypothese dar.

Die dreiteilige Bruchhypothese ist die Basis der später aufgestellten Bruchbedingungen.

Es ist zu hoffen, daß wegen der Verwandtschaft zwischen den bruchrelevanten Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ und den bruchmechanischen Modi I, III, II erstmalig ein Brückenschlag zwischen den "klassischen" Ingenieur-Bruchbedingungen und den bruchmechanischen Ansätzen [74,75] gelingt.

8.3 Die neuen "Festigkeits"-Parameter

8.3.1 Grundsätzliche Überlegungen

Die Anwendung der Mohrschen Festigkeitshypothese erfordert nicht nur das "Umsteigen" vom Schicht-Koordinatensystem in das bewegliche, wirkebenebezogene Koordinatensystem, sondern auch ein Umdenken bei den "Festigkeits"-Parametern, mit denen die Bruchbedingungen an den jeweiligen Werkstoff angepaßt werden müssen. Weil dies offenbar – wie die Erfahrung lehrt – gewisse Schwierigkeiten bereitet, soll bereits an dieser Stelle, noch bevor konkrete Ansätze für Bruchbedingungen gemacht werden, eine prinzipielle Klärung erfolgen.

Generell gilt, daß sowohl das reale Bruchverhalten eines Werkstoffs bei kombinierter Beanspruchung als auch die zu dessen Modellierung benutzte Bruchbedingung sich im Spannungsraum jeweils als eine Bruchfläche darstellt, bei der jeder Punkt einer solchen Fläche zu einem Spannungszustandsvektor gehört, der real bzw. theoretisch zum Bruch führt (oder auch gerade noch ohne Bruch ertragen werden kann). Eine vollständige Übereinstimmung der modellierten Bruchfläche mit derjenigen, die das reale Bruchverhalten darstellt, ist nicht erreichbar, weil das mathematische Modell (die Bruchbedingung) das komplizierte reale Bruchgeschehen allenfalls grob vereinfacht wiedergeben kann. Nur wenn die Bruchfunktion⁶ auf einer physikalischen Modellvorstellung (Bruchhypothese) beruht, wie es bei den Bruchbedingungen der neuen Art der Fall ist, darf man überhaupt eine hinlängliche Annäherung an die Wirklichkeit erwarten. Dies ist vor allem für solche Spannungs kombinationen von Bedeutung, die versuchstechnisch nicht oder nur schwer verwirklicht werden können.

Eine Anpassung des Modells an die Realität kann immer nur punktuell vorgenommen werden. Dies geschieht, indem einige wenige Punkte der modellierten Bruchfläche mit Ergebnissen von Bruchversuchen zur Deckung gebracht werden. Hierzu dienen einige in der Bruchfunktion enthaltene werkstoffspezifische Parameter. Bei den herkömmlichen Bruch-

⁶Mit *Bruchfunktion* wird hier die auf der linken Seite der Bruchbedingung stehende Funktion der für den Bruch relevanten Spannungen bezeichnet.

bedingungen werden zur Anpassung in erster Linie die Punkte benutzt, in denen die Spannungsachsen die Bruchfläche durchstoßen. Diese repräsentieren die Spannungen σ bzw. τ , die bei einachsiger Zug- oder Druckbeanspruchung oder bei einer reinen Schubbeanspruchung des Werkstoffs zum Bruch, d.h. zu einer Anstrengung $\mathcal{E} = 1$, führen.

Das Gesetz vom Gleichgewicht der Kräfte besagt, daß nur dann eine Kraft auf einen Körper einwirken kann, wenn der Körper der einwirkenden Kraft (actio) eine gleich große, aber umgekehrt gerichtete Gegenkraft (reactio) entgegensetzt. Deshalb darf eine zum Bruch führende, auf den Körper einwirkende Bruchspannung σ oder τ mit der entsprechenden höchstmöglichen Gegenwirkung (Resistance) R gleichgesetzt werden, die der Körper der Bruchursache σ bzw. τ entgegenzusetzen vermag und die überwunden werden muß, damit der Bruch entsteht. So erklärt es sich, daß bei herkömmlichen Bruchbedingungen als Parameter in der Bruchfunktion für Zfb die Festigkeiten $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp}^{(-)}$, $R_{\perp\perp}$, $R_{\perp\parallel}$ erscheinen.⁷ Die Bruchbedingungen werden mit den Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ und den Festigkeiten so abgefaßt, daß, wenn nur eine dieser Spannungen allein auftritt, lediglich $(\sigma_2/R_{\perp}^{(+)}) = 1$ bzw. $(\sigma_2/R_{\perp}^{(-)}) = 1$; (desgl. für σ_3) oder $(\tau_{23}/R_{\perp\perp}) = 1$ usw. übrigbleibt.

8.3.2 Einführung des Bruchwiderstands der Wirkebene

Bei den Bruchbedingungen der neuen Art wird in analoger Weise wie bei den herkömmlichen Bruchbedingungen verfahren. Hierbei muß jedoch beachtet werden, daß Punkte einer Master-Bruchfläche im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ - Spannungsraum nicht einfach nur Spannungen darstellen, bei denen irgendwo im Körper der Bruch stattfindet, sondern daß es sich bei $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ um diejenigen Spannungen handelt, die auf der sich einstellenden Bruchebene auftreten. Die Spannungs Kombination aus $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ hat zur Folge, daß, wenn die Bruchbedingung erfüllt ist, der **Bruch in der gemeinsamen Wirkebene der drei Spannungen** eintritt. Durch die Bruchbedingung muß deshalb eine Beziehung zwischen diesen drei Spannungen und den **Bruchwiderständen ihrer Wirkebene** hergestellt werden. Hierzu wird der Begriff "Bruchwiderstand der Wirkebene" eingeführt und folgendermaßen definiert:

Der Bruchwiderstand der Wirkebene⁸ ist derjenige Widerstand, den eine Schnittebene ihrem Bruch infolge einer einzelnen auf ihr wirkenden Spannung (σ_n oder τ_{nt} oder τ_{n1}) entgegensetzt.

⁷Durch eine *Festigkeit* wird nur die Höhe der beim Bruch (Versagen) infolge einer einachsigen Beanspruchung oder reinen Schubbeanspruchung auftretenden Spannung angegeben; sie vermittelt keine Information über die Bruchart und den Ort des Bruches.

⁸Der Begriff der Wirkebene hat in dieser Arbeit eine andere Bedeutung als in [11]. Dort bezeichnet er eine Ebene, in der die zu einem ebenen Spannungszustand gehörenden Kräfte wirken. Hier ist eine Schnittebene gemeint, auf der eine Normalspannung und/oder eine Schubspannung wirkt.

Zur Unterscheidung von einer Festigkeit R wird ein Bruchwiderstand der Wirkebene (Action plane, A), der die gleiche Dimension wie eine Spannung hat, mit dem Symbol R^A bezeichnet. Entsprechend den durch $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ verkörpert drei Beanspruchungen $\sigma_\perp, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$ gibt es drei verschiedene Bruchwiderstände der Wirkebene:

$$\begin{aligned} R_{\perp}^{(+A)} &= \text{Bruchwiderstand der Wirkebene gegen einen Bruch infolge Quer-} \\ &\quad \text{Zugbeanspruchung } \sigma_{\perp}^{(+)}, \\ R_{\perp\perp}^A &= \text{Bruchwiderstand der Wirkebene gegen einen Bruch infolge Quer/Quer-} \\ &\quad \text{Schubbeanspruchung } \tau_{\perp\perp}, \\ R_{\perp\parallel}^A &= \text{Bruchwiderstand der Wirkebene gegen einen Bruch infolge Quer/Längs-} \\ &\quad \text{Schubbeanspruchung } \tau_{\perp\parallel}. \\ (R_{\perp}^{(-A)} &= \infty, \text{ weil eine Quer-Druckbeanspruchung } \sigma_{\perp}^{(-)} \text{ keinen Bruch in ihrer Wirk-} \\ &\quad \text{ebene verursachen kann.)} \end{aligned}$$

Wegen des für das idealisierte Modell angenommenen gleichmäßigen rotationssymmetrischen Aufbaus des UD-Verbunds sind die Bruchwiderstände R^A auf allen faserparallelen Schnitten gleich groß; sie werden deshalb als vom Winkel θ unabhängige Größen eingeführt. Damit ist die transversale Isotropie modelliert. Die Forderung nach Invarianz wird – wie sich später zeigt – dadurch erfüllt, daß in einem 180° -Winkelbereich immer die am höchsten bruchgefährdete Schnittebene gefunden wird, unabhängig von der Ausgangsstellung des drehbaren Koordinatensystems.

Ebenso wie die Festigkeiten R werden die Bruchwiderstände R^A stets als positive Werte angegeben.

Damit gelangt man nun schon zu einer ersten Vorstellung davon, wie eine Bruchbedingung der neuen Art aussehen kann. Da sie nach Abschnitt 8.2.1 möglichst 2. Ordnung in den Spannungen sein sollte, kommt als einfachster Ansatz der folgende in Betracht [11]:

$$\left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+A)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0, \quad (8.6)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (8.7)$$

Gl. (8.7) bringt noch nicht die "innere Reibung" bei $\sigma_n < 0$ zum Ausdruck.

Da der Bruchwiderstand der Wirkebene gegen Quer-Druckbeanspruchung $R_{\perp}^{(-A)} = \infty$ ist, bleibt die Master-Bruchfläche in Richtung negativer σ_n -Spannungen offen, **Bild 8.7**; sie ist im Bereich $\sigma_n < 0$ ein Zylinder mit elliptischem Querschnitt.

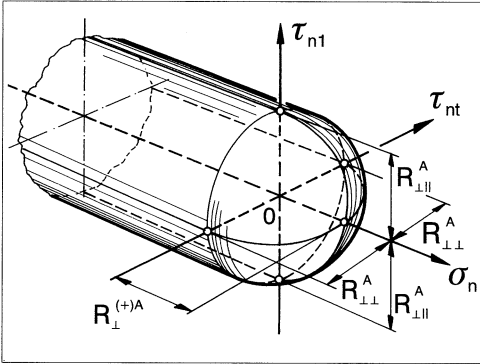


Bild 8.7: Darstellung der Bruchbedingungen (8.6) und (8.7) als Master-Bruchfläche im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum

8.3.3 Übereinstimmungen mit Festigkeiten

Bei der Bestimmung des Bruchwiderstands der Wirkebene treten dadurch Schwierigkeiten auf, daß bei reiner Quer/Quer-Schubbeanspruchung $\tau_{\perp\perp}$ der Bruch nicht in der Wirkebene der betreffenden Spannung erfolgt, sondern auf einer gegenüber der Wirkebene geneigten Schnittebene. Es gibt aber durchaus Fälle, in denen ein Bruchwiderstand R^A mit der entsprechenden konventionellen Festigkeit R identisch ist, und zwar ist dies definitionsgemäß dann der Fall, wenn **beim Bruchversuch mit einer einzelnen** an einem UD-Verbund wirkenden **Spannung der Bruch in ihrer Wirkebene** eintritt. Wann dies zu erwarten ist, soll im folgenden für die drei in Betracht kommenden Beanspruchungen theoretisch untersucht werden.

8.3.3.1 Quer/Längs-Schubbeanspruchung

Man kann sich relativ einfach davon überzeugen, daß $R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel}$ gelten muß, d.h. daß bei reiner $\tau_{\perp\parallel}$ -Schubbeanspruchung der Bruchwiderstand der Wirkebene und die Festigkeit identisch sind. Dazu sei angenommen $\tau_{21} \neq 0$ und alle anderen Spannungen "null". Auf Schnittebenen, die gegen die Wirkebene von τ_{21} um einen Winkel θ geneigt sind, ist die dort auftretende Schubbeanspruchung ($\tau_{21} \cos \theta$) kleiner als in der Wirkebene von τ_{21} , und es wirkt dort auch keine weitere Spannung, **Bild 8.8**. Da der Bruchwiderstand $R_{\perp\parallel}^A$ über dem Winkel θ konstant ist, muß der Bruch beim Höchstwert der Schubspannung, also bei $\theta_{fp} = 0^\circ$ eintreten, d.h. auf der Wirkebene von τ_{21} . Der Bruch erfolgt, sobald $\tau_{21} = R_{\perp\parallel}$ wird. Aus der Bruchbedingung, Gl. (8.6) oder (8.7), folgt somit:

$$R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel}. \quad (8.8)$$

Da sich dies unabhängig von den Festigkeitsverhältnissen ergibt, gilt (8.8) generell; deshalb wird auch in den noch folgenden Bruchbedingungen $R_{\perp\parallel}$ anstelle von $R_{\perp\parallel}^A$ benutzt.

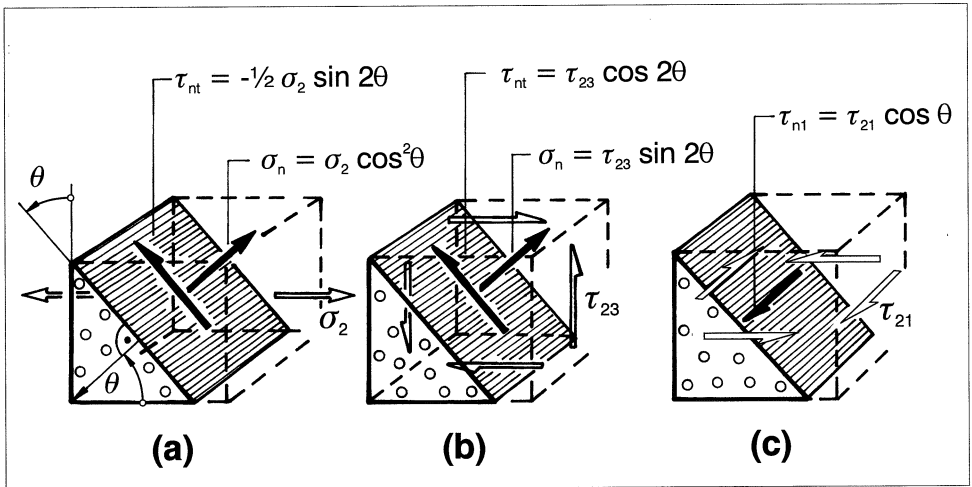


Bild 8.8: Spannungen auf einem schrägen Schnitt unter dem Winkel θ ; (a) bei einachsiger $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung; (b) bei reiner $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung; (c) bei reiner $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung

Bei dieser Art der Schubbeanspruchung läßt sich der Unterschied zwischen einer Festigkeit und einem Bruchwiderstand sehr gut verdeutlichen. So gibt es natürlich nur eine Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$, aber zwei verschiedene Bruchwiderstände der Wirkebene, nämlich $R_{\perp\parallel}^A$ und $R_{\parallel\perp}^A$. Dabei ist auf der faserparallelen Schnittebene, wie soeben gezeigt, $R_{\perp\parallel}^A = R_{\perp\parallel}$, aber auf der quer durch die Fasern verlaufenden Schnittebene ist $R_{\parallel\perp}^A > R_{\perp\parallel}^A$, weshalb der Bruch immer auf der faserparallelen Ebene erfolgt. Auf dieser wirkt eine gleich hohe Schubspannung, aber sie hat den niedrigeren Bruchwiderstand der Wirkebene, weil bei ihrem Bruch keine Fasern durchtrennt werden müssen, s. auch Bild 1.2 auf S. 4. Bei der Torsionsprüfung an 90° -Rohren erfolgt der Bruch stets in Umfangsrichtung [24].

8.3.3.2 Quer-Zugbeanspruchung

Bei einer einachsigen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung wird man normalerweise, insbesondere bei sich spröde verhaltenden Stoffen, einen Bruch in der Wirkebene der angebrachten Quer-Zugspannung erwarten; für eine einachsige σ_2 -Zugbeanspruchung würde das heißen bei $\theta_{fp} = 0^\circ$. Es kann aber nicht grundsätzlich ausgeschlossen werden, daß der Bruch auf einem "schrägen" Schnitt, d.h. bei $\theta_{fp} \neq 0^\circ$, erfolgt. Auf einem solchen Schnitt wirkt gemäß (8.1) eine kombinierte Beanspruchung, die sich aus der $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung ($\sigma_2 \cos^2 \theta$) und der $\tau_{\perp\perp}$ -Schubbeanspruchung ($-\frac{1}{2}\sigma_2 \sin 2\theta$) zusammensetzt, Bild 8.8. Somit ist die Bruch-

gefahr nicht allein von $R_{\perp}^{(+A)}$ abhängig, sondern wird von $R_{\perp\perp}^A$ mitbestimmt. Vorausgesetzt, die Gln. (8.6) und (8.7) würden das Bruchgeschehen bei kombinierter $(\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\perp})$ -Beanspruchung richtig beschreiben, so würden "schräge Brüche" nur dann auftreten, wenn $R_{\perp\perp}^A/R_{\perp}^{(+A)} \leq 1/\sqrt{2}$ wäre. Solche Verhältnisse, in denen der Bruchwiderstand der Wirkebene gegen $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung kleiner ist als derjenige gegen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung, sind aber für die Betrachtungen in diesem Buch durch den 3. Satz der erweiterten Bruchhypothese (S. 115) ausgeschlossen. Dieser hat nämlich zur Voraussetzung, daß der Bruchwiderstand der Wirkebene gegen $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung größer ist als gegen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung. Deshalb wird in dieser Arbeit $R_{\perp}^{(+A)}$ durch $R_{\perp}^{(+)}$ ersetzt, wohl wissend, daß dies nicht generell, sondern nur bei Voraussetzung des 3. Satzes der erweiterten Bruchhypothese gilt, durch den der "schräge" Zugbruch ausgeschlossen wird.

8.3.3.3 Quer/Quer-Schubbeanspruchung

Bei einer reinen $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung, z.B. realisiert durch eine Schubbeanspruchung τ_{23} , Bild 8.8, gibt es zwei ausgezeichnete faserparallele Schnittebenen, auf denen nur eine einzige Spannung wirkt, die einen Bruch verursachen könnte. Das ist zum einen die Wirkebene von τ_{23} bei $\theta = 0^\circ$ (oder τ_{32} bei $\theta = \pm 90^\circ$), zum anderen die Schnittebene bei $\theta = +45^\circ$, auf der die maximale Haupt-Zugspannung herrscht, die dem Betrage nach gleich hoch ist wie die angelegte Schubspannung τ_{23} , vgl. (8.1), s. hierzu auch Bild 8.11 auf S. 128. Vorausgesetzt, daß unsere Bruchhypothese zutrifft, tritt der Bruch in der Schnittebene ein, die den kleineren Bruchwiderstand der Wirkebene aufweist. Bei Versuchen an UD-FKV wurden bisher offenbar stets Brüche bei $\theta_{fp} = +45^\circ$ beobachtet, woraus geschlossen werden muß, daß in diesen Fällen $R_{\perp}^{(+A)} < R_{\perp\perp}^A$ war. Aus dem reinen $\tau_{\perp\perp}$ -Bruchversuch würde man also in einem solchen Fall einen Wert für $R_{\perp}^{(+A)}$, nicht aber für $R_{\perp\perp}^A$ erhalten.

Wenn der 3. Satz der erweiterten Bruchhypothese gilt, kann man keinen Beanspruchungszustand realisieren, bei dem auf einer Schnittebene als einzige Spannung eine $\tau_{\perp\perp}$ -Schubbeanspruchung auftritt und gleichzeitig (bei $R_{\perp\perp}^A > R_{\perp}^{(+A)}$) der Bruch in dieser Wirkebene der $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung stattfindet. Als Notbehelf für die Ermittlung von $R_{\perp\perp}^A$ bietet sich deshalb nur die indirekte Bestimmung aus einem einfach durchzuführenden einachsigen $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Druckversuch an, z.B. mit $\sigma_2 < 0$, alle anderen Spannungen "null". Bei einem solchen Druckversuch erfolgt der Bruch auf Schnittebenen mit einem Neigungswinkel $\theta_{fp} \approx \pm 45^\circ$. Dort tritt unvermeidlich eine Kombination von $\tau_{\perp\perp}$ und $\sigma_{\perp}^{(-)}$ auf, so daß man eine sicher mit Fehlern behaftete Bruchbedingung für kombinierte Beanspruchung heranziehen muß, um zumindest eine Rechengröße für $R_{\perp\perp}^A$ aus der gemessenen Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ zu ermitteln. Benutzt man hierzu die Gl. (8.7), so erhält man $\theta_{fp} = \pm 45^\circ$ und $R_{\perp\perp}^A = \frac{1}{2}R_{\perp}^{(-)}$. Wenn aber die "innere Reibung" berücksichtigt wird, ergibt sich $R_{\perp\perp}^A$ etwas kleiner als $\frac{1}{2}R_{\perp}^{(-)}$.

8.3.4 Empfehlungen zur Fehlervermeidung

Unsicherheiten bei der Bestimmung der in den neuartigen Bruchbedingungen enthaltenen Festigkeitsparameter sollten möglichst dadurch ausgeschlossen werden, daß bei den zur Parameterbestimmung benutzten Bruchversuchen nicht nur die zum Bruch führenden Spannungen, sondern auch die auftretenden Bruchwinkel gemessen werden. Wie weit dies versuchstechnisch möglich ist, wird z. Zt. untersucht [15].

Wenn in den später aufzustellenden Bruchbedingungen $R_{\perp}^{(+)}$ anstelle $R_{\perp}^{(+)\text{A}}$ benutzt wird, sollte man sich stets dessen bewußt sein, daß dies nicht generell, sondern nur bei Voraussetzung des 3. Satzes der erweiterten Bruchhypothese zulässig ist!

8.3.5 Die "Neigungs"-Parameter

Zur Anpassung der Modelle an die Realität werden später noch weitere Parameter benutzt, die Neigungen an bestimmten Stellen von Bruchkurven angeben, vgl. Abschnitt 5.1.2.

Während die Parameter $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp\perp}^{\text{A}}$, $R_{\perp\parallel}$ aus Bruchversuchen mit einachsiger⁹ $\sigma_{\perp}^{(+)}$ - bzw. $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung und aus einem Bruchversuch mit reiner $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung stammen, benötigt man zur Festlegung der Neigungs-Parameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$, $p_{\perp\parallel}^{(-)}$, $p_{\perp\parallel}^{(+)}$, $p_{\perp\perp}^{(+)}$ experimentell ermittelte Neigungen von Bruchkurven für kombinierte Beanspruchungen.

Die Werte $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ finden sich als die Neigung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve an der Stelle $\sigma_2 = 0$, wobei $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ die Neigung der Kurve für den Bereich $\sigma_2 \geq 0$ ist und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ die Neigung der Kurve für $\sigma_2 \leq 0$, s. Bild 5.1 auf S. 61.

Für UD-Glasfaserkunststoff mit Epoxidharz-Matrix wurde $p_{\perp\parallel}^{(-)} \approx 0,10$ bis $0,30$ und $p_{\perp\parallel}^{(+)} \approx 0,15$ bis $0,45$ gefunden.

Weil sich beim Wirkebenen-Bruch durch $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung, z.B. im Druckversuch, wahrscheinlich eine etwas weniger zerklüftete Bruchebene ergibt als beim Bruch durch $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung, kann vermutet werden, daß der Wert für $p_{\perp\perp}^{(-)}$ etwas kleiner als der $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ -Wert ist. Erwartet wird

$$0,5 \leq \frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{p_{\perp\parallel}^{(-)}} \leq 1.$$

Für die Bestimmung der p-Parameter zweckmäßig erscheinende Versuchstechniken werden z.Zt. entwickelt [15].

⁹Wenn zweiachsige Zugversuche mit $\sigma_2 = \sigma_3$, d.h. $\tau_{\perp\perp} = 0$, durchgeführt werden könnten, würde man mit Sicherheit das richtige $R_{\perp}^{(+)\text{A}}$ ermitteln, auch wenn der einachsige Zugversuch zu schrägen Brüchen führt.

8.3.6 Anhaltswerte für Werkstoffparameter

Solange für einen bestimmten UD-Verbundwerkstoff noch keine speziellen experimentellen Ergebnisse vorliegen, empfiehlt es sich, folgende Schätzwerte anzunehmen:

$$p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\perp}^{(+)} = 0,15 \quad ; \quad p_{\perp\parallel}^{(-)} = 0,20 \quad ; \quad p_{\perp\parallel}^{(+)} = 0,30.$$

Die **Tabelle 8.1** enthält Anhaltswerte für die wichtigsten in den Bruchbedingungen vorkommenden Parameter. Diese stammen im wesentlichen aus Experimenten mit Glasfaser/Epoxidharz-Verbunden. Ähnliche Werte werden im allgemeinen für CFK erhalten, oft ist allerdings $R_{\perp}^{(+)}$ etwas niedriger und $R_{\perp}^{(-)}$ etwas höher.

Tabelle 8.1: *Anhaltswerte für in den Bruchbedingungen als Parameter enthaltene Werkstoffeigenschaften*

Werkstoffeigenschaft	Bereich	Mittelwert
Quer-Zugfestigkeit $R_{\perp}^{(+)}$	$40 \div 80 \quad N/mm^2$	$60 \quad N/mm^2$
Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$	$120 \div 240 \quad N/mm^2$	$180 \quad N/mm^2$
Bruchwiderstand der Wirkebene $R_{\perp\perp}^A$	$50 \div 100 \quad N/mm^2$	$75 \quad N/mm^2$
Quer/Längs-Schubfestigkeit $R_{\perp\parallel}$	$60 \div 100 \quad N/mm^2$	$80 \quad N/mm^2$
Neigungsmaß $p_{\perp\parallel}^{(-)}$	$0,1 \div 0,3$	$0,2$
Neigungsmaß $p_{\perp\parallel}^{(+)}$	$0,15 \div 0,45$	$0,3$

Für die später angeführten Rechenbeispiele werden Rechenwerte benutzt, die weitgehend den in der Tabelle angeführten Mittelwerten entsprechen, und es wird $p_{\perp\perp}^{(+)} = p_{\perp\perp}^{(-)}$ gesetzt, wobei $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\perp}^A / R_{\perp\parallel}$ angenommen wird.

8.4 Mathematische Grundlagen

8.4.1 Mathematisch ausgerichtete Arbeiten

Mathematische Aspekte der neuartigen Bruchanalyse werden eingehend von *Jeltsch-Fricker* in [55] behandelt. Sie untersucht die topologischen Beziehungen zwischen dem Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum und dem Master-Bruchkörper im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse besitzen große prinzipielle Bedeutung. Hier können jedoch nur für die praktische Anwendung der neuen Bruchanalyse wichtige Gesichtspunkte besprochen werden.

Eine für die Visualisierung der teilweise recht komplizierten Zusammenhänge sehr hilfreiche Software ist in Form der Rechenprogramme *Brukan* (Bruchkurvenanalyse) [77] und *Brukan-Visual 3D* [78] erarbeitet worden.

Eine zum praktischen Arbeiten mit der neuen Bruchanalyse nützliche Software soll auch im Rahmen eines vom BMBF geförderten Forschungsprojekts [79] entwickelt werden.

8.4.2 Die Bruchfunktion

Die im Abschnitt 8.2.2 aufgestellte Bruchhypothese ermöglicht es, zur Formulierung der Bruchbedingung Bruchfunktionen mit den Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ auf der Bruchebene anzusetzen. Mit den auf das Schichtkoordinatensystem bezogenen Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$, wie man sie direkt aus der Spannungsanalyse erhält, ist eine entsprechende physikalisch begründete mathematische Formulierung a priori nicht möglich. In diesen Spannungsraum gelangt man immer nur, wenn zuvor im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum der Bruchwinkel θ_{fp} ermittelt worden ist.

Bei der Bruchhypothese nach Abschnitt 8.2.2 mußten die Fälle $\sigma_n \geq 0$ und $\sigma_n < 0$ unterschieden werden. Demgemäß wird man für diese beiden Fälle voraussichtlich auch bei der Formulierung der Bruchbedingung zwei verschiedene Funktionen benutzen müssen. Die Bruchhypothese allein kann zunächst nur eine vage Vorstellung von den beiden Teilen des Master-Bruchkörpers vermitteln, die an der Stelle $\sigma_n = 0$ möglichst "nahtlos" ineinander übergehen sollten.

Im Fall $\sigma_n > 0$ wirken $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ bei der Ausbildung des Bruches zusammen. Die Bruchhypothese schließt nicht aus, daß auch die Normalspannung σ_n allein einen Bruch in ihrer Wirkebene hervorrufen kann, und die alltägliche Erfahrung beim Quer-Zugversuch bestätigt dies. Insofern kann man bereits aus der Bruchhypothese und den weiteren Betrachtungen im Abschnitt 8.2 herleiten, daß die Bruchfläche im Bereich $\sigma_n \geq 0$ die Form einer geschlossenen Kuppel hat. Da eine Druckspannung $\sigma_n < 0$ ohne die Wirkung von Schubspannungen τ_{nt} und/oder τ_{n1} keinen Bruch in ihrer Wirkebene erzeugen kann, sondern statt dessen beim Vorhandensein von τ_{nt} und/oder τ_{n1} nur den Schubbruch erschwert, wird die Master-Bruchfläche im Bereich $\sigma_n < 0$ die Form eines in negativer σ_n -Richtung sich öffnenden Trichters haben, **Bild 8.9**.

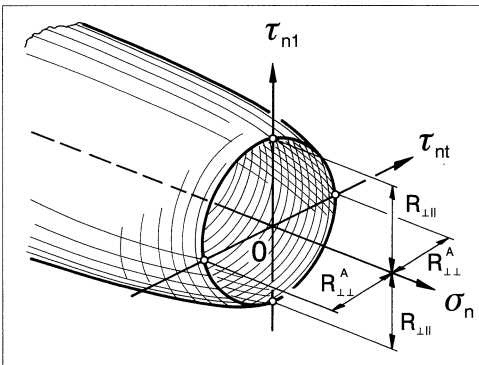


Bild 8.9: Die Master-Bruchfläche ist im Bereich $\sigma_n < 0$ eine sich trichterförmig öffnende Fläche im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum.

In jedem Fall sind die neuartigen Bruchbedingungen von der generellen Form der Gl. (8.2), oder in korrekterer Schreibweise:

$$F(\sigma_n(\theta_{fp}), \tau_{nt}(\theta_{fp}), \tau_{n1}(\theta_{fp})) = 1. \quad (8.9)$$

Die auf der linken Seite der Bruchbedingung stehende Funktion wird als die "Bruchzustände charakterisierende Funktion" oder kurz "Bruchfunktion" bezeichnet. Für sie gelten sinngemäß die Ausführungen nach Abschnitt 4.1 und 4.2. Sie soll stetig differenzierbar sein und muß folgende Eigenschaft besitzen:

Ist für einen Spannungszustand $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ die Gl. (8.9) erfüllt, d.h. geometrisch gesehen, liegt der Punkt $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ auf der durch die Gl. (8.9) definierten Master-Bruchfläche, so ist $F(\lambda\sigma_n, \lambda\tau_{nt}, \lambda\tau_{n1}) < 1$ für $0 \leq \lambda < 1$ und $F(\lambda\sigma_n, \lambda\tau_{nt}, \lambda\tau_{n1}) > 1$ für $\lambda > 1$.

Bemerkenswert ist, daß sich zur Beschreibung ein und derselben Master-Bruchfläche im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Spannungsraum verschiedene Funktionen $F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ eignen. Dies wird später im Abschnitt 9.1.3.2 verdeutlicht. Für die Berechnung der vom Winkel θ abhängigen Anstrengung ist aber – wie später gezeigt wird – eine Form der Bruchfunktion praktisch, die bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1 ist.

8.4.3 Übergangsmöglichkeiten zwischen den Spannungsräumen

An dieser Stelle sei daran erinnert, daß ein Vektor $\{\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}\}$ mit seinen 3 Komponenten keinen kompletten räumlichen Spannungszustand beschreibt, denn hierfür fehlen die dazugehörenden 3 Komponenten $\sigma_1, \sigma_t, \tau_{t1}$, die aber gemäß der Bruchhypothese keinen Einfluß auf das Bruchgeschehen haben. Dies geht aus der Gl. (8.1) auf S. 108 und der anschließenden Diskussion hervor. Selbst wenn der Bruchwinkel θ_{fp} bereits bekannt wäre, könnte man aus den Zahlenwerten für $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ allein nicht auf einen bestimmten zugehörigen Spannungszustand im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum schließen. Ein Weg, der eingeschlagen werden kann, um eine Verbindung zwischen den beiden Spannungsräumen herzustellen, ist folgender:

- Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein (aus der schichtenweisen Spannungsanalyse bekannter) Spannungszustand $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$.
- Dieser wird mit Hilfe von (8.1) in das (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystem transformiert, wobei für die Bruchanalyse nur die 3 Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ benötigt werden.
- Die Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ werden in eine Bruchbedingung $F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}) = 1$ eingesetzt, und es wird auf eine noch zu beschreibende Weise die Stellung des x_1, x_n, x_t -Koordinatensystems gesucht, für welche die durch $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ hervorgerufene "Bruchgefahr" am größten ist.

- Mit dem nun bekannten Bruchwinkel θ_{fp} läßt sich der Reservefaktor f_{Res} berechnen, der – weil alle Spannungen nach (8.1) in festen Verhältnissen zueinander stehen – nicht nur für $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$, sondern auch für $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ gilt.
- Mit dem nun bekannten Reservefaktor f_{Res} sind somit auch die zum Bruch führenden Spannungen im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum angebar.

Obwohl man von einem $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Bruchzustand nicht unmittelbar auf einen bestimmten zugehörigen Bruchzustand im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungsraum schließen kann, läßt sich zu letzterem doch auf dem beschriebenen umgekehrten Weg, z.B. mit Hilfe des Rechenprogramms *Brukan* [77] eine Verbindung herstellen. Auch lassen sich, wie in [55] beschrieben, mit Hilfe der Topologie allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten erkennen, die zwischen den beiden Bruchkörpern im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum und dem $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum bestehen.

8.4.4 Bruchwinkel-Ermittlung

8.4.4.1 Grundsätzliche Überlegungen

Sind die für Zfb maßgebenden "äußeren" Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ noch so niedrig, daß auf keiner Schnittebene unter einem beliebigen Winkel θ ein Zfb eintritt, so bedeutet dies – geometrisch gesehen –, daß keiner der zu den faserparallelen Schnittebenen gehörenden Spannungsvektoren $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ die Master-Bruchfläche erreicht oder gar durchstößt. Würde man den "äußeren" Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ kontinuierlich proportional erhöhen, so würden auch die Spannungsvektoren $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ kontinuierlich gestreckt, und zwar gemäß der Transformationsformel (8.1) mit dem gleichen Proportionalitätsfaktor wie $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$. Offensichtlich würde dann diejenige Schnittebene zur realen Bruchebene, deren Spannungsvektor zuerst die Master-Bruchfläche erreichen würde. Das heißt: Diejenige faserparallele Schnittebene ist dafür prädestiniert, zur Bruchebene zu werden, deren Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ am wenigsten gestreckt werden muß, damit die Vektorspitze die Master-Bruchfläche berührt. Für diese Schnittebene ist beim gegebenen Spannungszustand die "Bruchgefahr" am größten. Man findet demnach bei festgehaltenem Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ den Bruchwinkel θ_{fp} auf folgende Weise:

Für jede Schnittebene unter einem beliebigen Winkel θ wird der **positive** Faktor bestimmt, mit dem der Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ gestreckt werden müßte, damit er die Master-Bruchfläche erreicht; dieser Faktor wird als **schnittwinkelabhängiger Reservefaktor** $f_{Res}(\theta)$ oder auch kurz als **Streckungsfaktor** $f_{Res}(\theta)$, $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$, bezeichnet, **Bild 8.10**. Nach den obigen Ausführungen wird diejenige Schnittebene zur Bruchebene, für die der Streckungsfaktor am kleinsten ist.

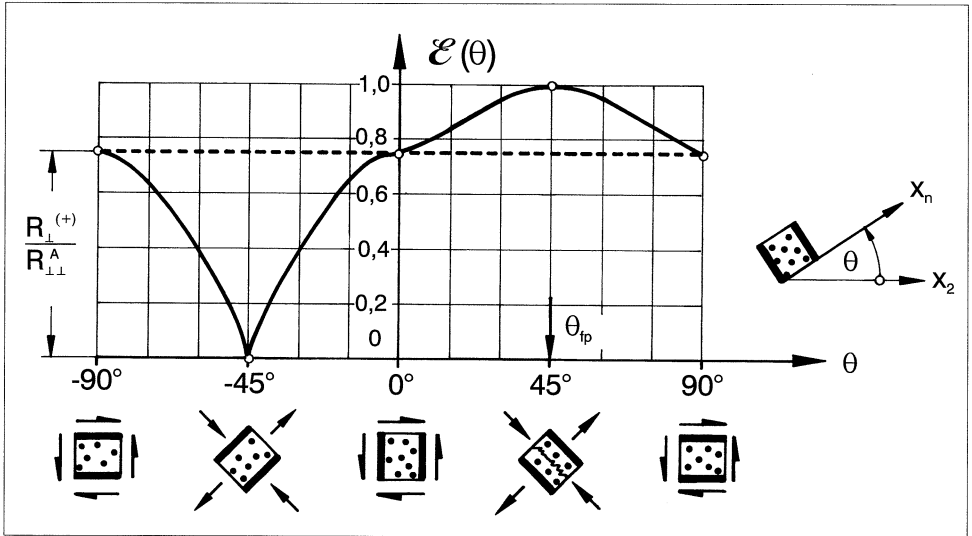


Bild 8.11: Schnittwinkelabhängige Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ bei reiner $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung durch eine Schubspannung τ_{23} . Der Bruch erfolgt bei $\mathcal{E}(\theta_{fp}) = 1$ unter dem Bruchwinkel $\theta_{fp} = 45^\circ$ infolge der dort herrschenden Haupt-Zugspannung σ_{II} , die dem Betrage nach gleich groß ist wie τ_{23} .

8.4.4.2 Rechnerische Bruchwinkel-Ermittlung, analytische Definition des Streckungsfaktors

Für die Berechnung von θ_{fp} benötigt man eine analytische Definition des Streckungsfaktors $f_{Res}(\theta)$. Gemäß seiner geometrischen Definition kann man schreiben:

$$F(f_{Res}(\theta)\sigma_n(\theta), f_{Res}(\theta)\tau_{nt}(\theta), f_{Res}(\theta)\tau_{n1}(\theta)) = 1 \quad (8.10)$$

In Fällen, in denen sich für $F(\dots)$ ein negativer Zahlenwert ergibt, ist gemäß Definition $f_{Res}(\theta) = \infty$, d.h. es ist $\mathcal{E}(\theta) = 0$ zu setzen. Falls Gl. (8.10) für einen vorgegebenen Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ nicht lösbar ist, wird $f_{Res}(\theta) = \infty$ gesetzt. Geometrisch bedeutet dies, daß der Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ auch bei beliebig großer Streckung, die Bruchfläche nie durchstößt, vgl. Bild 8.7 auf S. 119 für $\sigma_n < 0, \tau_{nt} = \tau_{n1} = 0$.

Die Funktion $f_{Res}(\theta)$ ist durch Gl. (8.10) *implizit* definiert. Ob $f_{Res}(\theta)$ auch in *expliziter* Form angegeben werden kann, hängt von der Art der Bruchfunktion F ab.

Homogene Bruchfunktion

Besonders einfach werden die dargestellten Zusammenhänge, wenn die Bruchfunktion F bezüglich der Spannungen homogen ist.

Es sei F homogen vom Grad r , d.h. für eine Vergrößerung aller Spannungen, beispielsweise mit dem schnittwinkelabhängigen Reservefaktor $f_{Res}(\theta)$, gelte

$$F(f_{Res}(\theta)\sigma_n, f_{Res}(\theta)\tau_{nt}, f_{Res}(\theta)\tau_{n1}) = (f_{Res}(\theta))^r F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}). \quad (8.11)$$

Daraus folgt:

$$f_{Res}(\theta) = \frac{1}{[F(\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta))]^{1/r}} \quad \text{bzw.} \quad E(\theta) = [F(\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta))]^{1/r}. \quad (8.12)$$

Bei homogener Bruchfunktion stimmen die globalen Maximalstellen der schnittwinkelabhängigen Anstrengung bei festgehaltenem Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ mit den globalen Maximalstellen der Bruchfunktion $F(\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta))$ und der transformierten Bruchfunktion $\tilde{F}(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}, \theta)$ überein. Folglich liefern auch die globalen Maximalstellen von F bzw. \tilde{F} den Bruchwinkel θ_{fp} . Dies gilt beispielsweise für die Gln. (8.6) und (8.7). Auch konnte in [3, 11] der Bruchwinkel auf einfache Weise durch Aufsuchen der Maximalstellen der in den $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum transformierten Bruchfunktion ermittelt werden, denn die dort benutzten Funktionen waren homogen vom Grad 2.

8.5 Mechanische Zusammenhänge

Bei der Aufstellung und Visualisierung der neuen Zfb-Bruchbedingungen im Kapitel 9 werden allerlei Spannungstransformationen, Beziehungen für Haupt-Normalspannungen, resultierende Schubspannungen u. dergl. benötigt. Im Abschnitt 8.5 findet der daran interessierte Leser die entsprechenden Herleitungen.

8.5.1 Spannungen auf "schrägen" Schnitten

Maßgebend für Zwischenfaserbruch sind die Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$, weil diese – anders als die faserparallele Spannung σ_1 – in voller Höhe die Matrix und die Faser/Matrix-Grenzfläche beanspruchen. Tatsächlich treten infolge der Unterschiede zwischen den Moduln von Faser und Matrix (quer zur Faserrichtung) örtlich sogar noch überhöhte Spannungen auf, s. Bild 5.4 auf S. 68. Auch in herkömmlichen Zfb-Kriterien für allgemein räumliche Spannungszustände erscheinen alle fünf Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$. Jedoch hat man sich bei deren Aufstellung keine Gedanken darüber gemacht, wie und vor allem wo der Bruch erfolgt. Im Gegensatz dazu geht man bei den neuen Bruchbedingungen davon aus, daß der Bruch auf derjenigen Schnittebene entsteht, in der die "gefährlichste" Kombination von $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ auftritt. Im allgemeinen ist dies auf einer "schrägen" Schnittebene, d.h. bei $\theta_{fp} \neq (0^\circ, \pm 90^\circ)$ der Fall. Es dürfte deshalb nützlich sein, eine graphische Darstellung der auf Schnitten $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ auftretenden Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ in Abhängigkeit von den Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ zu betrachten. Mit der Transformationsformel (8.1) ergeben sich die

Verläufe der Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ über dem Schnittwinkel θ gemäß Bild 8.12.

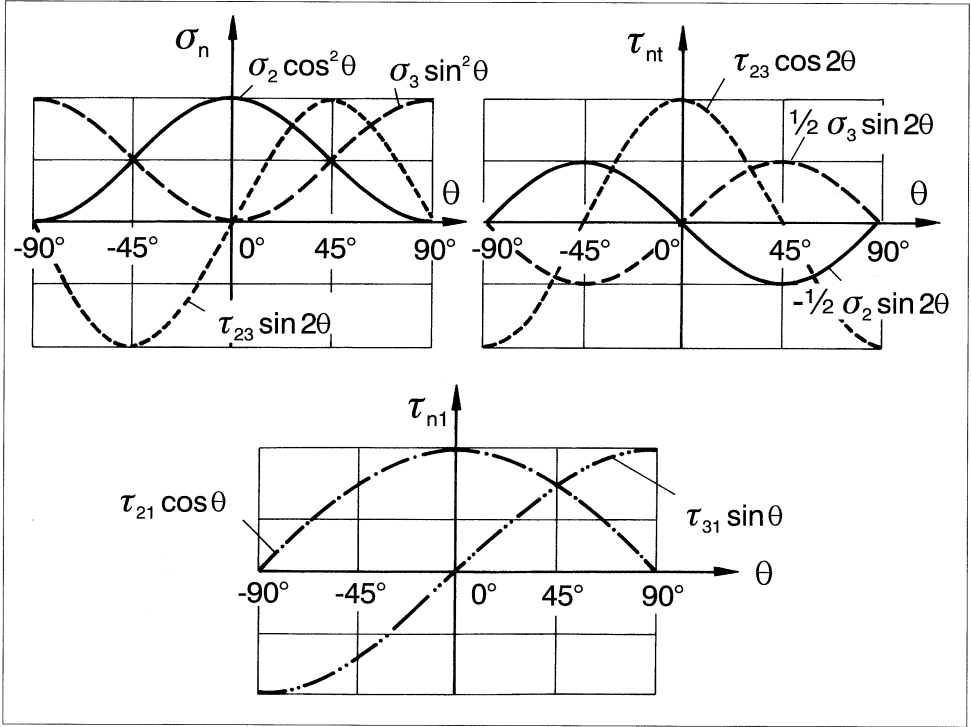


Bild 8.12: Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ in Abhängigkeit vom Schnittwinkel θ für gleichhohe Spannungen $\sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{21}$

Bemerkenswert ist folgendes:

- Die Spannungen σ_n und τ_{nt} haben nur eine Kraftwirkung in der (x_2, x_3) -Ebene. σ_n und τ_{nt} hängen deshalb auch nur von den Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$ ab.
- Jede einzelne der drei Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$ ruft auf jedem beliebigen schrägen Schnitt eine Normalspannung σ_n hervor. Die Spannungen σ_2 und σ_3 rufen auf jedem schrägen Schnitt auch eine Schubspannung τ_{nt} hervor; die Spannung τ_{23} ebenfalls, außer an den beiden Stellen $\theta = -45^\circ$ und $\theta = +45^\circ$.
- Die Spannung τ_{n1} hängt wegen ihrer Kraftwirkung in x_1 -Richtung lediglich mit den Spannungen τ_{31} und τ_{21} zusammen.

- Jede der beiden Schubspannungen τ_{31} und τ_{21} ruft auf jedem beliebigen schrägen Schnitt eine Schubspannung τ_{n1} hervor.
- Aus der Periodizität der Spannungsverläufe geht hervor, daß es beim Aufsuchen der Schnittebene mit der höchsten schnittwinkelabhängigen Anstrengung genügt, einen Schnittwinkelbereich von 180° zu untersuchen.

8.5.2 Auswirkungen des Vorzeichens von Spannungen

Beim Arbeiten mit den neuen Bruchbedingungen werden – wie üblich – Zugspannungen mit positiven und Druckspannungen mit negativen Zahlenwerten angegeben. Das Vorzeichen von σ_n dient auch zur wichtigen Unterscheidung der Fälle $\sigma_n \geq 0$ und $\sigma_n < 0$, für die nach Abschnitt 8.2.2 jeweils eine anders geartete Bruchhypothese gilt und dementsprechend wohl auch eine andere Bruchbedingung nötig sein wird.

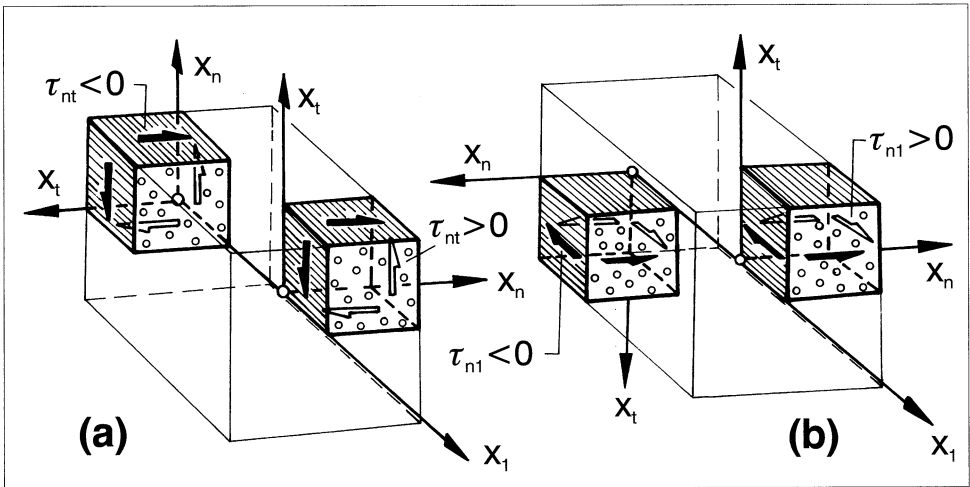


Bild 8.13: Durch Drehung des (x_n, x_t) -Koordinatensystems um 90° bzw. 180° ändert sich bei festgehaltenem Spannungszustand das Vorzeichen der Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} , vgl. Bild 8.12.

Anders verhält es sich bei den beiden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} ; dies geht aus dem **Bild 8.13** hervor. Dieses zeigt, daß man allein durch eine Drehung des (x_1, x_n, x_t) -Koordinatensystems eine positive Schubspannung in eine negative verwandeln kann. Der Beanspruchungszustand und damit die von ihm ausgehende Anstrengung des Werkstoffs kann aber keinesfalls von der willkürlich wählbaren Stellung des Koordinatensystems abhängen.

Deshalb müssen die Schubspannungen in den anzusetzenden Bruchbedingungen in einer solchen Form erscheinen, daß ihr Vorzeichen das Ergebnis nicht beeinflußt. Mit Termen, in denen τ_{nt} und τ_{n1} nur quadratisch auftreten – wie es bereits die Überlegungen des Abschnitts 8.2.1 nahelegten – ist diese Forderung auf einfache Weise zu erfüllen.

8.5.3 Haupt-Normalspannungen und "resultierende" Schubspannungen

Jeder beliebige, aus 3 Normalspannungen und 3 Schubspannungen zusammengesetzte Spannungszustand $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$, läßt sich auch durch drei Haupt-Normalspannungen $\sigma_{1H}, \sigma_{2H}, \sigma_{3H}$ (und die Angabe von deren Richtung) beschreiben. Sofern die Festigkeiten – wie bei vielen konventionellen Werkstoffen – nicht richtungsabhängig sind, kann man die Bruchbedingungen am einfachsten mit den drei Haupt-Normalspannungen formulieren. Besonders einfach ist dies natürlich, wenn die Bruchhypothese der maximalen Haupt-Normalspannung zutreffend ist.¹⁰

Bei den orthotropen oder transversal-isotropen Faserverbunden ist ein solches "Umsteigen" in die Koordinatenrichtungen der Haupt-Normalspannungen, die sich aus den Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ errechnen, nicht sinnvoll, denn man kennt die Festigkeiten für die im allgemeinen bezüglich der Faserrichtung und der transversal-isotropen Ebene "schrägen" Richtungen x_{1H}, x_{2H}, x_{3H} nicht. Es sind immer nur die für das natürliche, auf die Faserrichtung ausgerichtete, (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem geltenden "Basis-Festigkeiten" bekannt. Deshalb muß man mit einem Koordinatensystem arbeiten, von dem zumindest eine Achse in Richtung der Fasern verläuft, d.h. von dem die x_1 -Achse festliegt.

Bei den UD-Verbunden kann man aber in der Ebene der transversalen Isotropie, der (x_2, x_3) -Ebene, die Achsenrichtungen beliebig wählen und somit auch auf die Koordinatenrichtungen x_{II} und x_{III} übergehen, in denen die beiden aus den drei Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$ gebildeten "Haupt-Normalspannungen der transversal-isotropen Ebene" σ_{II} und σ_{III} wirken. Das (x_{II}, x_{III}) -Achsenkreuz wird um den Winkel φ im mathematisch positiven Sinn aus der x_2 -Richtung herausgedreht, **Bild 8.14**. Auf den Schnittebenen, auf denen die "Haupt-Normalspannungen" σ_{II} und σ_{III} auftreten, ist die Schubspannung $\tau_{IIII} = \tau_{IIII} = 0$. Mit den Transformationsformeln, vgl. (8.1), errechnen sich die Spannungen in x_{II} - und x_{III} -

¹⁰Ohne daß dies besonders hervorgehoben wurde, arbeitete man also bei isotropen Stoffen auch schon in der Vergangenheit gelegentlich mit einem beweglichen Koordinatensystem, denn die Orientierung der Haupt-Normalspannungs-Richtungen gegenüber den (x, y, z) -Koordinaten hängt natürlich vom Spannungszustand $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ ab.

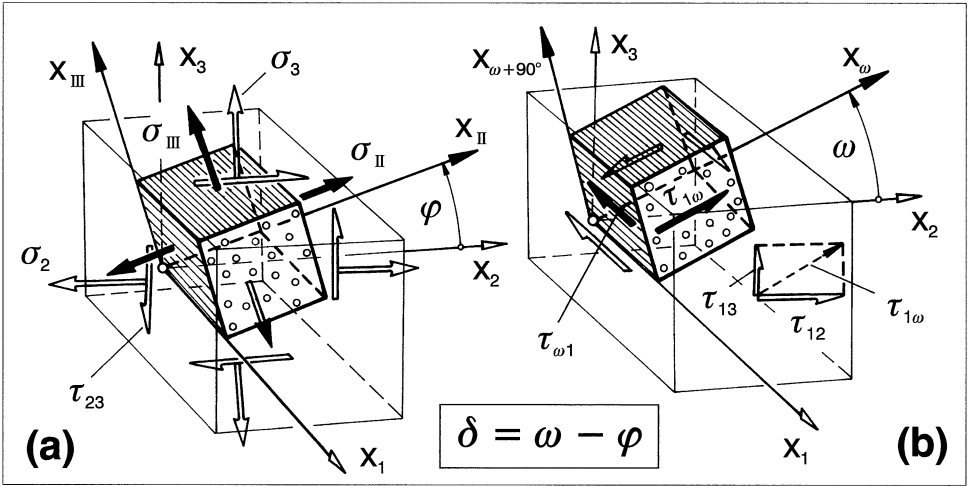


Bild 8.14: (a) Transformation eines $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Spannungszustands in den zugehörigen Haupt-Normalspannungszustand $(\sigma_{II}, \sigma_{III}, 0)$. (b) Zusammenfassen der beiden Schubspannungen τ_{12} und τ_{13} zur Schubspannung $\tau_{1\omega}$; deren korrespondierende Schubspannung ist $\tau_{\omega 1}$.

Richtung aus den gegebenen Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$ folgendermaßen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}. \quad (8.13)$$

Aus der letzten der drei Gleichungen erhält man mit $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$ und $\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$ eine Beziehung, aus der sich zunächst der Winkel φ bestimmen läßt, mit dem sich anschließend aus den ersten beiden Gleichungen σ_{II} und σ_{III} berechnen lassen. Es ergibt sich für die Richtung der "Haupt-Normalspannungen der transversal-isotropen Ebene":

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{23}}{\sigma_2 - \sigma_3}. \quad (8.14)$$

Mit σ_{II} und σ_{III} nach (8.13) kann in der Zfb-Bedingung die Zahl der auftretenden Spannungen von fünf auf vier reduziert werden, wenn man vom (x_1, x_2, x_3) -Koordinatensystem in das (x_1, x_{II}, x_{III}) -Koordinatensystem hinüberwechselt. Statt $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ erscheinen dann in den Bruchbedingungen $\sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{II I}, \tau_{III I}$. Daran, daß zusätzlich zu σ_{II} und σ_{III} auch Schubspannungen $\tau_{III I}$ und $\tau_{II I}$ auftreten können, zeigt sich, daß σ_{II} und σ_{III}

nicht die Haupt-Normalspannungen σ_{2H}, σ_{3H} sind, die sich aus dem kompletten Spannungszustand $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ errechnen würden, denn auf Schnittebenen, auf denen "echte" Haupt-Normalspannungen wirken, gibt es keine Schubspannungen.

Um möglichen Mißverständnissen vorzubeugen, soll an dieser Stelle ausdrücklich festgestellt werden, daß nicht beabsichtigt ist, die neuen Bruchbedingungen mit Haupt-Normalspannungen anzusetzen. Diese sollen ausschließlich die Visualisierung der neuen Bruchbedingungen erleichtern; man gelangt damit vom fünfdimensionalen Spannungsraum in einen dreidimensionalen.

Mit (8.1), erhält man die Schubspannungen τ_{III1} und τ_{II1} folgendermaßen:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{III1} \\ \tau_{II1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}. \quad (8.15)$$

Eine weitere Vereinfachung, die besonders für die Visualisierung der Bruchbedingung in einem dreidimensionalen Spannungsraum von Bedeutung ist, läßt sich dadurch erzielen, daß die beiden Schubspannungen τ_{31} und τ_{21} (oder τ_{III1} und τ_{II1}) durch die aus ihnen resultierende Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ ersetzt werden. Diese Möglichkeit wird erkennbar, wenn man statt der auf faserparallelen Schnitten wirkenden Schubspannungen τ_{31} und τ_{21} (oder τ_{III1} und τ_{II1}) die korrespondierenden Schubspannungen τ_{13} und τ_{12} (bzw. τ_{1III} und τ_{1II}) auf einem zu den Fasern senkrechten Schnitt betrachtet, Bild 8.14. Weil die beiden Schubspannungen τ_{31} und τ_{12} (bzw. τ_{1III} und τ_{1II}) auf einer gemeinsamen Wirkebene angreifen, kann man sie zu einer "Resultierenden" zusammenfassen:

$$\tau_{1\omega} = \sqrt{\tau_{13}^2 + \tau_{12}^2} = \sqrt{\tau_{1III}^2 + \tau_{1II}^2} = \tau_{\omega 1}. \quad (8.16)$$

Ihre Richtung wird durch den Winkel ω angegeben; für diesen gilt

$$\omega = \arctan \frac{\tau_{13}}{\tau_{12}} = \arctan \frac{\tau_{31}}{\tau_{21}}. \quad (8.17)$$

Gl. (8.16) sagt folgendes aus: Die auf der zur Faserrichtung senkrechten Ebene wirkende resultierende Schubspannung $\tau_{1\omega}$ läßt sich aus den auf der gleichen Ebene wirkenden Schubspannungen τ_{13} und τ_{12} oder ebenso aus den Schubspannungen τ_{1III} und τ_{1II} berechnen, und sie hat die gleiche Größe wie die für die Zfb-Betrachtung relevante korrespondierende Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ auf der entsprechenden faserparallelen Ebene.

Die soeben durchgeführte Betrachtung der Spannungen auf der zur Faserrichtung senkrechten Ebene diente nur zur Herleitung der Beziehungen; für das praktische Rechnen bei der Zfb-Analyse benutzt man die Zfb-relevanten korrespondierenden Schubspannungen auf faserparallelen Flächen und erhält damit

$$\tau_{\omega 1} = \sqrt{\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2} = \sqrt{\tau_{III1}^2 + \tau_{II1}^2}. \quad (8.18)$$

Schließlich kann man auch noch die Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} , die auf der zur x_n -Richtung senkrechten faserparallelen Ebene wirken, zu einer "resultierenden" Schubspannung $\tau_{n\psi}$ zusammenfassen. Für deren Größe und Richtung gilt:

$$\tau_{n\psi} = \sqrt{\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2}, \quad (8.19)$$

$$\psi = \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}. \quad (8.20)$$

Die zugehörige Spannung $\tau_{\psi n}$ hat für die Zfb-Entstehung keine Bedeutung, denn sie wirkt in einer schräg durch die Fasern verlaufenden Ebene, **Bild 8.15**.

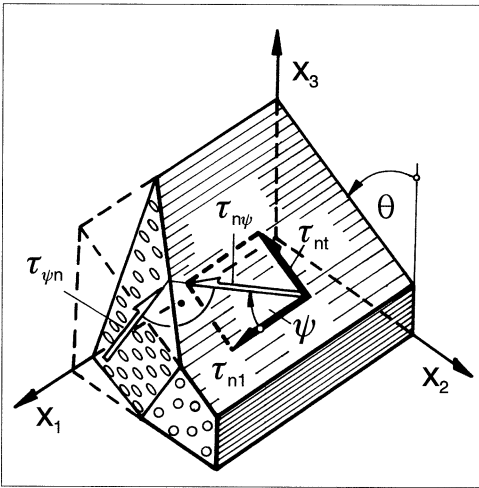


Bild 8.15: Zusammenfassen der beiden Schubspannungen τ_{nt} und τ_{n1} zu $\tau_{n\psi}$. Deren korrespondierende Schubspannung ist $\tau_{\psi n}$.

Die auf einer Bruchebene wirkenden Spannungen könnten somit statt durch $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ auch durch σ_n und $\tau_{n\psi}$ sowie ψ angegeben werden. Bei den beiden Komponenten von $\tau_{n\psi}$ stellt aber τ_{nt} eine $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung und τ_{n1} eine $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung dar. Man muß für möglich halten, daß die "Festigkeitseigenschaften" bei $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung andere sind als bei $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung, weil das mikromechanische Geschehen in den beiden Fällen recht unterschiedlich ist. Nur aus diesem Grunde werden die beiden Komponenten von τ_{nt} und τ_{n1} in den Bruchbedingungen gesondert aufgeführt. Man kann aber nicht prinzipiell ausschließen, daß u.U. bei einem UD-Verbundstoff die "Festigkeitseigenschaften" bei $\tau_{\perp\perp}$ - und $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung praktisch gleich sind. In diesem Fall erscheint die Annahme berechtigt, daß die "Festigkeit" von der Richtung ψ der resultierenden Schubspannung $\tau_{n\psi}$ unabhängig ist. Deshalb wird man die Bruchbedingungen wohl so formulieren, daß sie für $R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\parallel}$ und $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$ auf Schnitten $\sigma_n = \text{const.}$ in Kreisgleichungen übergehen, d.h. der Bruchkörper zu einem Rotationskörper wird, s. Bild 9.10 auf S. 149.

9 Bruchbedingungen der neuen Art

9.1 Bruchbedingung für eine druckbeanspruchte Bruchebene

9.1.1 Vorbemerkungen

Ein mathematischer Ansatz, der als physikalisch begründete Bruchbedingung für Zfb dienen soll, muß selbstverständlich der zugrundeliegenden Bruchhypothese nach Abschnitt 8.2.2 entsprechen und den Anforderungen nach Abschnitt 8.2.1 genügen, ansonsten verbleiben aber für die Formulierung der Bruchfunktion viele Freiheiten. Auch kann man – wie schon erwähnt – verschiedene Funktionen zur Beschreibung ein und derselben Bruchfläche benutzen [55]. Aus der zugrundegelegten Bruchhypothese allein folgt nur, daß bei gleichzeitiger Wirkung von $\sigma_n > 0$ und τ_{nt} sowie τ_{n1} alle drei Spannungen einen positiven Beitrag zur "Bruchgefahr" $\mathcal{E}(\theta)$ liefern, während sich die Bruchgefahr verringert, wenn zu τ_{nt} und τ_{n1} eine Normalspannung $\sigma_n < 0$ hinzutritt. Wie die Funktion angesetzt wird, muß aufgrund experimenteller Erfahrungen und mathematischer Zweckmäßigkeit entschieden werden.

Bei der mathematischen Formulierung einer Bruchbedingung für $\sigma_n < 0$ gemäß der Bruchhypothese nach Abschnitt 8.2.2 sind zwei Aufgaben zu lösen:

1. Es muß ein realistischer und mathematisch gut handhabbarer Ansatz für den zusätzlichen, durch eine Spannung $\sigma_n < 0$ hervorgerufenen, Widerstand gegen Schubbruch infolge τ_{nt} oder τ_{n1} gemacht werden, (Abschnitt 9.1.2).
2. Es muß ein zweckmäßiger "Interaktionsansatz" für das Zusammenwirken von τ_{nt} und τ_{n1} bei der Brucherzeugung gefunden werden, (Abschnitt 9.1.3).

Zu 1. werden der lineare Ansatz und ein realistischerer parabolischer Ansatz gemacht. Bei 2. gelingt der Druchbruch zu mathematisch einfach handhabbaren Lösungen erst durch Ansätze für Längsschnitte statt für Querschnitte des Master-Bruchkörpers.

9.1.2 Einfluß der Druckspannung auf den Schubbruch

9.1.2.1 Lineare Bruchkurven

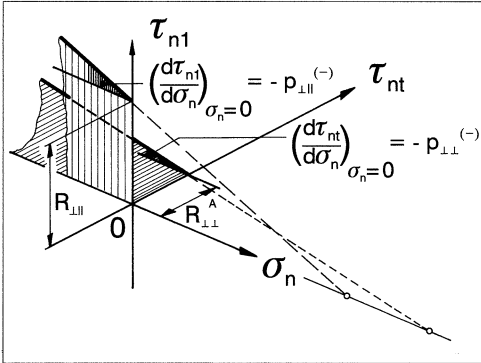


Bild 9.1: (σ_n, τ_{n1}) -Bruchkurve und (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve für $\sigma_n < 0$ bei linearem Druckspannungseinfluß

Als einfachster Ansatz bietet sich in Anlehnung an die Festigkeitshypothese von *Coulomb* [72] eine lineare Zunahme des zusätzlichen Schubbruchwiderstands mit steigender Druckspannung an, **Bild 9.1**. Für eine Spannungscombination, die nur aus τ_{n1} und $\sigma_n < 0$ besteht, lautet damit die Bruchbedingung

$$\tau_{n1} = R_{\perp\parallel} - p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel} - p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_n} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.1)$$

τ_{n1} und σ_n sind hierin die beim Bruch auftretenden Spannungen!

$p_{\perp\parallel}^{(-)}$ ist der Proportionalitätsfaktor bei σ_n , der nach *Coulomb* als "Reibungsbeiwert" gedeutet werden kann.

Sofern bei einer (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung der Bruchwinkel $\theta_{fp} = 0^\circ$ ist, kann $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ als Neigung der (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für den Bereich $\sigma_2 \leq 0$ an der Stelle $\sigma_2 = 0$ erhalten werden, s. Bild 5.1 auf S. 61.

Die zweite Form von Gl. (9.1.) findet sich in der Gl. (9.14) wieder, die dritte Form von Gl. (9.1) in Gl. (9.20).

Im Hinblick auf eine spätere Kombination von τ_{nt} und τ_{n1} erscheint es zweckmäßig, die ertragbare Schubspannung τ_{nt} ebenso anzusetzen, Bild 9.1:

$$\tau_{nt} = R_{\perp\perp}^A - p_{\perp\perp}^{(-)} \sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - p_{\perp\perp}^{(-)} \sigma_n} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} + \frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.2)$$

Die zweite Form von Gl. (9.2.) findet sich in Gl. (9.14) wieder, die dritte Form von Gl. (9.2) in Gl. (9.20).

Spannungen τ_{nt} und σ_n treten auf einer faserparallelen Ebene bei Beanspruchungen durch "äußere" Normalspannungen σ_2 und σ_3 auf. Für die Betrachtungen in diesem Abschnitt sollen σ_2 und σ_3 gleichzeitig die Haupt-Normalspannungen der transversal-isotropen Ebene sein (d.h. es ist $\tau_{23} = 0$); sie werden deshalb mit σ_{II} und σ_{III} bezeichnet.

Auf den Beziehungen (8.13) und (8.14) in Abschnitt 8.5.3 für die Haupt-Normalspannungen basiert die Darstellung des Mohrschen Spannungskreises und der Mohrschen "Hüll-Linie" [80], die im Bereich $\sigma_n < 0$ mit der (τ_{nt}, σ_n) -Bruchkurve, z.B. nach (9.2), identisch ist. (Der Mohrsche Spannungskreis wird im Teil III anhand des Bildes 10.1 auf S. 174 erläutert.)

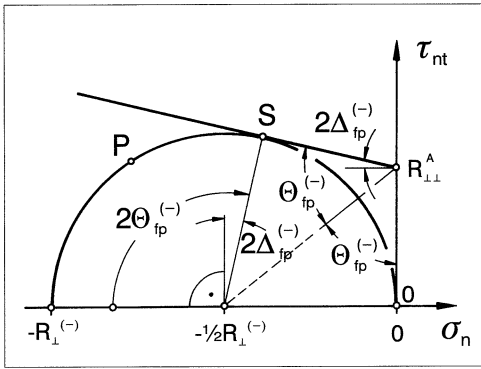


Bild 9.2: Mohrscher Spannungskreis für einachsige Quer-Druckbeanspruchung zur Herleitung von Beziehungen zwischen dem Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ und den Parametern $R_{\perp\perp}^A$ und $p_{\perp\perp}^{(-)}$ bei linearem Druck Spannungseinfluß

Dem **Bild 9.2** liegt der Beanspruchungsfall der einachsigen Quer-Druckbeanspruchung mit $\sigma_{II} = -R_{\perp}^{(-)}$, $\sigma_{III} = 0$ zugrunde. Die "Hüll"-Linie nach Gl. (9.2) stellt die Grenze der ertragbaren Schubspannung τ_{nt} auf irgendeiner schrägen Schnittebene dar. Der Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises liegt auf der σ -Achse; der Kreis schneidet die σ -Achse bei σ_{II} und σ_{III} . Die Koordinaten eines Punktes P des Kreises, der nicht auf der σ -Achse liegt, stellen einen Spannungszustand auf einem "schrägen" Schnitt dar, die Normalspannung σ_n (auf der Abszisse) und die Schubspannung τ_{nt} (auf der Ordinate), die auf einer um den Winkel Θ gegenüber der Richtung von σ_{II} geneigten Schnittebene auftreten. (Zur Kennzeichnung der Lage einer Schnittebene wird, wenn von den Ebenen der Haupt-Normalspannungen ausgegangen wird, Θ statt θ benutzt, um zu zeigen, daß der Winkel von der Richtung von σ_{II} aus gemessen wird und nicht von der Richtung von σ_2 aus.)

Weil die Bruchlinie (oder "Hüll-Linie") diejenigen (σ_n, τ_{nt}) -Kombinationen angibt, die beim Bruch auftreten, kann kein Spannungskreis diese Linie überschreiten, sondern sie allenfalls (beim Bruchzustand) gerade berühren. Die Koordinaten des Berührungspunktes S (für Schubbruch, Shear fracture) stellen $\tau_{nt}(\Theta_{fp})$ und $\sigma_n(\Theta_{fp})$ beim Bruch dar. Auch der Bruchwinkel Θ_{fp} kann der graphischen Darstellung nach *Mohr* entnommen werden.

Es erweist sich hierbei als zweckmäßig, den Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ bei einachsiger Quer-Druckbeanspruchung folgendermaßen anzugeben:

$$\Theta_{fp}^{(-)} = 45^\circ + \Delta_{fp}^{(-)}. \quad (9.3)$$

Aus Gl. (9.2) ergibt sich die Steigung der Bruchkurve, die hier eine Gerade ist, als

$$\frac{d\tau_{nt}}{d\sigma_n} = -p_{\perp\perp}^{(-)}. \quad (9.4)$$

Die Bruchgerade ist auch Tangente des Mohrschen Spannungskreises im Berührungspunkt S; es gilt deshalb:

$$-\tan 2\Delta_{fp}^{(-)} = \cotan 2\Theta_{fp}^{(-)} = -p_{\perp\perp}^{(-)}. \quad (9.5)$$

Aus den geometrischen Gegebenheiten in Bild 9.2 ist weiterhin ersichtlich, wie der benötigte Parameter $R_{\perp\perp}^A$ mit der Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$ und dem zugehörigen Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ zusammenhängt¹

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \cotan \Theta_{fp}^{(-)} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \left(\sqrt{1 + p_{\perp\perp}^{(-)2}} - p_{\perp\perp}^{(-)} \right). \quad (9.6)$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man selbstverständlich auch – aber umständlicher – indem man analytisch das globale Maximum von $\mathcal{E}(\Theta)$ bestimmt und dann $\Theta_{fp}^{(-)}$ in die Bruchbedingung (9.2) einsetzt.

9.1.2.2 Parabolische Bruchkurven

Mohr hat als Bruchkurve $\tau(\sigma)$, die er Hüllkurve nennt, eine gekrümmte Linie empfohlen, bei der die ertragbare Schubspannung τ degressiv mit – absolut betrachtet – wachsender Druckspannung ansteigt, und die sich bei sehr hohen Druckspannungen allmählich einer Parallelen zur σ -Achse nähert. Die einfachste gekrümmte Linie, die diese Forderungen erfüllt (Steigung = "null" allerdings erst für $\sigma \rightarrow -\infty$), ist eine Parabel [80].

Für eine Kombination von τ_{n1} und $\sigma_n < 0$, **Bild 9.3**, lautet die Bruchbedingung in diesem Fall

$$\tau_{n1}^2 = R_{\perp\parallel}^2 - 2p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\parallel} \sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{n1}^2}{R_{\perp\parallel}^2 - 2p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\parallel} \sigma_n} = 1 \quad (9.7)$$

$$\text{oder} \quad \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + 2 \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sigma_n = 1 \quad \text{für} \quad \sigma_n < 0.$$

¹Die zweite Fassung ergibt sich mit Gl. (9.5) und dem Additionstheorem $\cotan 2\Theta_{fp}^{(-)} = \frac{\cotan^2 \Theta_{fp}^{(-)} - 1}{2\cotan \Theta_{fp}^{(-)}}$.

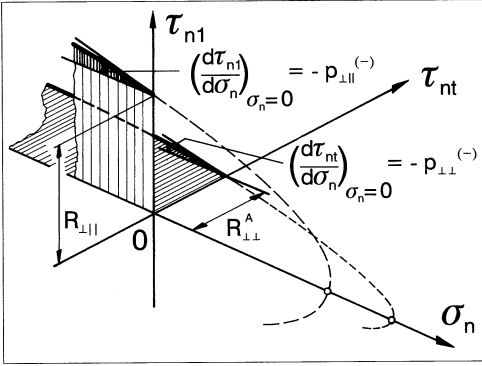


Bild 9.3: (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve und (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve für $\sigma_n < 0$ bei parabolischem Druckspannungseinfluß

Die zweite Form von (9.7) findet sich in (9.15) wieder, die dritte Form in (9.23). Entsprechend wird für die Kombination von τ_{nt} und $\sigma_n < 0$, Bild 9.3, angesetzt:

$$\tau_{nt}^2 = (R_{\perp\perp}^A)^2 - 2p_{\perp\perp}^{(-)}R_{\perp\perp}^A\sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{nt}^2}{(R_{\perp\perp}^A)^2 - 2p_{\perp\perp}^{(-)}R_{\perp\perp}^A\sigma_n} = 1 \quad (9.8)$$

$$\text{oder} \quad \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + 2\frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A}\sigma_n = 1 \quad \text{für} \quad \sigma_n < 0.$$

Die zweite Form von (9.8) findet sich in (9.15) wieder, die dritte Form in (9.23).

Bei der parabelförmigen Hüllkurve nach (9.8) ist an der Stelle $\sigma_n = 0$ die Schubspannung beim Bruch $\tau_{nt} = R_{\perp\perp}^A$ und die Steigung $d\tau_{nt}/d\sigma_n = -p_{\perp\perp}^{(-)}$.

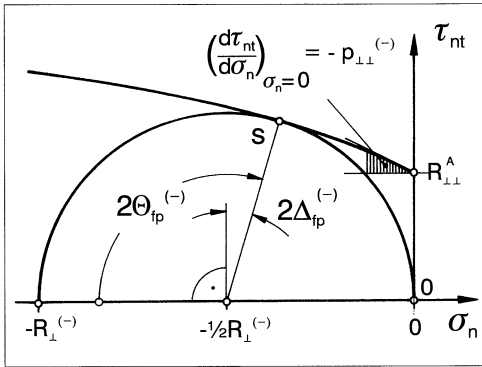


Bild 9.4: Mohrscher Spannungskreis für einachsige Quer-Druckbeanspruchung zur Herleitung von Beziehungen zwischen dem Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ und den Parametern $R_{\perp\perp}^A$ und $p_{\perp\perp}^{(-)}$ bei parabolischem Druckspannungseinfluß

Bild 9.4 zeigt, wie die Zusammenhänge zwischen Steigungsmaß $p_{\perp\perp}^{(-)}$, Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ bei einachsigem Druck, Druckfestigkeit $R_{\perp\perp}^{(-)}$ und Bruchwiderstand $R_{\perp\perp}^A$ der Wirkebene sich wieder am einfachsten mit Hilfe des Mohrschen Kreises und der parabelförmigen Hüllkurve

ermitteln lassen. Der Berührungspunkt S von Kreis und Parabel hat die Koordinaten

$$\sigma_n = -\frac{R_{\perp}^{(-)}}{2}(1 - \sin 2\Delta_{fp}^{(-)}), \quad (9.9)$$

$$\tau_{nt} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \cos 2\Delta_{fp}^{(-)}. \quad (9.10)$$

Diese können in die Parabelgleichung (9.8) eingesetzt werden. Eine weitere Gleichung für die beiden Unbekannten $\Delta_{fp}^{(-)}$ und $R_{\perp\perp}^A$ liefert die Übereinstimmung der Steigungen von Kreis und Parabel im Punkt S:

$$-\tan 2\Delta_{fp}^{(-)} = \cotan 2\Theta_{fp}^{(-)} = -\frac{p_{\perp\perp}^{(-)} R_{\perp\perp}^A}{\tau_{nt}} = -p_{\perp\perp}^{(-)} \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp\perp}^A - 2p_{\perp\perp}^{(-)}\sigma_n}}. \quad (9.11)$$

Man findet aus den beiden Gleichungen:

$$\sin 2\Delta_{fp}^{(-)} = -\cos 2\Theta_{fp}^{(-)} = \frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{1 + p_{\perp\perp}^{(-)}}, \quad (9.12)$$

$$R_{\perp\perp}^A = -\frac{R_{\perp}^{(-)} \cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{2p_{\perp\perp}^{(-)}} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})}. \quad (9.13)$$

Weil die parabelförmige Bruchkurve den Vorstellungen von *Mohr* über die Form der Hüllkurve recht nahe kommt, wird sie später bevorzugt behandelt.

9.1.3 Interaktionsansätze für die Schubspannungen

Nun gilt es, den zweiten Teil der Aufgabe zu bewältigen, nämlich für eine kombinierte (τ_{nt}, τ_{n1}) -Beanspruchung einen einfachen Interaktionsansatz zu finden, der die Bruchbedingungen für die Einzelbeanspruchungen τ_{nt} und τ_{n1} (jeweils in Kombination mit $\sigma_n < 0$) miteinander verknüpft. Bei linearem Einfluß der Druckspannung σ_n sind dies die Bruchbedingungen nach den Gln. (9.1) und (9.2), bei parabelförmigem Verlauf der (τ_{nt}, σ_n) - und (τ_{n1}, σ_n) -Bruchkurve die Bruchbedingungen nach den Gln. (9.7) und (9.8).

9.1.3.1 Master-Bruchkörper mit elliptischen Querschnitten

Der "klassische" Interaktionsansatz ist der "quadratisch additive", der für die Querschnitte $\sigma_n = \text{const.}$ auf elliptische (τ_{nt}, τ_{n1}) -Bruchkurven führt. Obwohl abzusehen ist, daß solche Ansätze mathematisch ungeschickt sind, soll mit diesen begonnen werden, weil sie die "Physik" gut sichtbar machen.

Auf (9.1) und (9.2) angewandt ergibt sich damit als Bruchbedingung für eine kombinierte $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Beanspruchung [81]:

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - p_{\perp\perp}^{(-)} \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel} - p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_n} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.14)$$

Auf (9.7) und (9.8) angewandt lautet die Bruchbedingung

$$\frac{\tau_{nt}^2}{(R_{\perp\perp}^A)^2 - 2p_{\perp\perp}^{(-)} R_{\perp\perp}^A \sigma_n} + \frac{\tau_{n1}^2}{R_{\perp\parallel}^2 - 2p_{\perp\parallel}^{(-)} R_{\perp\parallel} \sigma_n} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.15)$$

Die beiden Halbachsen der durch (9.14) oder (9.15) beschriebenen elliptischen (τ_{nt}, τ_{n1}) -Bruchkurven an Stellen $\sigma_n = \text{const.}$ wachsen bei verschiedenen Werten für $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ (sowie $R_{\perp\perp}^A$ und $R_{\perp\parallel}$) unterschiedlich stark mit $|\sigma_n|$ an, **Bilder 9.5 und 9.6**.

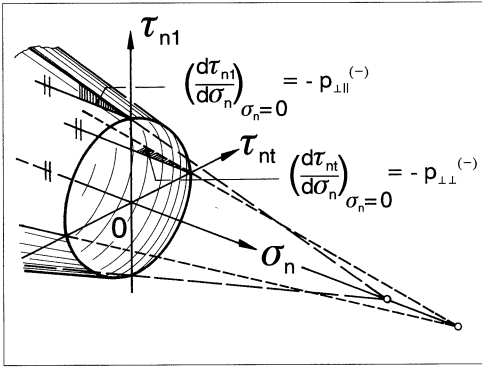


Bild 9.5: Master-Bruchfläche für $\sigma_n < 0$ mit elliptischen Querschnitten und geradlinigen Konturlinien in den beiden Längsschnitten $\tau_{nt} = 0$ und $\tau_{n1} = 0$

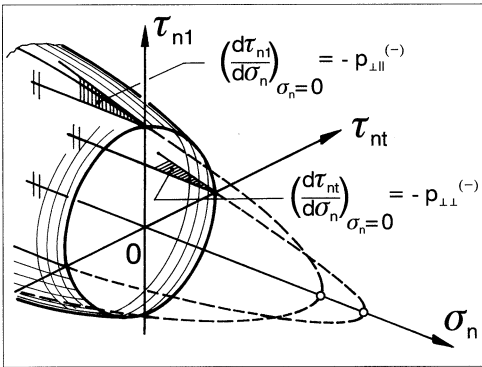


Bild 9.6: Master-Bruchfläche für $\sigma_n < 0$ mit elliptischen Querschnitten und parabolischen Konturlinien in den beiden Längsschnitten $\tau_{nt} = 0$ und $\tau_{n1} = 0$

Für $R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\parallel}$ und $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$ werden die Querschnitte kreisförmig.

Für das Aufsuchen des Bruchwinkels mit Hilfe von $f_{Res}(\theta)$ oder $\mathcal{E}(\theta)$ sind die Ansätze (9.14) und (9.15) schlecht geeignet, denn für den schnittwinkelabhängigen Reservefaktor

$f_{Res}(\theta)$ erhält man aus (9.14) eine Gleichung 4. Grades, aus (9.15) eine 3. Grades. Deren Lösungen müßten nach dem globalen Minimum für $f_{Res}(\theta)$ abgesucht werden. Es hat sich somit als nicht sonderlich zweckmäßig erwiesen, für **Querschnitte** $\sigma_n = const.$ ein einfaches Polynom zu wählen. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, der für die Anwendbarkeit der neuen Bruchbedingungen in großen FEM-Modellen sicherlich eine Rolle spielt, soll deshalb im folgenden nach geschickteren Ansätzen gesucht werden.

9.1.3.2 Master-Bruchkörper mit geraden oder parabelförmigen Längsschnitten

Vorteilhaft dürfte es sein, nicht für Querschnitte $\sigma_n = const.$, sondern für Längsschnitte $\psi = \arctan(\tau_{n1}/\tau_{nt}) = const.$ ein einfaches Polynom zur Beschreibung der Schnittkurve zu wählen, denn die Streckung des Spannungsvektors mit dem schnittwinkelabhängigen Reservefaktor $f_{Res}(\theta)$ erfolgt in einem solchen Längsschnitt $\psi = const.$ Auf diese Weise sollte es daher am ehesten gelingen, eine einfache Beziehung für $f_{Res}(\theta)$ zu erhalten.

Weil man für die Bruchkurven in den Schnitten $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$ Geraden (Gln. (9.1) und (9.2)) oder Parabeln (Gln. (9.7) und (9.8)) benutzt hat, erscheint es sinnvoll, analog auch für Schnitte unter einem beliebigen Winkel ψ Geraden bzw. Parabeln zu wählen.

Ausgangsquerschnitt bei $\sigma_n = 0$

An der Stelle $\sigma_n = 0$ wird der elliptische Querschnitt des Master-Bruchkörpers nach (9.14) oder (9.15) beibehalten. (Die Querschnitte nach (9.14) und (9.15) unterscheiden sich dadurch, daß der lineare und der parabolische Druckspannungseinfluß zu etwas unterschiedlichen Werten für $R_{\perp\perp}^A$ führen.) Mit τ_{nt0} und τ_{n10} , die gemeinsam eine Bruchgefahr $\mathcal{E}(\theta) = 1$ erzeugen, wenn $\sigma_n = 0$ ist, lautet die Gleichung des "Ausgangsquerschnitts":

$$\left(\frac{\tau_{nt0}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n10}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n = 0. \quad (9.16)$$

Für die aus τ_{nt0} und τ_{n10} resultierende Schubspannung wird die Bezeichnung $\tau_{n\psi_0}$ eingeführt und für den zugehörigen Bruchwiderstand der Wirkebene das Symbol $R_{\perp\psi}^A$. Durch die Gln. (8.19) und (9.16) sind dann folgende Zusammenhänge gegeben, **Bild 9.7**:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{n\psi_0}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 &= \frac{\tau_{nt0}^2 + \tau_{n10}^2}{(R_{\perp\psi}^A)^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\tau_{nt0}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n10}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{1}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 &= \left[\left(\frac{\tau_{nt0}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n10}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \right] (\tau_{nt0}^2 + \tau_{n10}^2)^{-1} \quad \text{für } \sigma_n = 0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

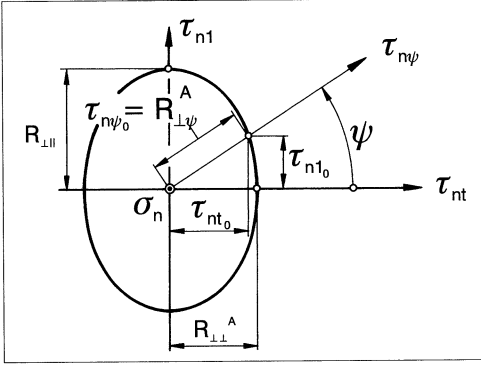


Bild 9.7: Elliptischer Ausgangsquerschnitt bei $\sigma_n = 0$ für alle Master-Bruchkörper

Mit $\tau_{nt_0} = \tau_{n\psi_0} \cos \psi$ und $\tau_{n1_0} = \tau_{n\psi_0} \sin \psi$ an der Stelle $\sigma_n = 0$

und $\tau_{nt} = \tau_{n\psi} \cos \psi$ und $\tau_{n1} = \tau_{n\psi} \sin \psi$ an einer Stelle $\sigma_n \neq 0$

läßt sich $(1/R_{n\psi}^A)^2$ auch folgendermaßen angeben (s. auch (8.19)):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 &= \left(\frac{\cos \psi}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 + \left(\frac{\sin \psi}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 = \left[\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 \right] \tau_{n\psi}^{-2} \\ \left(\frac{1}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 &= \left[\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 \right] (\tau_{nt}^2 + \tau_{n1}^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Von dieser Ellipse an der Stelle $\sigma_n = 0$ gehen nun in negativer σ_n -Richtung gerade bzw. parabelförmige Konturlinien aus, so daß eine Bruchfläche für $\sigma_n < 0$ entsteht.

Master-Bruchkörper mit geradlinig begrenzten Längsschnitten $\psi = \text{const.}$

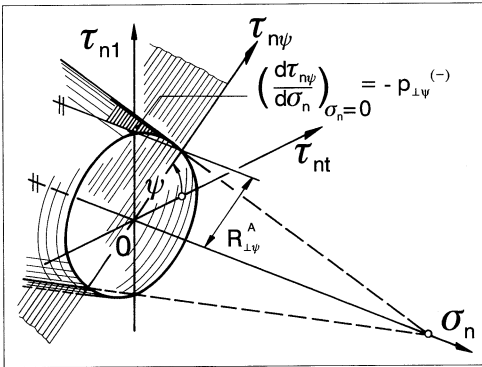


Bild 9.8: Gerade Konturlinie in einem Längsschnitt $\psi = \text{const.}$ einer Master-Bruchfläche für $\sigma_n < 0$

Die Gleichung einer geraden Konturlinie in einem Schnitt $\psi = \text{const.}$, **Bild 9.8**, lautet

$$\tau_{n\psi} = R_{\perp\psi}^A - p_{\perp\psi}^{(-)} \sigma_n \quad \text{oder} \quad \frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für} \quad \sigma_n < 0. \quad (9.19)$$

Mit Hilfe von (9.18) wird hieraus eine sehr einfache Bruchbedingung, nämlich

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0 \quad (9.20)$$

mit $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ nach (9.24) auf S. 147.

Da die Bruchfunktion in Gl. (9.20) bezüglich der Spannungen homogen vom Grad 1 ist, stellt sie die Anstrengung $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ dar. Man kann diese Funktion somit auch zum Aufsuchen des Bruchwinkels θ_{fp} benutzen, indem man das globale Minimum der Funktion $\mathcal{E}(\theta)$ bestimmt.

Master-Bruchkörper mit parabelförmig begrenzten Längsschnitten $\psi = \text{const.}$

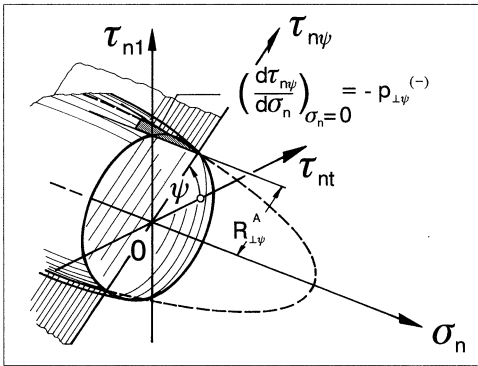


Bild 9.9: Parabolische Konturlinie in einem Längsschnitt $\psi = \text{const.}$ einer Master-Bruchfläche für $\sigma_n < 0$

Die Gleichung einer parabolischen Konturlinie im Schnitt $\psi = \text{const.}$, **Bild 9.9**, lautet

$$\tau_{n\psi}^2 = (R_{\perp\psi}^A)^2 - 2p_{\perp\psi}^{(-)} R_{\perp\psi}^A \sigma_n \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 + 2\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.21)$$

Sie ist nicht homogen bezüglich der Spannungen und kann deshalb in dieser Form nicht zur Bruchwinkelermittlung herangezogen werden.

Wenn $\tau_{n\psi}$ und σ_n mit dem Reservefaktor f_{Res} vergrößert werden, damit die Bruchbedingung erfüllt wird, ergibt sich für f_{Res} die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 f_{Res}^2 + 2\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} f_{Res} \sigma_n = 1.$$

Zur Lösung der Gleichung kann man sich der Gln. (4.8) oder (4.9) auf S. 48 bedienen. Gl. (4.9) ist "angenehmer", weil bei ihr keine Spannungen im Nenner erscheinen. Man erhält:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.22)$$

Mit der Gl. (9.18) ergibt sich aus (9.22) die Bruchbedingung, die zugleich die Anstrengung $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ darstellt:

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für} \quad \sigma_n < 0 \quad (9.23)$$

mit $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ nach (9.24).

An diesem Beispiel ist einmal deutlich geworden, daß verschiedene Bruchfunktionen zur Beschreibung ein und derselben Bruchfläche dienen können. Im vorliegenden Fall waren es die in der zweiten Form der Gl.(9.21) und die in (9.23) enthaltenen Funktionen.

Wahl des Neigungsmaßes $p_{\perp\psi}^{(-)}$ in Abhängigkeit vom Winkel ψ , Interpolationsformel

Die Werte des Neigungsmaßes $p_{\perp\psi}^{(-)}$ für die Längsschnitte $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$, d.h. von $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ sollten – soweit möglich – aufgrund experimenteller Erfahrung gewählt werden. Zwischen $\psi = 0^\circ$ und $\psi = 90^\circ$ muß dann so interpoliert werden, daß die durch die Bruchbedingungen (9.20) oder (9.23) beschriebenen Bruchflächen keine Sprünge aufweisen; sie sollen "glatte Flächen" sein. Das heißt, daß auch die Bruchkurven in Querschnitten $\sigma_n = \text{const.}$ an keiner Stelle einen Knick aufweisen sollten. Dies schränkt die in Betracht kommenden Interpolationsansätze stark ein. Da in den Bruchbedingungen immer nur das Verhältnis $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ erscheint, bietet sich als eine zweckmäßige Lösung an, für dieses Verhältnis folgenden einfachen Interpolationsansatz zu wählen:

$$\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi \quad \text{mit} \quad \psi = \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}. \quad (9.24)$$

Da der Verlauf von $R_{\perp\psi}^A$ über dem Winkel ψ bereits durch (9.18) vorgegeben ist, führt (9.24) zu der folgenden Abhängigkeit des Neigungsmaßes $p_{\perp\psi}^{(-)}$ vom Winkel ψ :

$$p_{\perp\psi}^{(-)} = \left(\frac{p_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi \right) \left[\left(\frac{\cos \psi}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\sin \psi}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.25)$$

Diese Beziehung wird für das praktische Rechnen nicht benötigt; es genügt (9.24).

Die Frage, ob eine Variation von $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ über dem Winkel ψ überhaupt nötig ist, oder ob es genügt, z.B. mit einem von ψ unabhängigen Verhältnis $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ zu rechnen, kann mangels experimenteller Erfahrung noch nicht beantwortet werden. Vermutlich ist für die meisten Fälle der Praxis $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = \text{const.} = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ eine sehr gute Näherung.

9.1.3.3 Sonderfall $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = \text{const.}$

Wenn $p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ ist, und sich das Verhältnis $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ auch mit dem Winkel ψ nicht ändert, ist es belanglos, ob man bei der Entwicklung der Bruchbedingung von der

Vorgabe elliptischer Querschnitte durch die Gln. (9.14) bzw. (9.15) oder von der Vorgabe gerader oder parabelförmiger Längsschnitte durch die Gln. (9.20) bzw. (9.23) ausgeht, denn man gelangt stets zum gleichen Ergebnis. Dies hat seinen Grund darin, daß sich mit $p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel} = (p_{\perp\psi}/R_{\perp\psi}^A)_{\text{const}}$ die Gln. (9.14) und (9.15) folgendermaßen vereinfachen:

$$\left[1 - \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)_{\text{const}} \sigma_n \right]^{-2} \left[\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0, \quad (9.26)$$

$$\left[1 - 2 \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)_{\text{const}} \sigma_n \right]^{-1} \left[\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0. \quad (9.27)$$

Gl. (9.26) ist identisch mit Gl. (9.20), und Gl. (9.27) stimmt mit Gl. (9.23) überein.

In diesem Fall ist der durch die Gl. (9.20) bzw. (9.23) mit $(p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A)_{\text{const}}$ beschriebene Master-Bruchkörper ein Kegel mit elliptischen Querschnitten bzw. ein Paraboloid mit elliptischen Querschnitten an allen Stellen $\sigma_n = \text{const.}$

Für den Fall, daß $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ sich mit dem Winkel ψ ändert, gilt folgendes:

Die Master-Bruchkörper mit elliptischen Querschnitten nach den Gln. (9.14) und (9.15) haben jetzt nur bei $\psi = 0^\circ$ und bei $\psi = 90^\circ$, d.h. in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene und in der (σ_n, τ_{n1}) -Ebene gerade bzw. parabelförmige Konturlinien im Längsschnitt. Bei jedem beliebigen Winkel ψ zwischen 0° und 90° ist die Längsschnitt-Konturlinie nicht gerade bzw. parabelförmig.

Die Master-Bruchkörper mit geraden bzw. parabolischen Längsschnitten nach Gl. (9.20) bzw. (9.24) haben, wenn $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ nicht über dem Winkel ψ konstant ist, nur an der Stelle $\sigma_n = 0$ einen elliptischen Querschnitt; in allen übrigen Schnitten $\sigma_n = \text{const.}$ ist der Querschnitt des Master-Bruchkörpers keine Ellipse.

Ist $R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\parallel}$ und $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$, ergibt sich als Master-Bruchkörper in jedem Fall ein Kreiskegel bzw. ein Rotationsparaboloid mit der σ_n -Achse als Rotationsachse, **Bild 9.10**.

9.2 Bruchbedingung für eine zugbeanspruchte Bruchebene

Ebenso wie schon bei $\sigma_n < 0$ erscheint es zweckmäßig, ein einfaches Polynom für die Bruchkurven in Längsschnitten $\psi = \text{const.}$ zu wählen, damit sich daraus eine gleichfalls einfache Beziehung für die Streckung des Spannungsvektors in der Längsschnittebene $\psi = \text{const.}$ ergibt. In diesem Fall kommen als Bruchkurven, die sowohl der 1. als auch der 3. Aussage der Bruchhypothese entsprechen und gut an experimentell ermittelte (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurven

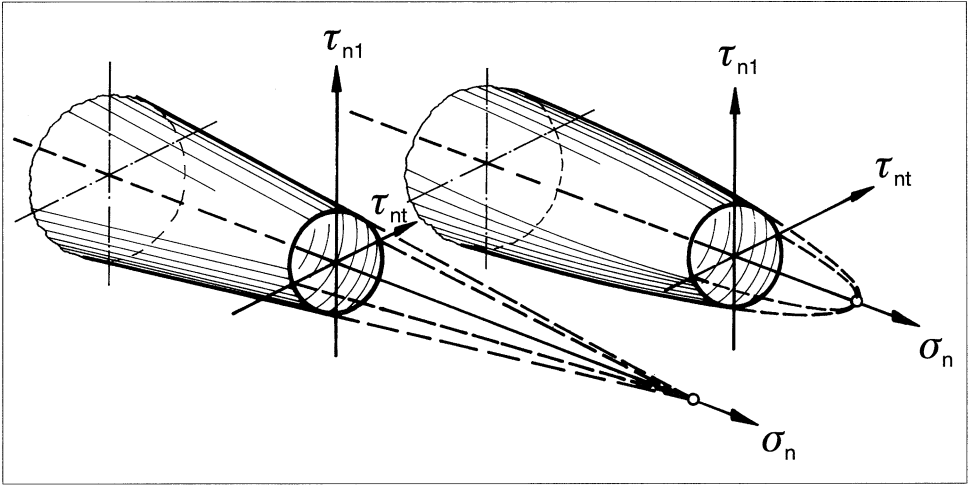


Bild 9.10: Im Sonderfall $R_{\perp\perp}^A = R_{\perp\parallel}$ und $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)}$ wird der Master-Bruchkörper zu einem Kreiskegel bzw. Rotationsparaboloid.

anpaßbar sind, Ellipsen in Betracht, die bei $\sigma_n = R_{\perp}^{(+)}$ die σ_n -Achse schneiden, und deren Mittelpunkte auf der σ_n -Achse im Bereich $\sigma_n < 0$ liegen, **Bild 9.11**.

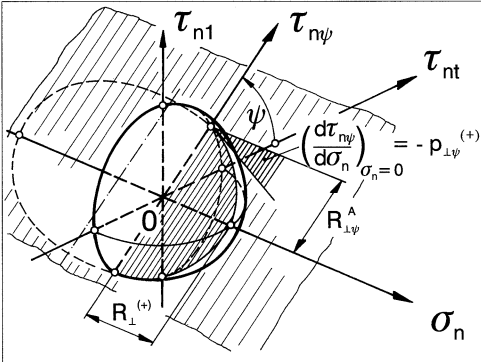


Bild 9.11: Elliptische Konturlinie in einem Längsschnitt $\psi = \text{const.}$ einer Master-Bruchfläche für $\sigma_n \geq 0$

Als Querschnitt des Bruchkörpers bei $\sigma_n = 0$ wird der elliptische Querschnitt nach (9.14) bzw. (9.15) beibehalten, je nachdem, mit welcher Bruchbedingung man im Bereich $\sigma_n < 0$ arbeitet. Damit lautet die Gleichung der elliptischen Schnittkurve für $\psi = \text{const.}$

$$c_2 \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}} \right)^2 + c_1 \frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}} + \left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0 \quad (9.28)$$

mit $(\tau_{n\psi}/R_{\perp\psi}^A)$ nach (9.18) auf S. 145.

Zum Berechnen der Anstrengung nutzen wir Gl. (4.9) auf S. 48 und erhalten:

$$\sqrt{\left(c_2 + \frac{c_1^2}{4}\right) \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n\psi}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2} + \frac{c_1}{2} \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+)}}\right) = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0. \quad (9.29)$$

Für $\tau_{n\psi} = 0$ muß sich $\sigma_n = R_{\perp}^{(+)}$ ergeben. Daraus folgt nach Gl. (9.28)

$$c_2 + c_1 = 1. \quad (9.30)$$

Für die weitere Anpassung empfiehlt es sich wiederum, für die Steigung $d\tau_{n\psi}/d\sigma_n$ der Bruchkurve an der Stelle $\sigma_n = 0$ einen Parameter $-p_{\perp\psi}^{(+)}$ einzuführen, wobei $p_{\perp\psi}^{(+)}$ von $\psi = 0^\circ$ bis $\psi = \pm 90^\circ$ zwischen $p_{\perp\perp}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ variieren kann.

Aus (9.28) oder (9.29) folgt für $\sigma_n = 0$ und $\tau_{n\psi} = R_{\perp\psi}^A$:

$$\frac{d\tau_{n\psi}}{d\sigma_n} = -p_{\perp\psi}^{(+)} = -\frac{c_1}{2} \frac{R_{\perp\psi}^A}{R_{\perp}^{(+)}}. \quad (9.31)$$

Mit (9.30) und (9.31) sowie (9.18) auf S. 145 erhält man schließlich als Bruchbedingung

$$\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0. \quad (9.32)$$

Für $p_{\perp\psi}^{(+)}/R_{\perp\psi}^A$ empfiehlt sich eine gleichartige Interpolation wie (9.24), nämlich

$$\frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(+)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}^A} \sin^2 \psi \quad \text{mit } \psi = \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}. \quad (9.33)$$

Achtung: Vor einer Annahme $p_{\perp\psi}^{(+)}/R_{\perp\psi}^A = \text{const.} = p_{\perp\parallel}^{(+)}/R_{\perp\parallel}^A$ muß gewarnt werden, denn sie kann zu einem Verstoß gegen den 3. Satz der Bruchhypothese führen, wenn bei zu großen $p_{\perp\perp}^{(+)}$ -Werten die Bruchellipse den Grenzkreis (nach Bild 10.5 auf S. 179) berührt oder schneidet. Wenn $p_{\perp\perp}^{(-)} \leq 0,2$ ist, empfiehlt sich, $p_{\perp\perp}^{(+)} = p_{\perp\perp}^{(-)}$ zu setzen.

9.3 Anwendung als Delaminations-Bedingungen

Publikationen zu Delaminations-Bruchbedingungen stimmen darin überein, daß Delaminationen durch die sogenannten interlaminaren Spannungen verursacht werden, die in der Grenzfläche zwischen benachbarten Einzelschichten eines Laminats auftreten. Für die Beurteilung der Delaminationsgefahr (der "interlaminaren Anstrengung") wird von den meisten Autoren – abweichend von deren Vorgehen bei der Beurteilung der Bruchgefahr in der Schicht (der "intralaminaren Anstrengung") – eine wirkebenebezogene Bruchbedingung angesetzt,

d.h. eine solche Bruchbedingung, in der nur die drei in der interlaminaren Grenzfläche wirkenden Spannungen erscheinen. Dabei wird wie in [43] meist ein parabolischer Ansatz

$$\frac{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}{R_{\tau_z}^2} + \frac{\sigma_z}{R_{\sigma_z}} = 1 \quad \text{für } \sigma_z > 0 \quad (9.34)$$

gewählt. R_{τ_z} und R_{σ_z} sind hierin die "interlaminare Schubfestigkeit" bzw. "interlaminare Zugfestigkeit", deren experimentelle Bestimmung allerdings problematisch ist [38]. Die interlaminaren Spannungen $(\sigma_z, \tau_{zy}, \tau_{zx})$ sind auf das globale (x, y, z) -Koordinatensystem des Laminats bezogen, d.h., daß die Bruchbedingung (9.34) keine Rücksicht auf die Faserrichtungen in den beiden aneinandergrenzenden Schichten nimmt. Die Schubspannungen τ_{zx} und τ_{zy} können zu einer "resultierenden" Schubspannung $\tau_{z\Psi}$ zusammengefaßt werden; es gilt

$$\tau_{z\Psi} = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}. \quad (9.35)$$

Bei der Aufstellung der Delaminations-Bruchbedingung (9.34) und ähnlicher Ansätze ist, obwohl dies nirgends explizit zum Ausdruck kommt, offensichtlich die Mohrsche Festigkeitshypothese [54] zugrundegelegt worden, die besagt, daß die Bruchgrenze durch die Spannungen der Bruchebene bestimmt wird. In diesem Buch wird die Mohrsche Festigkeitshypothese selbstverständlich konsequent sowohl auf intralaminare als auch auf interlaminare Brüche angewandt, so daß die Delamination von dort her gesehen überhaupt keiner außergewöhnlichen Behandlung bedarf. Beim allgemeinen räumlichen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{23})$ -Spannungszustand kann der Bruchwinkel beim Zfb nur durch ein numerisches Suchverfahren gefunden werden. Für jede denkbare Lage der Bruchebene zwischen $\theta = -90^\circ$ und $\theta = +90^\circ$ müssen die drei Spannungen $\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)$ berechnet werden, und es muß durch Einsetzen dieser Spannungen in die Bruchbedingung herausgefunden werden, auf welcher Schnittebene die Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ am höchsten ist. Wenn dies bei einem Winkel $\theta_{fp} \neq \pm 90^\circ$ der Fall ist, tritt intralaminarer Bruch ein. Ergibt sich jedoch die höchste schnittwinkelabhängige Anstrengung bei $\theta_{fp} = \pm 90^\circ$, heißt das, daß interlaminarer Bruch eintritt, also Delamination. (Für $\theta = -90^\circ$ und $+90^\circ$ errechnet sich stets die gleiche Anstrengung, denn die beiden Spannungszustände unterscheiden sich allenfalls durch das Vorzeichen bei einer Schubspannung, und dies kann die Anstrengung nicht beeinflussen.)

Aus dem Vorausgegangenen geht hervor, daß es bei der konsequenten Anwendung der Mohrschen Hypothese keiner gesonderten Delaminations-Bedingung bedarf, denn die Delamination wird als Grenzfall des Zwischenfaserbruches aufgefaßt. Allerdings gibt es gute Gründe dafür, in diesem Grenzfall mit etwas herabgesetzten Bruchwiderständen in der Werkzeugebene zu rechnen. Dort, wo zwei UD-Schichten aneinandergrenzen, entstehen bei der Fertigung – durch die Faserkreuzung bedingt – eher Fehlstellen in Form kleiner Lufteinschlüsse

und Fadenwelligkeit als innerhalb der Schichten. Auch werden, mikromechanisch gesehen, an Fadenkreuzungen Spannungskonzentrationen auftreten. Deshalb dürfte es angebracht sein, in dem Grenzfall $\theta = \pm 90^\circ$ die in der Bruchbedingung erscheinenden Bruchwiderstände der Wirkebene durch einen Schwächungsfaktor (weakening factor) der Schichtengrenzfläche (Interface, If) $f_w^{(If)}$ auf etwa 90 bis 80% der intralaminaren Werte herabzusetzen. Ansonsten gehen die Delaminations-Bedingungen aus den Zfb-Bedingungen für den allgemeinen räumlichen Spannungszustand hervor.

Für $\sigma_n \geq 0$ wird (9.32) benutzt und für $\sigma_n < 0$ der parabolische Ansatz nach (9.23).

Mit $\theta = 90^\circ$ wird $\sigma_n = \sigma_3, \tau_{nt} = \tau_{32}, \tau_{n1} = \tau_{31}$ und man erhält:

$$\frac{1}{f_w^{(If)}} \left[\sqrt{\left(\frac{\tau_{32}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(1 - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)} R_{\perp}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \left(\frac{\sigma_3}{R_{\perp}^{(+)}} \right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_3 \right] = 1 \text{ für } \sigma_3 \geq 0, \quad (9.36)$$

$$\frac{1}{f_w^{(If)}} \left[\sqrt{\left(\frac{\tau_{32}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \sigma_3^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_3 \right] = 1 \text{ für } \sigma_3 < 0, \quad (9.37)$$

$$\text{mit } \frac{p_{\perp\psi}^{(\pm)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(\pm)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(\pm)}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi \quad \text{und} \quad \psi = \arctan \frac{\tau_{31}}{\tau_{32}}. \quad (9.38)$$

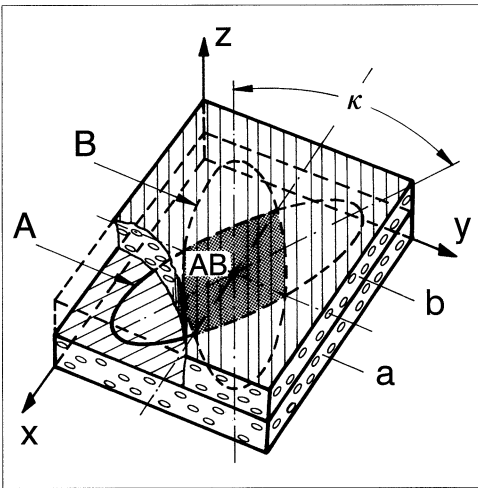


Bild 9.12: Elliptische (τ_{32}, τ_{31}) -Bruchkurven A und B der Grenzschichten zweier benachbarter UD-Schichten a und b. Für die Delaminationsfestigkeit gegenüber einer interlaminaren Schubspannung $\tau_{z\psi}$ ist der Überlappungsbereich AB der beiden Bruchellipsen maßgebend. (κ ist der Kreuzungswinkel der Faserrichtungen der beiden Schichten).

Bruchkurven für $\sigma_3 = \text{const.}$ stellen bei $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = \text{const.}$ Ellipsen dar, **Bild 9.12**. Wenn sich die Fasern zweier benachbarter UD-Schichten unter dem Winkel κ kreuzen, bilden auch

die Hauptachsen der Bruchellipsen der beiden Grenzschichten einen Winkel κ . Bei der Betrachtung der Delaminationsgefahr müssen die beiden Bruchellipsen überlagert werden, denn der Bruch kann entweder in der "Grenzschicht" der einen oder der anderen UD-Schicht erfolgen, je nachdem welche Schicht der auftretenden Schubspannung $\tau_{z\Psi}$ den kleineren Bruchwiderstand entgegensetzt. Wenn keine Richtungsabhängigkeit des Schub-Bruchwiderstands zu erwarten wäre, hätte es in den Bruchbedingungen (9.36) und (9.37) gar nicht zweier Schubspannungsterme, τ_{32} und τ_{31} , bedurft, sondern man hätte von folgender Beziehung Gebrauch machen können:

$$\tau_{z\Psi} = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{\tau_{32a}^2 + \tau_{31a}^2} = \sqrt{\tau_{32b}^2 + \tau_{31b}^2}. \quad (9.39)$$

Die Indizes a und b dienen zur Kennzeichnung der beiden benachbarten Schichten, deren Koordinaten-Richtungen x_{1a}, x_{1b} nicht zusammenfallen, sondern sich um den Faserkreuzungswinkel κ unterscheiden.

Als Ergebnis der Betrachtung ist festzuhalten, daß die Delaminations-Bedingungen, was die "physikalische Fundierung" anbelangt, das gleiche Niveau wie die 3D-Zfb-Bedingungen haben, und daß bei der numerischen Zfb-Untersuchung automatisch die Delaminations-Anstrengung mitberechnet wird. Dazu muß man aber die Spannungen in zusammengehörigen Punkten der "Grenzschichten" zweier benachbarter UD-Schichten analysieren.

Die "Festigkeits"-Bruchbedingungen (9.36) und (9.37) sollten nicht auf stark inhomogene Spannungszustände mit hohen örtlichen Spannungsspitzen, wie sie an freien Rändern auftreten [82], angewandt werden. Sie würden möglicherweise "Bruch" vorhersagen, obwohl für die Entwicklung des Bruches die nötige Energiefreisetzung fehlt. In solchen Fällen rechnet man gelegentlich mit bruchrelevanten Durchschnittsspannungen (average stress failure criteria), die dann in Bruchbedingungen wie (9.36), (9.37) eingesetzt werden. Dies erfordert aber viel Erfahrung.

Für die Beurteilung der Delaminationsgefahr, die von relativ gleichmäßig über die Schichten-Grenzfläche verteilten interlaminaren Spannungen ausgeht, wie sie in großflächigen Krafteinleitungen, in ungestörten aber stark gekrümmten Laminatpartien oder unter Querkraftbelastung auftreten, sind die Gln. (9.36) und (9.37) gut geeignet. Die Erfahrung lehrt aber, daß sich – auch bei dickwandigen Bauteilen – äußerst selten Delaminationen errechnen, bevor sich Zwischenfaserbrüche eingestellt haben.

9.4 Sekundäre Einflüsse

9.4.1 Einfluß der faserparallelen Spannung

Im Abschnitt 5.1.3 ist dargelegt worden, warum beim Auftreten hoher σ_1 -Spannungen mit einer Herabsetzung ("Degradation") der Bruchwiderstände der Wirkebene zu rechnen ist. Man

stellt sich eine homogene, bezüglich der Faserrichtung rotations-symmetrische Mikroschädigung durch die faserparallele Spannung vor. Dieser kann dadurch Rechnung getragen werden, daß alle Bruchwiderstände der Wirkebene in einer Bruchbedingung mit dem gleichen Schwächungsfaktor (weakening factor) $0 < f_w(\sigma_1) < 1$ erniedrigt werden. Seine Abhängigkeit von σ_1 muß experimentell ermittelt und dann durch eine einfache Funktion approximiert werden. Diese sollte so angesetzt werden, daß sie erst bei einer Annäherung an den Faserbruch merklich wirksam wird. Eine einfache Funktion, die hierfür in Frage kommt, ist beispielsweise

$$f_w(\sigma_1) = 1 - \left(\left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1d}} \right| \right)^n \quad \text{bzw. linearisiert} \quad f_w(\sigma_1) = 1 - \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} \right| \quad (9.40)$$

mit einem hohen Exponenten n , wobei sowohl der für die Degradation maßgebende Spannungswert σ_{1d} als auch der Exponent n experimentell bestimmt werden müßten. In [83] wurde $|\sigma_{1d}| = 1,1R_{||}$ und $n = 6$ bis 8 angenommen. σ_{1D} wird iterativ verändert.

Eine Alternative hierzu ist bereits im Abschnitt 5.1.3 vorgestellt worden. Dort wurde bis $|\sigma_1| = 0,7R_{||}$ überhaupt keine Degradation vorgesehen und anschließend eine durch einen elliptischen Kurvenast beschriebene, Bild 5.5 auf S. 70.

In beiden Fällen ist $f_w(\sigma_1)$ eine recht einfache Funktion. Wenn man sie aber in die Bruchfunktion der Gln. (9.20), (9.23), (9.32) einführt, bleiben diese bezüglich der Spannungen $(\sigma_1, \sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ nicht mehr homogen. Die Homogenität vom Grad 1 muß aber aufrechterhalten werden, wenn die Bruchfunktionen weiterhin zur direkten Berechnung der Zfb-Anstrengung benutzt werden sollen.² Dann darf σ_1 nur in der 1. Potenz erscheinen, und der in Wirklichkeit nicht-lineare Zusammenhang zwischen f_w und σ_1 muß linearisiert und durch Iteration berücksichtigt werden. **Bild 9.13** zeigt hierzu zwei Möglichkeiten auf.

(a): f_w wird nur in dem gerade errechneten Funktionswert angepaßt,

(b): f_w wird im Funktionswert und in der Steigung f'_w angepaßt.

Die Variante (b) erfordert weniger Iterationen. Es müssen aber für den jeweils bei der Rechnung erreichten Wert σ_1 und den zugehörigen Wert f_w (nach der richtigen Funktion) die Hilfsgrößen f_{w_0} und $|f'_w|$ berechnet werden, s. z.B. Gln. (5.17) und (5.18) auf S. 70 und 71. Es wird so lange iteriert, bis f_{w_0} und $|f'_w|$ sich nicht mehr nennenswert ändern.

Mit dem Schwächungsfaktor f_w nehmen die Bruchbedingungen folgende Form an:

$$\frac{1}{f_w} F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1} \dots) = 1. \quad (9.41)$$

²Bei der Ermittlung des Bruchwinkels θ_{fp} durch Aufsuchen des globalen Maximums der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ stört der Term mit σ_1 nicht, denn er fällt bei der Bildung von $d\mathcal{E}(\theta)/d\theta$ heraus, weil σ_1 nicht von θ abhängt. Anschließend wird aber die Anstrengung $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ zur Bestimmung der Rißbildungsgrenze benötigt.

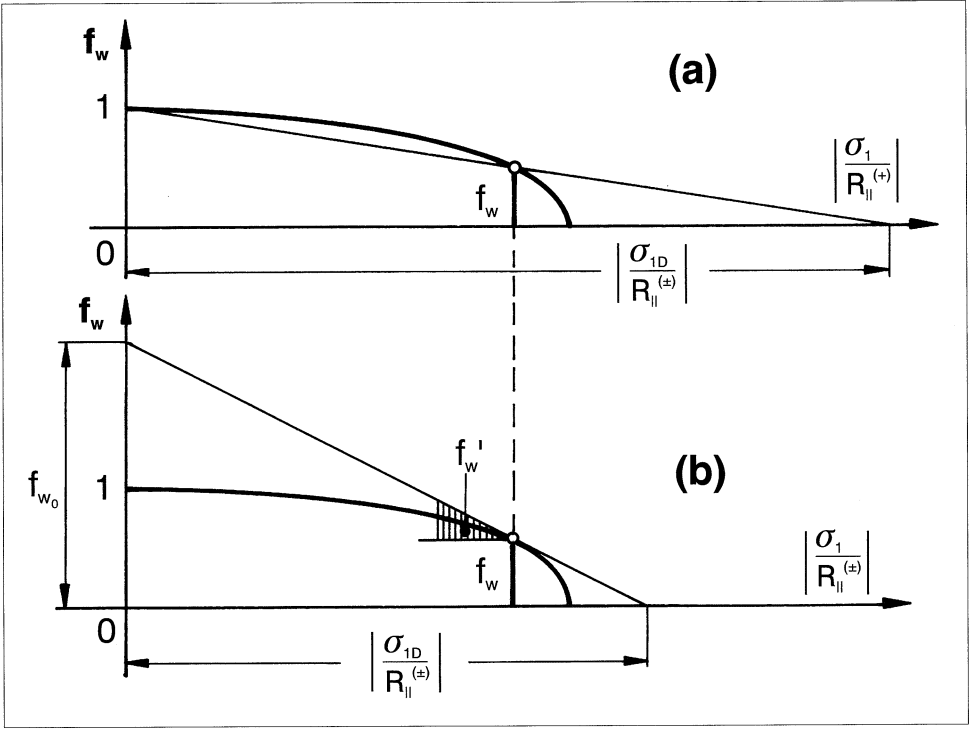


Bild 9.13: Linearisierung des Einflusses der faserparallelen Spannung σ_1 auf den Zwischenfaserbruch. (a) Anpassung nur im Funktionswert f_w (b) Anpassung im Funktionswert f_w und in der Steigung f'_w

Nach Bild 9.13b ist

$$f_w = f_{w0} - \frac{f_{w0}}{\sigma_{1D}} \sigma_1 = f_{w0} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} \right). \quad (9.42)$$

Damit wird aus den Bruchbedingungen (9.20) bzw. (9.23) bzw. (9.32):

$$\frac{1}{f_{w0}} \left(\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0, \quad (9.43)$$

$$\frac{1}{f_{w0}} \left(\sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \sigma_n^2 + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} = 1 \quad \text{für } \sigma_n < 0, \quad (9.44)$$

$$\frac{1}{f_{w0}} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)}} - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} = 1 \quad \text{für } \sigma_n \geq 0. \quad (9.45)$$

Achtung: Anders als eine Festigkeit ist σ_{1D} eine vorzeichenbehaftete Größe; bei $\sigma_1 > 0$ ist σ_{1D} positiv, bei $\sigma_1 < 0$ negativ!

Die Gln. (9.41) bis (9.45) zeigen, daß die Master-Bruchflächen, die den Einfluß von σ_1 berücksichtigen, durch geometrisch ähnliche Verkleinerung mit dem Faktor f_w aus den Master-Bruchflächen, in denen σ_1 nicht enthalten ist, hervorgehen.

Wenn der Einfluß von σ_1 in der beschriebenen Weise erfaßt werden kann, beeinflusst die faserparallele Spannung σ_1 das Ergebnis der Bruchwinkelermittlung nicht, weil σ_1 für alle Schnittebenen mit Winkeln $-90^\circ \geq \theta \geq +90^\circ$ gleich groß ist, vgl. Transformationsformel (8.1). Man kann also den Bruchwinkel θ_{fp} in gewohnter Weise suchen, ohne auf σ_1 Rücksicht zu nehmen, d.h., daß man für die Bruchwinkelsuche $\sigma_1 = 0$ setzen kann.

9.4.2 Einfluß von Eigenspannungen

Im Abschnitt 5.4 wurde am Beispiel der (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung aufgezeigt, wie man bei der Anwendung von Bruchbedingungen grundsätzlich verfährt, wenn Eigenspannungen berücksichtigt werden sollen. Bei den Bruchbedingungen im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum geht man genauso vor. Nur wenn man nicht unter der Voraussetzung $(p_{\perp\psi}/R_{\perp\psi}^A) = \text{const.}$ rechnen kann, ergibt sich eine Besonderheit. Dies soll hier kurz skizziert werden.

Der Zfb-relevante Spannungsvektor $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$ setzt sich aus einem nach Größe und Richtung konstanten Eigenspannungsvektor (residual stress, r) und einem mit der Höhe der Belastung anwachsenden Lastspannungsvektor (load dependent stress, l) zusammen.

Aus der Transformationsformel (8.1) ergibt sich somit (9.46)

$$\begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \\ \tau_{n1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs & 0 & 0 \\ -sc & sc & (c^2 - s^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_2^{(l)} \\ \sigma_3^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_2^{(l)} \\ \tau_{23}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{23}^{(l)} \\ \tau_{31}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{31}^{(l)} \\ \tau_{21}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{21}^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(i)} \\ \tau_{nt}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{nt}^{(l)} \\ \tau_{n1}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{n1}^{(l)} \end{pmatrix}.$$

Obwohl der Eigenspannungs-Vektor $\{\sigma_n^{(r)}, \tau_{nt}^{(r)}, \tau_{n1}^{(r)}\}$ und der von der Belastungshöhe abhängige Vektor $\{f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(r)}, f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{nt}^{(r)}, f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{n1}^{(r)}\}$ im Normalfall verschiedene Richtungen haben³, wird der zum Bruch führende zusammengesetzte Vektor $\{\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}\}$ genau so behandelt, als wenn er – wie bisher stets vorausgesetzt – aus dem Koordinatenursprung geradlinig herausgewachsen wäre, bis er die Master-Bruchfläche berührt. D.h., man rechnet

³Anders verhält es sich beim *Puck/Schürmann*-Verfahren, bei dem gezielt dem Zfb entgegenwirkende Eigenspannungen eingebracht werden, und zwar solche, wie sie im Betriebszustand auftreten, jedoch mit umgekehrten Vorzeichen. Bei Betriebsbelastung durchläuft die resultierende Spannung den Nullpunkt [41].

unabhängig vom Lastweg immer mit derselben Master-Bruchfläche, weil man den Einfluß des Lastwegs auf die Bruchkurve nicht kennt.

Der wesentliche Unterschied gegenüber einem Spannungszustand ohne Eigenspannungen, besteht darin, daß die Verhältnisse der Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ untereinander nicht konstant sind, sondern von der Höhe der lastbedingten Spannungen, also von $f_{Res}^{(l)}(\theta)$ abhängen, d.h., daß die Richtung des Vektors sich mit $f_{Res}^{(l)}(\theta)$ ändert. Deshalb kann in einem ersten Rechenschritt für $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ bzw. $p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$ nur ein vorläufiger Wert angesetzt werden, weil der durch den Winkel $\psi = \arctan(\tau_{n1}/\tau_{nt})$ bestimmte Längsschnitt unter dem Winkel ψ , in dem der Vektor auftritt, der schließlich mit seiner Spitze die Master-Bruchfläche berührt, nicht von vornherein bekannt ist. Anschließend muß dann iteriert werden.

Auch die Fall-Unterscheidung, $\sigma_n \geq 0$ oder $\sigma_n < 0$, ist etwas schwieriger geworden, weil nunmehr der Wert von $\sigma_n = \sigma_n^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(l)}$ über die zu wählende Bruchbedingung entscheidet, der von $f_{Res}^{(l)}$ abhängt.

Aus den Gln. (9.23) für das Bruch-Paraboloid bzw. (9.32) für das Bruch-Ellipsoid erhält man unter den getroffenen Voraussetzungen quadratische Gleichungen für den schnittwinkelabhängigen Reservefaktor $f_{Res}^{(l)}(\theta)$:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\tau_{nt}^{(l)}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^{(l)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] (f_{Res}^{(l)}(\theta))^2 + 2 \left[\frac{\tau_{nt}^{(r)} \tau_{nt}^{(l)}}{(R_{\perp\perp}^A)^2} + \frac{\tau_{n1}^{(r)} \tau_{n1}^{(l)}}{R_{\perp\parallel}^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n^{(l)} \right] f_{Res}^{(l)}(\theta) + \\ & + \left(\frac{\tau_{nt}^{(r)}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^{(r)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + 2 \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n^{(r)} = 1 \quad \text{für } \sigma_n^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(l)} < 0 \end{aligned} \quad (9.47)$$

mit $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A = \text{const.}$ bzw. nach Gl. (9.24),

$$\begin{aligned} & \left[c_2 \left(\frac{\sigma_n^{(l)}}{R_{\perp\perp}^{(+)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}^{(l)}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^{(l)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 \right] (f_{Res}^{(l)}(\theta))^2 + \\ & + 2 \left[c_2 \frac{\sigma_n^{(r)} \sigma_n^{(l)}}{(R_{\perp\perp}^{(+)})^2} + \frac{\tau_{nt}^{(r)} \tau_{nt}^{(l)}}{(R_{\perp\perp}^A)^2} + \frac{\tau_{n1}^{(r)} \tau_{n1}^{(l)}}{R_{\perp\parallel}^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n^{(l)} \right] f_{Res}^{(l)}(\theta) + \\ & + c_2 \left(\frac{\sigma_n^{(r)}}{R_{\perp\perp}^{(+)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}^{(r)}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}^{(r)}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + 2 \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n^{(r)} = 1 \quad \text{für } \sigma_n^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\sigma_n^{(l)} \geq 0 \end{aligned} \quad (9.48)$$

mit $c_2 = 1 - 2R_{\perp\perp}^{(+)} p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$ und $p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$ nach Gl. (9.33).

Wenn angenommen werden darf, daß die Werte der Größen $p_{\perp\perp}^{(-)} / R_{\perp\perp}^A$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)} / R_{\perp\parallel}$ nicht sehr verschieden sind, wird man bei der Benutzung der obigen Gl. (9.47) zum Aufsuchen des minimalen schnittwinkelabhängigen Reservefaktors $f_{Res}^{(l)}(\theta_{fp})$ mit einem konstanten mittleren Wert $p_{\perp\psi}^{(-)} / R_{\perp\psi}^A$ oder auch einfach mit $p_{\perp\parallel}^{(-)} / R_{\perp\parallel}$ rechnen.

Unterscheiden sich die Werte $p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ erheblich und werden höhere Anforderungen an die Genauigkeit gestellt, so muß iteriert werden. Verschiedene Iterationsprozeduren sind vorstellbar; grundsätzlich sollte man aber den Aufwand nicht zu weit treiben, denn die Verlässlichkeit der Rechenergebnisse ist bereits dadurch beeinträchtigt, daß der Lastweg in Wirklichkeit nicht mehr geradlinig vom Nullpunkt zum Bruchpunkt verläuft.

Zweckmäßig erscheint das folgende Vorgehen. Der Winkel ψ , unter dem der Längsschnitt beim gerade durchgeführten Rechenschritt liegt, folgt aus

$$\psi = \arctan \frac{\tau_{n1}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{n1}^{(l)}}{\tau_{nt}^{(r)} + f_{Res}^{(l)}(\theta)\tau_{nt}^{(l)}}. \quad (9.49)$$

Beim ersten Rechenschritt wird zur Bestimmung des Winkels ψ zunächst $f_{Res}^{(l)}(\theta) = 1$ gesetzt, d.h. es wird mit den aus der Spannungsanalyse vorliegenden Eigenspannungen und Lastspannungen gerechnet. Aus der erstmaligen Lösung der quadratischen Gln. (9.47) und (9.48) erhält man damit einen ersten Anhaltspunkt für den tatsächlichen Wert von $f_{Res}^{(l)}(\theta)$. Dann wird im nächsten Rechenschritt mit dem Wert für $f_{Res}^{(l)}(\theta_{fp})$ gerechnet, der sich soeben mit den Lösungen der quadratischen Gleichung (9.47) bzw. (9.48) ergeben hat, u.s.w.. Da der Einfluß von $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ bzw. $p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$ auf das Ergebnis für $f_{Res}^{(l)}(\theta_{fp})$ nicht sehr stark ist, dürften 1 bis 3 Iterationen genügen.

Ungewöhnlich ist neben der andersartigen Fallunterscheidung und der iterativen Annäherung an die richtigen Werte für $p_{\perp\psi}^{(-)}/R_{\perp\psi}^A$ bzw. $p_{\perp\psi}^{(+)} / R_{\perp\psi}^A$, daß das Vorzeichen der lastbedingten Schubspannungen $\tau_{nt}^{(l)}$ und $\tau_{n1}^{(l)}$ Einfluß auf die Bruchgefahr erhält, sobald Schubeligenspannungen $\tau_{nt}^{(r)}, \tau_{n1}^{(r)}$ auftreten (s. die gemischten Glieder $\tau^{(r)}\tau^{(l)}$). Deshalb muß sorgfältig auf die Vorzeichen der Eigen- und Last-Schubspannungen geachtet werden!

Wenn aus einer der obigen Gleichungen der Reservefaktor $f_{Res}^{(l)}(\theta_{fp})$ für die lastbedingten Spannungen berechnet worden ist, macht es keinen Sinn, dessen Kehrwert als "Anstrengung" zu berechnen, vgl. Diskussion im Abschnitt 5.4.

Eigentlich müßte man – zusätzlich zur hier beschriebenen Kurzzeit-Bruchanalyse – auch noch eine Langzeit-Bruchanalyse für den Eigenspannungszustand durchführen.

Bei einer allgemeinen schwingenden Beanspruchung tritt die hier aufgezeigte Eigenspannungs-Problematik nicht auf, denn in diesem Fall werden die Eigenspannungen den ohnehin zu berücksichtigenden ruhenden Last-Mittelspannungen zugeschlagen [25].

9.5 Anwendungsempfehlungen

9.5.1 Allgemeine Hinweise und Empfehlungen

Grundsätzlich empfiehlt es sich – wie auch aus den folgenden Ausführungen deutlich wird – sich vor der Anwendung von Bruchbedingungen gründlich mit ihrem theoretischen Hinter-

grund vertraut zu machen, damit man ihre Aussagekraft, aber vor allem auch die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit richtig einzuschätzen vermag.

Mit den aufgestellten Bruchbedingungen steht nun ein äußerst anpassungsfähiges Modell mit bis zu sieben Parametern, nämlich $R_{\perp}^{(+)}$, $R_{\perp\perp}^A$, $R_{\perp\parallel}$, $p_{\perp\perp}^{(+)}$, $p_{\perp\parallel}^{(+)}$, $p_{\perp\perp}^{(-)}$, $p_{\perp\parallel}^{(-)}$, zur Verfügung. Ob man in der Praxis tatsächlich alle vier p-Parameter benötigt, müssen die geplanten Experimente und Beispielrechnungen [83] zeigen. Vermutlich wird man bei den Werten $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ normalerweise von der Kopplung $p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A = p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}$ Gebrauch machen und außerdem meistens $p_{\perp\perp}^{(+)} = p_{\perp\perp}^{(-)}$ setzen. Damit enthält das Modell nur noch fünf Parameter.

Für den Fall $\sigma_n < 0$ kommen die "klassischen" Ansätze (9.14) und (9.15) mit elliptischen Querschnitten weniger in Betracht, weil sie einen unnötigen Rechenaufwand verursachen. Man wird ihnen wohl stets die geschickteren Ansätze für Längsschnitte $\psi = \text{const.}$, nämlich (9.20) und vor allem (9.23), vorziehen. Diese reduzieren den Rechenaufwand erheblich und sind aus physikalischer Sicht genau so akzeptabel wie die "klassischen" Ansätze nach (9.14) und (9.15). Voraussichtlich wird man bei den allermeisten Rechnungen aber $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$ annehmen dürfen, womit die obige Unterscheidung ohnehin gegenstandslos wird, und sich wesentliche Vereinfachungen ergeben. Grundsätzlich erscheint der parabolische Ansatz (9.23) realistischer als der lineare Ansatz (9.20). Er hat gegenüber (9.20) u.a. noch den Vorteil, daß keine negativen Werte für $\mathcal{E}(\theta)$ und $f_{Res}(\theta)$ auftreten können. Werte $f_{Res}(\theta) < 0$ würden eine Umkehr des Richtungssinnes aller Spannungen fordern. Eine solche ist aber für σ_n nicht zulässig, weil die in Betracht kommenden Bruchbedingungen jeweils nur für $\sigma_n < 0$ oder $\sigma_n \geq 0$ gelten. Somit spricht einiges für eine bevorzugte Anwendung des parabolischen Ansatzes nach Gl. (9.23).

In der **Tabelle 9.1** sind die wichtigsten Beziehungen für die Anwendungspraxis zusammengestellt. Dabei wurde davon ausgegangen, daß aus dem einachsigen Quer-Druckversuch nicht nur die Quer-Druckfestigkeit $R_{\perp}^{(-)}$, sondern auch der auftretende Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ bekannt ist. In diesem Fall kann man den Bruchwiderstand $R_{\perp\perp}^A$ und den Parameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$ aus $R_{\perp}^{(-)}$ und $\Theta_{fp}^{(-)}$ berechnen. Wenn der Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ nicht bekannt ist, muß man $R_{\perp\perp}^A$ aus $R_{\perp}^{(-)}$ und einen angenommenen Wert für $p_{\perp\perp}^{(-)}$ errechnen, z.B. aus $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$.

In dieser Arbeit ist außer bei der Behandlung von Eigenspannungen vorausgesetzt worden, daß die Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ und damit auch $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ unabhängig von ihren Absolutwerten in einem unveränderlichen Verhältnis zueinander stehen. Das bedeutet u.a. auch, daß bei Versuchen zur Ermittlung werkstoffabhängiger Parameter ebenso wie bei Bruchversuchen zur Überprüfung der Brauchbarkeit einer Bruchbedingung diese Voraussetzung gleichfalls erfüllt werden muß. Damit ist der "Lastpfad" strikt vorgeschrieben. Diese Grundvoraussetzung muß unbedingt beachtet werden, denn es ist durchaus eine Abhängigkeit der Ergebnisse von Bruchversuchen vom Lastpfad zu erwarten [66].

Tabelle 9.1: *Zusammenstellung der wichtigsten Beziehungen für die Anwendungspraxis*

Bruch- bedin- gung	für $\sigma_n \geq 0$	$\mathcal{E} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_{\perp}^{(+)} - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A}} - \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(+)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1$	
	für $\sigma_n < 0$	linearer Druckspannungs-Einfluß	parabolischer Druckspannungs-Einfluß
Neigungs- maß $p_{\perp\perp}^{(-)}$		$\mathcal{E} = \sqrt{\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{n1}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(\frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n\right)^2} + \frac{p_{\perp\psi}^{(-)}}{R_{\perp\psi}^A} \sigma_n = 1$	
		$p_{\perp\perp}^{(-)} = -\cotan 2\Theta_{fp}^{(-)}$	$p_{\perp\perp}^{(-)} = -\frac{\cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{1 + \cos 2\theta_{fp}^{(-)}}$
Bruchwiderstand der Wirkebene $R_{\perp\perp}^A$		$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \cotan \Theta_{fp}^{(-)} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2} \left(\sqrt{1 + p_{\perp\perp}^{(-)^2}} - p_{\perp\perp}^{(-)} \right)$	$R_{\perp\perp}^A = -\frac{R_{\perp}^{(-)} \cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{2p_{\perp\perp}^{(-)}} = \frac{R_{\perp}^{(-)}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})}$
Empfohlene Interpolation		$\frac{p_{\perp\psi}^{(\pm)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(\pm)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}}{R_{\perp\parallel}} \sin^2 \psi$	mit $\psi = \arctan \frac{\tau_{n1}}{\tau_{nt}}$

Die auf der linken Seite der Bruchbedingung stehenden, den Bruchzustand charakterisierenden Funktionen $F(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ können als schnittwinkelabhängige Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ zur Ermittlung des Bruchwinkels θ_{fp} benutzt werden.
Möglichkeiten zur Berücksichtigung eines Einflusses von σ_1 finden sich im Abschnitt 9.4.1.

In der Praxis der Bruchanalyse von Laminaten wird man diese in der Theorie vorausgesetzte Idealbedingung selten vorfinden. Sie ist bereits verletzt, wenn Stoffgesetze nicht-linear sind, oder wenn Eigenspannungen auftreten. Dies ist ein generelles Problem bei der Anwendung von Bruchbedingungen beliebiger Art und kein spezielles Problem der hier vorgestellten Bruchbedingungen.

Grundsätzlich sollten die neuen Bruchbedingungen nicht nur für zügig von "null" bis zum Bruch gesteigerte Belastungen anwendbar sein, aber sicher wird man bei der experimentellen Überprüfung der Bruchbedingungen mit dieser Beanspruchungsart beginnen [15,84]. Hinweise zu speziellen Problemen und Lösungsmöglichkeiten bei schwingender Beanspruchung können der Arbeit [25] und den Ausführungen im Abschnitt 11.1 entnommen werden.

Bei der Beurteilung von Ergebnissen, die mit Bruchbedingungen erhalten werden, sollte stets folgendes bedacht werden: Eine Bruchbedingung in der hier vorgestellten Form kann einen Bruch der UD-Schicht anzeigen, jedoch nichts über eine Schädigung im Mikrobereich aussagen, die möglicherweise lange vor Erreichen der Bruchgrenze stattfindet. So kann eine Erstbelastung bis nahe an die Bruchgrenze natürlich zur Folge haben, daß bei einer Zweitbelastung bis zum Bruch eine herabgesetzte Bruchgrenze gefunden wird. Grundsätzlich betrachtet ist es durchaus denkbar, daß sich die vorgestellten Bruchbedingungen so modifizieren lassen, daß mit ihnen auch Schädigungen bei kombinierter Beanspruchung behandelt werden können, wenn statt der Festigkeitsparameter Schädigungsgrenzspannungen als Parameter benutzt werden. Das ist aber nicht Gegenstand der hier angestellten Betrachtungen.

9.5.2 Vereinfachung bei 2D-Beanspruchung

Obwohl "2D"-Beanspruchung nur ein Kürzel für ebene Beanspruchung ist, wird hier – wie allgemein üblich – darunter der Sonderfall der ebenen $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Beanspruchung verstanden, der in der Faserverbundtechnik die allergrößte Bedeutung hat. Wenngleich die vorgestellte Forschungsarbeit ursprünglich in erster Linie auf 3D-Beanspruchung ausgerichtet war, haben sich in ihrem Verlauf überraschende Perspektiven für die 2D-Beanspruchung ergeben. Es hat sich als sehr empfehlenswert erwiesen, bei 2D-Beanspruchung die Parameterkopplung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$ vorzusetzen, weil sich damit erstaunliche Vereinfachungen erzielen lassen. Dies wird im folgenden erläutert.

Für die Fälle, in denen der Bruchwinkel $\theta_{fp} = 0^\circ$ ist, d.h. in denen der Bruch in der Wirkebene der Spannungen σ_2 und τ_{21} erfolgt, kann man die ursprünglich mit $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ angesetzten Bruchbedingungen ohne weiteres auch mit σ_2 und τ_{21} schreiben, denn es ist $\sigma_n = \sigma_2, \tau_{nt} = 0$ und $\tau_{n1} = \tau_{21}$. Dies ist in Abschnitt 5.1.2 für die Modi A und B geschehen. Unter der Voraussetzung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}) = (p/R) = \text{const.}$ ergibt sich auch für den durch "schräge" Brüche ($\theta_{fp} \neq 0$) gekennzeichneten Modus C eine unerwartete Vereinfachung, so daß sich ein numerisches Suchen des Bruchwinkels θ_{fp} erübrigt. Auf

das Bestehen einer Vereinfachungsmöglichkeit wiesen Ergebnisse des Programms *Brukan* [77] hin, die zeigten, daß die Bruchebene sich immer gerade so weit aus der Wirkebene von σ_2 und τ_{21} herausdreht, daß die auf der Bruchebene im Augenblick des Bruches wirkende Druckspannung σ_n (unabhängig von der Höhe der Druckspannung σ_2 beim Bruch) stets einen konstanten Wert annimmt. Beim parabolischen Ansatz und unter der Voraussetzung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\parallel\parallel}^{(-)}/R_{\parallel\parallel}) = (p/R) = \text{const.}$ ist bei $\sigma_1 = 0$ der konstante Wert der Druckspannung auf der Bruchebene im Augenblick des Bruches $\sigma_n = -R_{\perp\perp}^A$, **Bild 9.14**.

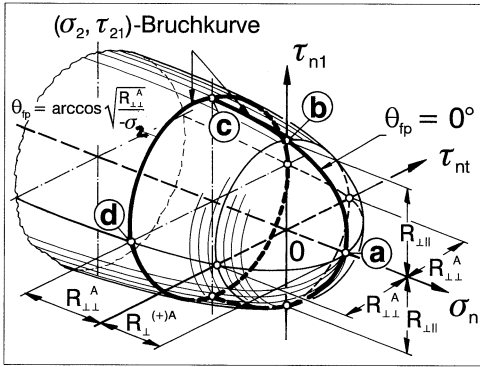


Bild 9.14: Verlauf der Bruch-Linie für (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung auf der Master-Bruchfläche mit elliptischen Querschnitten und parabolischen Längsschnitten bei vorausgesetzter Parameterkopplung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\parallel\parallel}^{(-)}/R_{\parallel\parallel})$

Dies gilt unabhängig von der Größe des sich im Bereich der Modus C einstellenden Bruchwinkels θ_{fp} . Damit wird der beim Bruch nach Modus C zu erwartende Bruchwinkel auf eine überraschend einfache Weise berechenbar, denn nach (8.1) ist $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta_{fp}$, und folglich ergibt sich mit der beim Bruch wirkenden Spannung $\sigma_n = -R_{\perp\perp}^A$ für den Bruchwinkel

$$\theta_{fp} = \arccos \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_2)}} \quad \text{für Modus C bei } \sigma_1 = 0. \quad (9.50)$$

Achtung: Hierin ist σ_2 die **beim Bruch** nach Modus C erreichte Spannung.

Damit läßt sich nun auch für den Bruch-Modus C eine einfache analytische Lösung für die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve angeben; sie ist als Gl. (5.3) in der Tabelle 5.1 auf S. 62 erschienen und stellt eine Ellipse dar, die – unabhängig von den sonstigen Werkstoffeigenschaften – durch den Punkt $(\sigma_2 = -R_{\perp\perp}^A; \tau_{21} = 0)$ und durch den Koordinaten-Nullpunkt verläuft, Bild 5.1 auf S. 61. Wenn man für ein vorliegendes Verhältnis τ_{21}/σ_2 mit Hilfe der Gl. (5.3) die Druckspannung σ_2 beim Bruch nach Modus C bestimmt hat, kann man mit Gl. (9.50) den Bruchwinkel θ_{fp} berechnen.

Der mathematisch interessierte Leser findet hier zu dieser "Entdeckung" den Beweis. Der Ausgangspunkt hierfür ist der parabolische Ansatz (9.23), der sich unter der Voraussetzung $(p/R) = \text{const.}$ und mit $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta; \tau_{nt} = -\sigma_2 \sin \theta \cos \theta$ und $\tau_{n1} = \tau_{21} \cos \theta$ bei

Berücksichtigung eines Einflusses von σ_1 nach Gln. (9.42) und (9.44) mit den Abkürzungen

$$a = \left[\left(\frac{p}{R} \right)^2 - \left(\frac{1}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 \right] \sigma_2^2 \quad ; \quad b = \left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 \quad ; \quad c = \left(\frac{p}{R} \right) \sigma_2$$

folgendermaßen schreiben läßt:

$$\mathcal{E}(\theta_{fp}) = \frac{1}{f_w} \left(\cos \theta_{fp} \sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} + c \cos^2 \theta_{fp} \right) = 1. \quad (9.51)$$

Es wird ein Bruchzustand betrachtet, deshalb gilt:

1. Der Bruch erfolgt auf der Schnittebene $\theta = \theta_{fp}$ mit der höchsten schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$; es muß also sein

$$\frac{d\mathcal{E}(\theta)}{d\theta} = 0. \quad (9.52)$$

2. Bei θ_{fp} ist für den Spannungszustand $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ die Bruchbedingung erfüllt:

$$\mathcal{E}(\theta_{fp}) = 1. \quad (9.53)$$

Aus der 1. Bedingung folgt, weil f_w keine Funktion von θ ist:

$$\frac{d\mathcal{E}(\theta)}{d\cos(\theta)} \frac{d\cos \theta}{d\theta} = \left(\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} + \frac{a \cos^2 \theta_{fp}}{\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b}} + 2c \cos \theta_{fp} \right) (-\sin \theta_{fp}) = 0. \quad (9.54)$$

Die erste Lösung, $\theta_{fp} = 0^\circ$, wurde zur Formulierung der Bruchbedingung für Modus B benutzt. Zu einer zweiten Lösung gelangt man, wenn man aus (9.54) den Wurzelausdruck mit Hilfe der Bruchbedingung (9.51) eliminiert:

$$\sqrt{a \cos^2 \theta_{fp} + b} = \frac{f_w}{\cos \theta_{fp}} - c \cos \theta_{fp}. \quad (9.55)$$

Damit wird aus Gl. (9.54) mit $\theta_{fp} \neq 0^\circ$:

$$\cos^4 \theta_{fp} = \frac{f_w^2}{c^2 - a} = \left(\frac{f_w R_{\perp\perp}^A}{\sigma_2} \right)^2. \quad (9.56)$$

Die angesetzte Bruchbedingung gilt nur für $\sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \theta < 0$, folglich muß sein:

$$\cos \theta_{fp} = \sqrt{\frac{f_w R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_2)}} \quad \text{für Modus C.} \quad (q.e.d.) \quad (9.57)$$

Auf den ersten Blick erweckt Gl. (9.57) den Eindruck, als hänge θ_{fp} über $f_w = f_w(\sigma_1)$ von der Spannung σ_1 ab. Dies trifft aber nicht zu, denn nicht nur der Zähler ist proportional

zu f_w , sondern auch die im Nenner stehende Spannung σ_2 (beim Bruchzustand!) nimmt unter der Einwirkung von σ_1 proportional zum Schwächungsfaktor f_w ab.

Das Einführen von (9.57) in (9.44) führt mit (9.42) auf die Bruchbedingung

$$\frac{1}{f_{w0}} \left\{ \left[\left(\frac{\tau_{21}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)}) R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp}^{(-)}} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp}^{(-)}}{(-\sigma_2)} \right\} + \frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}} = 1 \quad \text{für Modus C.} \quad (9.58)$$

Die entsprechende Gl. (5.3) in der Tabelle 5.1 auf S. 62 gilt für $\sigma_1 = 0$.

Damit der Bruchwinkel θ_{fp} beim Modus C nach Gl. (9.57) berechnet werden kann, muß zuvor für das vorliegende Verhältnis τ_{21}/σ_2 die Spannung σ_2 beim Bruch mit Hilfe der Bruchbedingung (9.58) ermittelt werden.

Es sei daran erinnert, daß die Gln. (9.57) und (9.58) unter der Voraussetzung der Parameterkopplung $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A) = (p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel}) = \text{const.}$ hergeleitet wurden. Diese Kopplung ist nicht physikalisch begründet, sondern dient lediglich dazu, Rechenerleichterungen zu erzielen. Es stellt sich deshalb die Frage, welchen Einfluß Abweichungen von der obigen Parameterkopplung auf die Bruchkurve und den Bruchwinkel haben.

Durch die Gln. (9.12) und (9.13) auf S. 142 sind die folgenden physikalischen Zusammenhänge mit dem meßbaren [15,84] Bruchwinkel $\Theta_{fp}^{(-)}$ aus dem einachsigen Quer-Druckbereich gegeben:

$$R_{\perp\perp}^A = - \frac{R_{\perp}^{(-)} \cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{2 p_{\perp\perp}},$$

$$p_{\perp\perp}^{(-)} = - \frac{\cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}{1 + \cos 2\Theta_{fp}^{(-)}}.$$

Daraus ergibt sich mit dem Additionstheorem $\cos 2\Theta_{fp}^{(-)} = 2 \cos^2 \Theta_{fp}^{(-)} - 1$ die Beziehung

$$R_{\perp\perp}^A = R_{\perp}^{(-)} \cos^2 \Theta_{fp}^{(-)}. \quad (9.59)$$

Aufgrund der Zusammenhänge

$$\sigma_2 = -R_{\perp}^{(-)} \quad \text{und} \quad \sigma_n = \sigma_2 \cos^2 \Theta_{fp}^{(-)}$$

wird erkennbar, daß – auch unabhängig von der Parameterkopplung – für die Druckspannung σ_n auf der schrägen Bruchebene für die einachsige Quer-Druckbeanspruchung gilt:

$$\sigma_n = -R_{\perp\perp}^A, \quad (9.60)$$

$$\cos \Theta_{fp}^{(-)} = \sqrt{\frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp}^{(-)}}} \quad \text{für } \sigma_2 = -R_{\perp}^{(-)}. \quad (9.61)$$

Zwischen der reinen Druckbeanspruchung im Punkt d nach Bild 5.1 auf S. 61 und dem Umschlagpunkt c, wo der "schräge" Bruch des Modus C in einen "geraden" Bruch des Modus B umschlägt, bleibt σ_n auf der schrägen Bruchebene nun allerdings nicht mehr konstant, wie man leicht mit dem Rechenprogramm *Brukan* feststellen kann. Über die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve ohne vorausgesetzte Parameterkopplung läßt sich folgendes aussagen:

- Die den Modus B beschreibende Parabel wird nur von den Parametern $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ und $R_{\perp\parallel}^{(-)}$, nicht aber von $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $R_{\perp\perp}^A$ bestimmt; sie bleibt also unbeeinflusst.
- Die Parameter $p_{\perp\perp}^{(-)}$ und $R_{\perp\perp}^A$ beeinflussen den für den Modus C geltenden Kurvenast. Dieser verläuft nach wie vor durch den für die einachsige Quer-Druckbeanspruchung geltenden Punkt $(-R_{\perp\perp}^{(-)}, 0)$, aber durch einen verschobenen Umschlagpunkt c.
- Der Umschlagpunkt c, der die Grenze zwischen den Modi B und C darstellt, wandert bei einem $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wert, der größer ist als der aus der Parameterkopplung folgende $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wert, zu (absolut gesehen) niedrigeren Quer-Druckspannungen; ist der $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wert niedriger als der gekoppelte Wert, schlägt der Bruch-Modus bei (absolut gesehen) höheren Quer-Druckspannungen um.

Dies "Auswandern" des Umschlagpunktes fällt bei den in Betracht kommenden Werten für $p_{\perp\perp}^{(-)}$ nur so geringfügig aus, daß auch die Kurvenäste für den Bruch-Modus C bei realistischen Veränderungen des $p_{\perp\perp}^{(-)}$ -Wertes sich nur unwesentlich von demjenigen für gekoppelte p-Werte unterscheiden, **Bild 9.15** auf S. 166. Die Bruchbedingung (9.58) für gekoppelte p-Werte kann noch als sehr gute Näherung benutzt werden, wenn die Kopplung nicht gegeben ist. Auch die Gl. (9.57) für den Bruchwinkel kann als gute Näherung betrachtet werden; im Punkt d ist sie die exakte Lösung. Durch einen Korrekturterm kann die Näherung noch verbessert werden. Näheres wird in [65] ausgeführt.

9.6 Ergebnisdarstellung und -diskussion

9.6.1 Beispiele für Zfb-Bruchkörper

Mit der Möglichkeit, gemäß Abschnitt 8.5.3 Spannungen zu Haupt-Normalspannungen und resultierenden Schubspannungen "zusammenzufassen", kann die Zahl der Spannungen, die zur Angabe eines Zfb-relevanten Spannungszustands erforderlich sind, auf 3 reduziert werden. Durch die Benutzung von $\sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1}$ und dem Parameter δ (Differenzwinkel zwischen den Richtungen von $\tau_{\omega 1}$ und σ_{II}) wird eine Visualisierung in einem dreidimensionalen Spannungsraum möglich. Sogar ein Einfluß der faserparallelen Spannung σ_1 kann

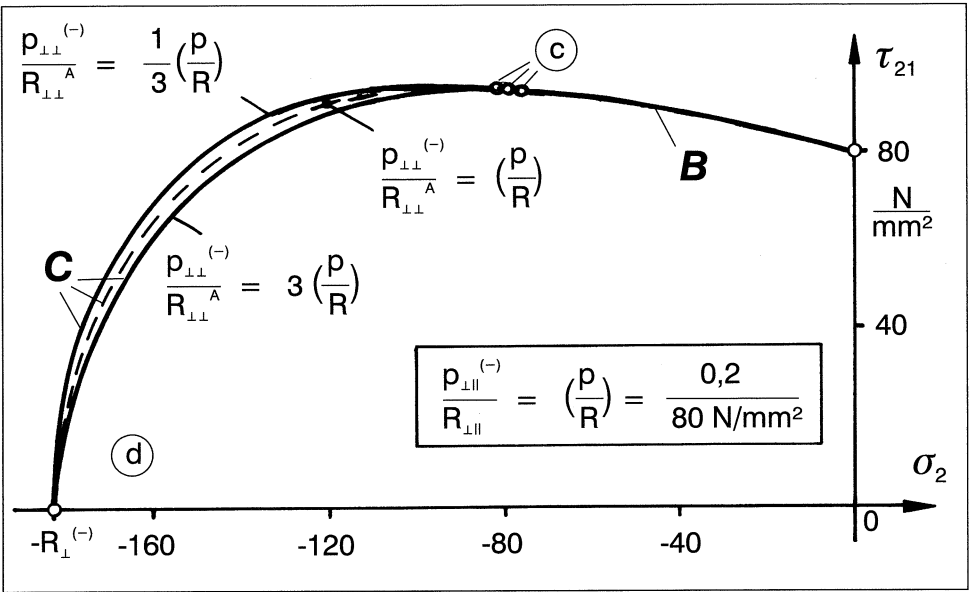


Bild 9.15: (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve für $\sigma_1 = 0$. Selbst bei einer extremen Veränderung von $(p_{\perp\perp}^{(-)}/R_{\perp\perp}^A)$ gegenüber $(p_{\perp\parallel}^{(-)}/R_{\perp\parallel})$ mit den Faktoren $\frac{1}{3}$ bzw. 3 zeigt sich beim Modus C nur ein geringfügiger Einfluß.

noch durch eine "Schrumpfung" des Bruchkörpers, die einer Maßstabsänderung gleichkommt, berücksichtigt werden. So ist es grundsätzlich möglich, den nicht visualisierbaren Zfb-Bruchkörper im $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungsraum durch eine Vielzahl von Bruchkörpern im $(\sigma_1, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1})$ -Spannungsraum mit δ als Parameter darzustellen. Man könnte sozusagen ein "Album" solcher Bruchkörper anlegen. Prinzipiell ist es auch denkbar, ein entsprechendes "elektronisches Album" zu erstellen, d.h. sehr viele Daten der Bruchkörper ein für allemal vorab zu berechnen und abzuspeichern, um dann später bei einer Bruchanalyse die benötigten Daten entsprechend den $\sigma_1, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1}, \delta$ -Werten des Spannungszustands abzurufen. Dann müßte man nicht bei jedem zu analysierenden Spannungszustand aufwendig den Bruchwinkel suchen. Statt dessen wäre aber eine Interpolations-Prozedur erforderlich. Ob sich deshalb tatsächlich eine lohnende Einsparung an Rechenzeit ergibt, müßte noch geklärt werden.

Die **Bilder 9.16** und **9.17** zeigen zwei Beispiele von Bruchkörpern im $(\sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1})$ -Spannungsraum mit δ als Parameter, die mit dem Programm *Brukan-Visual 3D* [78] dargestellt und anschließend grafisch nachbearbeitet wurden.

Beim Bild 9.16 handelt es sich um den Fall $(\sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{\omega 1})$ mit $\delta = 0^\circ$, d.h. die Richtungen

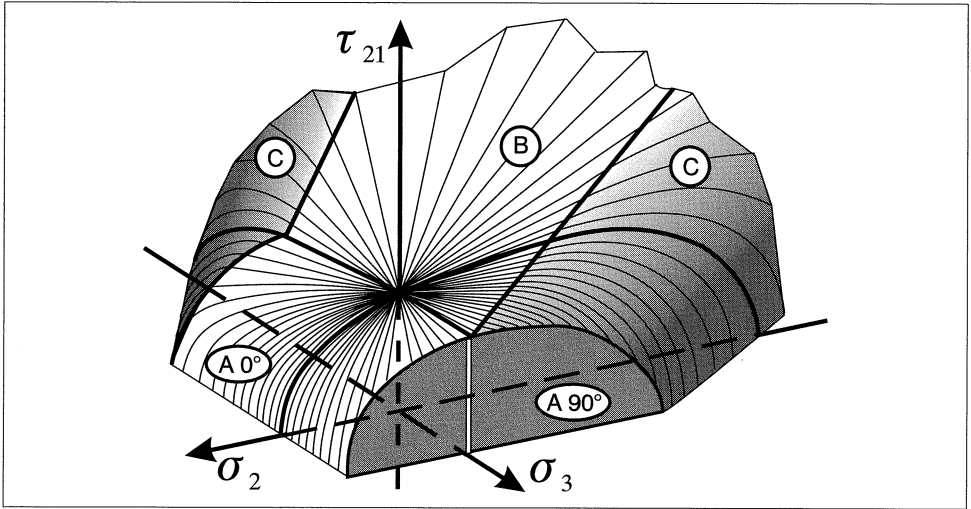


Bild 9.16: Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Spannungsraum. $\tau_{23} = \tau_{31} = 0$, $\sigma_2 = \sigma_{II}$; $\sigma_3 = \sigma_{III}$; $\tau_{21} = \tau_{\omega 1}$.

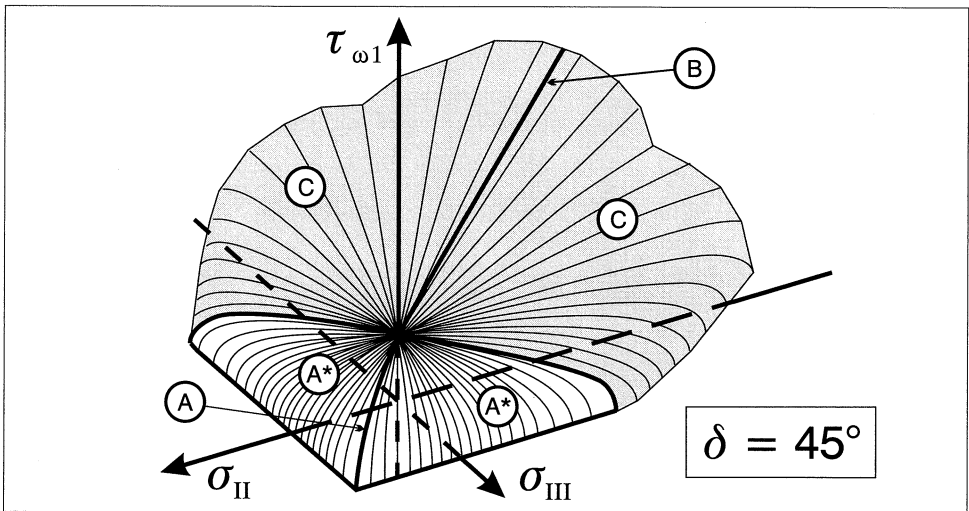


Bild 9.17: Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Spannungsraum. Zusätzlich zu den Spannungen $\sigma_2 = \sigma_{II}$, $\sigma_3 = \sigma_{III}$, τ_{21} wirkt eine Schubspannung $\tau_{31} = \tau_{21}$, $\omega = \delta = 45^\circ$. Aus $\tau_{21} = \tau_{31}$ wird $\tau_{\omega 1} = \sqrt{2}\tau_{21} = \sqrt{2}\tau_{31}$.

von σ_{II} und $\tau_{\omega 1}$ fallen zusammen, oder anders ausgedrückt: $\tau_{\omega 1} = \tau_{III 1}$ und $\tau_{III 1} = 0$. Ein solcher Beanspruchungszustand tritt z.B. bei GFK-Drehrohrfedern auf, und zwar in Form eines $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 0, 0, \tau_{21})$ -Spannungszustands [20]. Ein Einfluß von σ_1 blieb unberücksichtigt.

Der dem Bild 9.17 zugrundeliegende Spannungszustand unterscheidet sich vom vorhergehenden nur dadurch, daß eine Spannung τ_{31} hinzugetreten ist, und zwar ist der Sonderfall $\tau_{31} = \tau_{21}$ gewählt worden. Dadurch wird $\delta = 45^\circ$. Die Richtung der resultierenden Schubspannung $\tau_{\omega 1} = (\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2)^{1/2}$ verläuft also mittig zwischen den Richtungen von $\sigma_{II} = \sigma_2$ und $\sigma_{III} = \sigma_3$, so daß eine Symmetrie des Bruchkörpers bezüglich der Winkelhalbierenden zwischen der σ_{II} - und der σ_{III} -Richtung zu erwarten ist, die sich im Bild auch zeigt.

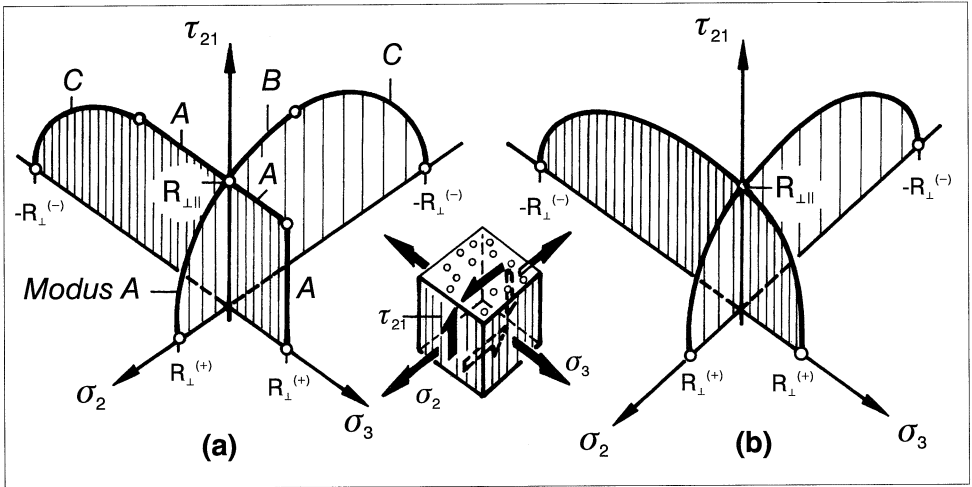


Bild 9.18: Schnitte $\sigma_2 = 0$ und $\sigma_3 = 0$ durch $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{21})$ -Bruchkörper. (a) Schnitte durch den Bruchkörper nach Bild 9.16; angegeben sind die Bruch-Modi A, B, C. Beim Modus A und B ist der Bruchwinkel $\theta_{fp} = 0^\circ$, deshalb findet bei den Spannungen σ_2 und τ_{21} , die beide auf der Bruchebene wirken, eine Interaktion statt. Die Spannungen σ_3 und τ_{21} haben keine gemeinsame Wirkebene und müssen daher bei $\theta_{fp} = 0^\circ$ jeweils allein den Bruch bewirken. (b) Bei der Tsai, Wu-Bruchbedingung, die keine physikalische Basis hat, unterscheiden sich die (σ_2, τ_{21}) -Bruchkurve und die (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve nicht.

Auffallend an beiden Bildern ist, daß die Bruchkörper "Ecken und Kanten" aufweisen, was man beispielsweise von den ringsherum "glatten" Tsai, Wu-Bruchkörpern nicht kennt. Diese Ecken und Kanten zeigen ein "Umschlagen" von einem zu einem anderen Bruchgeschehen an. Dies wird beispielsweise durch Bild 9.18 verdeutlicht, wobei 9.18a zwei Schnitte durch den Bruchkörper von Bild 9.16 zeigt, und zwar die Schnitte $\sigma_3 = 0$ und $\sigma_2 = 0$. Besonders kraß sind die Unterschiede der Bruchkurven im 1. Quadranten. Diese erklären sich

daraus, daß σ_2 und τ_{21} eine gemeinsame Wirkebene haben und deshalb bei der Bruchherzeugung zusammenwirken, σ_3 und τ_{21} aber nicht. Nach dem *Tsai, Wu*-Kriterium sind die Bruchkurven für (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung und (σ_3, τ_{21}) -Beanspruchung vollkommen gleich, Bild 9.18b. Wenn man nicht über eine Bruchhypothese verfügt, bleibt auch nichts anderes übrig, als σ_2 und σ_3 gleich zu behandeln, weil beide σ_{\perp} -Beanspruchungen darstellen.

Ungewohnt ist auch, daß die Bruchkörper nach Bild 9.16 und 9.17 in Richtung der Spannungszustände $\sigma_2 \approx \sigma_3 < 0$ offen sind. Dies bedeutet natürlich nicht, daß der Werkstoff bei solchen Beanspruchungszuständen unbeschadet beliebig hohe Spannungen erträgt. Das benutzte Modell führt aber zu der Aussage, daß keine bruchauslösende $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Kombination auftritt. In Wirklichkeit sind wegen des – mikromechanisch gesehen – inhomogenen Spannungszustands, Bild 5.4 auf S. 68, ab einer gewissen Beanspruchungshöhe gravierende mikromechanische Schädigungen zu erwarten, die z.B. bei Entlastung nach einer nicht zum Bruch führenden Erstbelastung und einer anschließenden Quer-Zugbeanspruchung zu einer erniedrigten Quer-Zugfestigkeit führen müssen. Entsprechende Experimente werden z.Zt. entwickelt [79,84].

Daß für die Visualisierung von Bruchkörpern für $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustände die Transformation in $(\sigma_1, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \tau_{w1}, \delta)$ -Spannungszustände vorgenommen wurde, darf nicht in dem Sinne mißverstanden werden, daß eine solche Transformation auch beim praktischen Rechnen, beispielsweise zur Ermittlung eines Reservefaktors f_{Res} vorgenommen würde. Für einen normalen Rechenablauf ist ein solches "Umsteigen" in andere Koordinatensysteme nicht nötig. Die Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ werden direkt aus dem $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand berechnet und in die Bruchbedingung eingesetzt. Wenn der Bruchwinkel θ_{fp} gefunden ist, wird mit diesem der Reservefaktor f_{Res} oder $f_{Res}^{(l)}$ berechnet. Aufgrund der Angaben über die auf der Bruchebene wirkenden Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ kann auch der vorliegende Bruch-Modus erkannt werden, s. nächsten Abschnitt.

Als "Nebenprodukt" der Bruchwinkelsuche erhält man den Verlauf der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}_{IFF}(\theta)$ über dem Winkel θ , wie z.B. in Bild 8.11 auf S. 128.

Es ist recht erstaunlich, daß nur zwei Bruchbedingungen, eine für $\sigma_n \geq 0$ und eine für $\sigma_n < 0$, imstande sind, viele verschiedene Teil-Bruchflächen des Bruchkörpers im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungsraum zu beschreiben. Dies erklärt sich letztendlich daraus, daß durch die Bruchwinkelsuche das (x_n, x_t) -Achsenkreuz für jeden Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ in die Richtung der höchsten schnittwinkelabhängigen Anstrengung gedreht wird. Dabei zeigt sich in bestimmten Bereichen die Bruchbedingung als Haupt-Normalspannungs-Bedingung, gelegentlich als Bruchbedingung der maximalen Quer/Längs-Schubspannung und in den meisten Fällen als "Mixed Mode-Kriterium".

9.6.2 Unterscheiden verschiedener Bruch-Modi

Bei Gültigkeit der Bruchhypothese nach Abschnitt 8.2.2 lassen sich Bruch-Modi unterscheiden. Als Kriterium für diese dient die **auf der Bruchebene** auftretende Beanspruchungskombination.

Zunächst sind zwei größere Gruppen zu unterscheiden, und zwar entsprechend der Fallunterscheidung $\sigma_n < 0$ und $\sigma_n \geq 0$ die Gruppe mit $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung und diejenige mit $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung, **Bild 9.19**. Jede der beiden σ_{\perp} -Beanspruchungen kann in Kombination mit einer der beiden Schubspannungen $\tau_{\perp\perp}$ oder $\tau_{\perp\parallel}$ auftreten oder in der Dreierkombination $\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$ bzw. $\sigma_{\perp}^{(+)}, \tau_{\perp\perp}, \tau_{\perp\parallel}$.

Der 2. Satz der Bruchbedingung schließt aus, daß $\sigma_{\perp}^{(-)}$ allein zu einem Bruch in der Wirkebene führt. Durch den 3. Satz ist ein Bruch der Wirkebene allein durch eine $\tau_{\perp\perp}$ -Beanspruchung ausgeschlossen und ebenfalls durch eine Kombination von $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und $\tau_{\perp\perp}$.

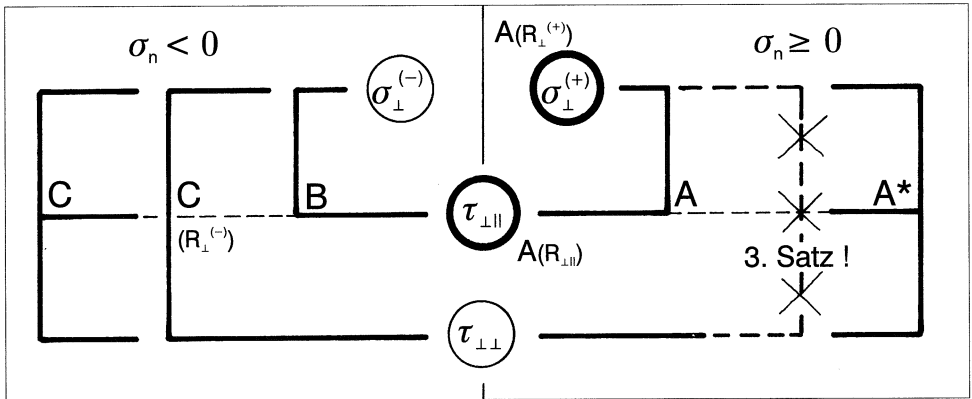


Bild 9.19: Unterscheidung von Bruch-Modi aufgrund aller möglichen Beanspruchungskombinationen, die auf einer Bruchebene wirken können. Die Beanspruchungen $\sigma_{\perp}^{(+)}$ und $\tau_{\perp\parallel}$ (dick ausgezogene Kreise) können jeweils allein auf einer Bruchebene auftreten, $\sigma_{\perp}^{(-)}$ und $\tau_{\perp\perp}$ nicht.

Damit bleiben die Bruch-Modi A, A*, B und C nach Bild 9.19 übrig. Die unsystematische Bezeichnung der Modi rührt daher, daß die Modi-Unterscheidung anfänglich nur für den $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{21})$ -Spannungszustand vorgenommen wurde; in Teil I und Teil II wurde hierzu eingehend die Bruchfolgenabschätzung mit Hilfe der Modi A, B und C erörtert. Dabei war es möglich, die Bruchwinkel ($\theta_{fp} = 0^\circ$ bzw. $\theta_{fp} \neq 0^\circ$) den Modi A und B bzw. C zuzuordnen. Dies gelingt bei allgemeinen Spannungszuständen nicht mehr; der ermittelte Bruch-Modus muß in Verbindung mit dem errechneten Bruchwinkel im Einzelfall beurteilt werden.

Teil IV

Spezialprobleme, offene Fragen, Zukunftsansichten

10 Spezialprobleme der Master-Bruchfläche

10.1 Vorbemerkungen

Während es sich bei den in Teil III vorgestellten Forschungsergebnissen größtenteils um weitgehend gesicherte Erkenntnisse handelte, werden die hier angesprochenen Spezialprobleme in der Forschung teilweise noch kontrovers diskutiert [79]. Sie werden voraussichtlich für die praktische Anwendung der neuen Bruchbedingungen keine große Rolle spielen, sie sind deshalb vor allem für diejenigen Leser von Bedeutung, die sich an der Weiterentwicklung der neuen Modelle beteiligen oder sich zumindest einen tieferen Einblick verschaffen wollen. Dabei wird sich erneut zeigen, wie hilfreich für das Verständnis mancher Phänomene eine weitgehende Visualisierung sein kann.

10.2 Der Vektorenfächer und seine Randkurve

Für einen Spannungszustandsvektor im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum wird hier vorausgesetzt, daß er unter Beibehaltung seiner Richtung aus dem Koordinatenursprung herauswächst, bis er mit seiner Spitze die Bruchfläche berührt. Die Bahn der Vektorspitze, der sog. "Lastpfad" ist also ein im Koordinaten-Nullpunkt entspringender Strahl.

Auch die zum Bruch führende Spannungscombination $\{\sigma_n(\theta_{fp}), \tau_{nt}(\theta_{fp}), \tau_{n1}(\theta_{fp})\}$ stellt im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum einen von "null" bis zur Berührung mit der Master-Bruchfläche anwachsenden Spannungsvektor dar, aber seine durch den Bruchwinkel θ_{fp} bestimmte Richtung ist nicht von vornherein bekannt. Um diese zu finden, muß der ganze denkbare Winkelbereich $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$, in dem θ_{fp} auftreten kann, nach demjenigen Vektor abge- sucht werden, der mit dem kleinsten Streckungsfaktor verlängert werden muß, damit er die Master-Bruchfläche berührt. In diesem 180° -Winkelbereich gibt es unendlich viele Vektoren $\{\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)\}$, von denen im allgemeinen jeder in eine andere Richtung aus dem Ko- ordinatenursprung herauswächst, denn die Komponenten $\sigma_n(\theta), \tau_{nt}(\theta), \tau_{n1}(\theta)$ hängen über verschiedene Winkelfunktionen mit den Spannungen $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ zusammen, Gl. (8.1). Alle in dem Winkelbereich $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ auftretenden Spannungsvektoren, die einen

festen Spannungszustand $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ repräsentieren, bilden zusammen einen "Vektorenfächer" im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum.

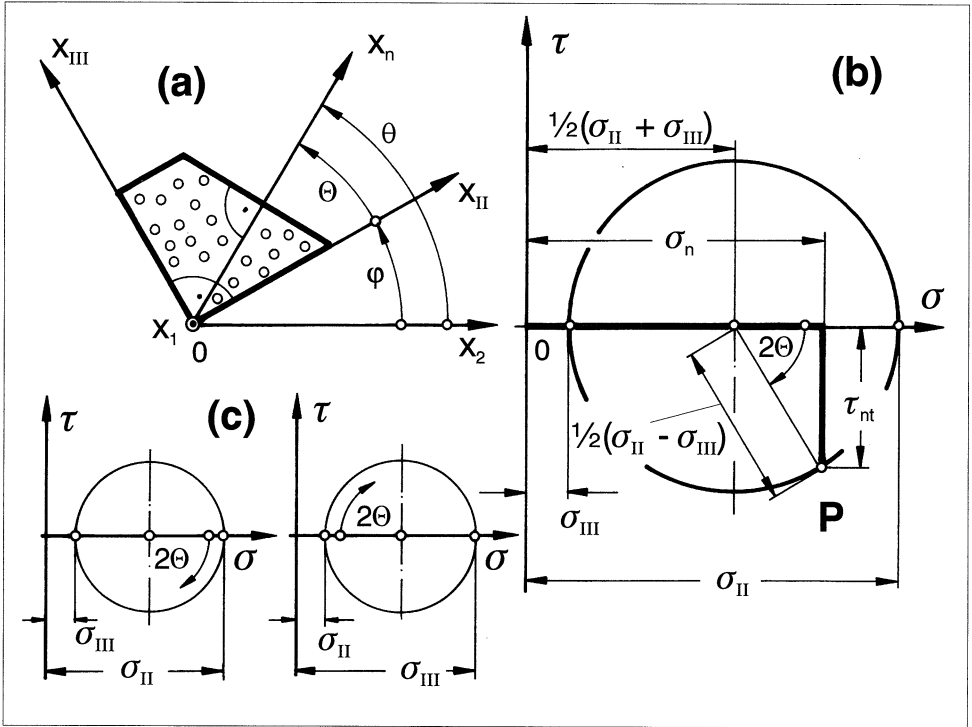


Bild 10.1: Mohrscher Spannungskreis zur Ermittlung der Spannung σ und τ auf einem schrägen Schnitt unter dem Winkel Θ , ausgehend von den beiden Haupt-Normalspannungen σ_{II} und σ_{III}

Dessen Visualisierung gelingt am ehesten, wenn man den $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand, wie in Abschnitt 8.5.3 beschrieben, durch die beiden Haupt-Normalspannungen der transversal-isotropen Ebene $\sigma_{II}, \sigma_{III}$ (aus $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$) und die resultierende Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ (aus τ_{31} und τ_{21}) ausdrückt. Da $\tau_{III III} = 0$ ist, lassen sich die Transformationsformeln für $\sigma_n(\theta)$ und $\tau_{nt}(\theta)$ mit Hilfe der bei Gl. (8.1) angegebenen Additionstheoreme stark vereinfachen. Wenn $\tau_{23} \neq 0$ ist, fallen die Richtungen von σ_2 und σ_{II} nicht zusammen; sie unterscheiden sich durch den Winkel φ nach Gl. (8.14) voneinander. Deshalb wird, wenn man von den Ebenen ausgeht, auf denen σ_{II} bzw. σ_{III} wirkt, nicht mehr der Winkel θ zwischen der x_2 -Achse und der x_n -Achse, sondern der Winkel Θ zwischen der x_{II} -Achse und der x_n -Achse benutzt. Zum Auffinden des Bruchwinkels wird nun auch nicht mehr der Winkelbereich $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$, sondern der Winkelbereich

$-90^\circ \leq \Theta \leq +90^\circ$ abgesucht, was zum gleichen Ergebnis führt, denn es wird in jedem Fall die Schnittebene mit dem höchsten $\mathcal{E}(\theta)$ -Wert gefunden.

Die so vereinfachten Beziehungen für σ_n und τ_{nt} lauten:

$$\sigma_n(\Theta) = \frac{1}{2}(\sigma_{II} + \sigma_{III}) + \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \cos 2\Theta, \quad (10.1)$$

$$\tau_{nt}(\Theta) = -\frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \sin 2\Theta. \quad (10.2)$$

Sie ermöglichen die Bestimmung von $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$ mit Hilfe des sogenannten Mohrschen Spannungskreises, **Bild 10.1**. Er hat seinen Mittelpunkt auf der σ -Achse und schneidet diese an den Stellen σ_{II} und σ_{III} . Gemäß (10.1) und (10.2) hat ein Punkt P die Koordinaten $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$, wenn man in geeigneter Weise am Mohrschen Kreis einen Winkel 2Θ abträgt, Bild 10.1b. Den Punkt P mit seinen – auch mit dem korrekten Vorzeichen versehenen – Koordinaten $\sigma_n(\Theta)$ auf der Abszisse und $\tau_{nt}(\Theta)$ auf der Ordinate findet man, indem man einen Radius des Kreises im mathematisch negativen Drehsinn (wegen des negativen Vorzeichens von $\tau_{nt}(\Theta)$) um einen Winkel 2Θ aus der σ_{II} -Richtung herausdreht. Der Winkel 2Θ zählt von der Richtung aus, die nach σ_{II} zeigt, so daß sich für $\sigma_{II} > \sigma_{III}$ der Winkel 2Θ an der Stelle nach Bild 10.1c (links), für $\sigma_{II} < \sigma_{III}$ aber an der Stelle gemäß Bild 10.1c (rechts) findet. Am Werkstoffelement, Bild 10.1a, gelangt man durch eine mathematisch positive Drehung um 90° von der Wirkebene der Spannung σ_{II} in die Wirkebene der Spannung σ_{III} ; im Mohrschen Kreis gehört eine im mathematisch negativen Sinne ausgeführte Drehung um 180° dazu, um von σ_{II} nach σ_{III} zu gelangen.

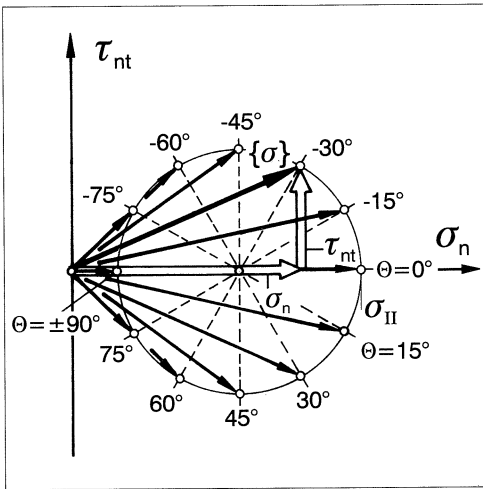


Bild 10.2: Ebener Vektorenfächer für einen $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Spannungszustand. Jeder Punkt des Mohrschen Spannungskreises wird von der Spitze eines Spannungsvektors berührt.

Wenn bei einem festgehaltenen ebenen Spannungszustand $\{\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}\}$ (gleichbedeutend mit $\{\sigma_{II}, \sigma_{III}, 0\}$) die Spannungen auf allen Schnittebenen unter Winkeln $-90^\circ \leq \Theta \leq +90^\circ$ betrachtet werden, wird jeder Punkt P des Mohrschen Kreises von der Spitze eines Vektors $\{\sigma_n(\Theta), \tau_{nt}(\Theta)\}$ berührt, dessen Fußpunkt der Koordinaten-Nullpunkt ist. Bei $\tau_{31} = \tau_{21} = 0$ (d.h. auch $\tau_{\omega 1} = 0$) ist der Vektorenfächer, von dessen geometrischer Gestalt man eine Vorstellung gewinnen möchte, demnach eine ebene Figur, **Bild 10.2** auf S. 175. Sein Rand ist der Mohrsche Spannungskreis.

Das Bild ändert sich, wenn zusätzlich eine Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ wirkt. Nun tritt zu den bereits vorhandenen Vektorkomponenten $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$ als dritte Komponente $\tau_{n1}(\Theta)$ hinzu. Am realen Werkstoffelement wirkt die Schubspannung $\tau_{n1}(\Theta)$ in einer Richtung, die senkrecht auf der aus $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$ gebildeten Ebene steht, s. Bild 4.3 auf S. 50. Genau die gleiche Situation kann man bei der Visualisierung der drei Spannungen erzeugen, wenn man $\tau_{n1}(\Theta)$ senkrecht über der Zeichenebene des Mohrschen Kreises aufträgt. Wenn für das Auftragen von $\tau_{n1}(\Theta)$ der gleiche Spannungsmaßstab gewählt wird wie für den Mohrschen Spannungskreis, bildet der Spannungsvektor $\{\sigma_n(\Theta), \tau_{nt}(\Theta), \tau_{n1}(\Theta)\}$ die Spannungen des Werkstoffelements, die auf der zur x_n -Richtung senkrechten Schnittebene wirken, naturgetreu ab. (Weil am realen Werkstoffelement die 3 Spannungen $\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1}$ eine gemeinsame Wirkebene haben, kann man auch sie zu einer schräg auf der Wirkebene stehenden resultierenden Spannung $\{\sigma\}$ zusammenfassen, s. Bild 4.3.)

Nur in Ausnahmefällen wirken die Haupt-Normalspannung σ_{II} und die resultierende Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ auf der gleichen Schnittebene. Das wäre nur der Fall, wenn die Winkel φ und ω nach Gl. (8.14) bzw. Gl. (8.17) gleich wären. Meistens tritt eine Winkeldifferenz

$$\delta = \omega - \varphi. \quad (10.3)$$

auf. In einer Schnittebene, die um einen Winkel Θ gegenüber der Wirkebene von σ_{II} gedreht ist, wirkt im allgemeinen Fall neben den Spannungen $\sigma_n(\Theta)$ und $\tau_{nt}(\Theta)$ nach den Gln. (10.1) und (10.2) auch noch die Schubspannung $\tau_{n1}(\Theta)$. Sie errechnet sich aus

$$\tau_{n1}(\Theta) = \tau_{\omega 1} \cos(\Theta - \delta) = \sqrt{\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2} \cos(\Theta - \delta). \quad (10.4)$$

Diese einfache Transformation ergibt sich, weil in der gegenüber der x_ω -Richtung um 90° gedrehten Richtung die Schubspannung $\tau_{(\omega+90^\circ)1} = 0$ ist, s. Bild 8.14 auf S. 133.

Wenn man bei der Bruchwinkelsuche den Winkel Θ von -90° bis $+90^\circ$ laufen läßt, stellt sich gemäß Gl. (10.4) die Schubspannung $\tau_{n1}(\Theta)$ als ein 180° -Abschnitt einer Cosinus-Kurve mit der Amplitude $\tau_{\omega 1} = (\tau_{31}^2 + \tau_{21}^2)^{\frac{1}{2}}$ dar. Diese Cosinus-Halbwellen werden senkrecht über dem Mohrschen Spannungskreis aufgetragen. Zu einer Drehung der Schnittebene von $\Theta = 0^\circ$ bis $+90^\circ$ gehört im Mohrschen Spannungskreis eine Drehung um 180° im mathematisch negativen Sinn, und zu einer realen Drehung von $\Theta = 0^\circ$ bis -90° am Mohrschen Kreis eine Drehung um 180° im mathematisch positiven Sinn. Die Cosinus-Halbwellen erstrecken sich

also über den ganzen Umfang des Mohrschen Kreises; man kann sich zur Veranschaulichung vorstellen, daß ein 180° -Abschnitt einer Cosinuskurve auf die Mantelfläche eines Zylinders aufgewickelt ist, der über dem Mohrschen Kreis errichtet wird.

Wenn die Richtungen von σ_{II} und $\tau_{\omega 1}$ zusammenfallen, d.h. $\delta = 0^\circ$ ist, hat die Cosinus-Kurve ihren Extremwert an der Stelle, an der σ_{II} auftritt. Falls zwischen x_{II} und x_ω eine Winkeldifferenz δ existiert, zeigt die Cosinus-Welle über dem Mohrschen Kreis eine "Phasenverschiebung" um 2δ , **Bild 10.3**. (Wenn bei der Bruchwinkelsuche Θ von -90° bis $+90^\circ$ läuft, wechselt die Cosinus-Halbwelle, d.h. die Schubspannung $\tau_{\omega 1}$, an der Stelle σ_{III} ihr Vorzeichen. Dies hat aber keinen Einfluß auf die Bruchgefahr. Man könnte die Bruchwinkelsuche auch mit $-90^\circ \leq (\Theta - \delta) \leq 90^\circ$ ausführen; dann bleibt τ_{n1} immer positiv.)

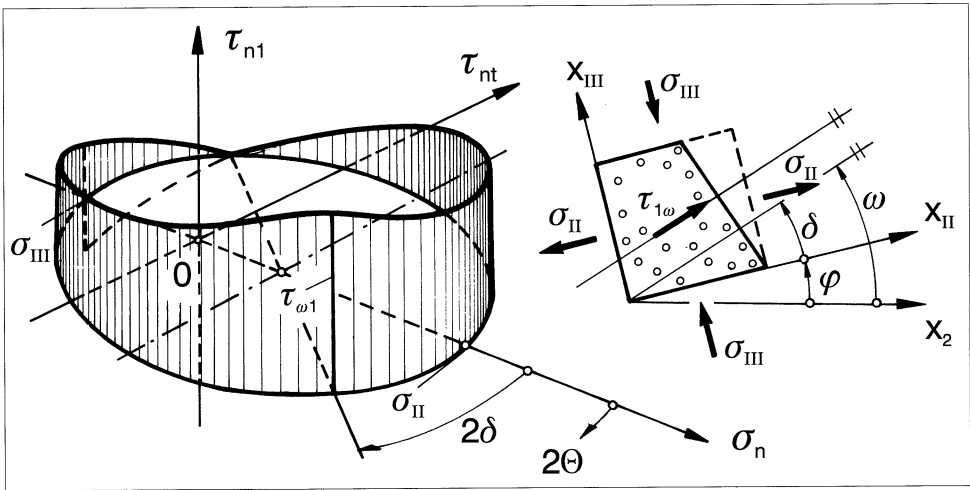


Bild 10.3: Berandungskurve eines räumlichen Vektorenfächers für einen $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand

Jeder Punkt der auf den "Mohrschen Zylinder" aufgewickelten Cosinus-Halbwelle wird von der Spitze eines Spannungsvektors $\{\sigma_n(\Theta), \tau_{nt}(\Theta), \tau_{n1}(\Theta)\}$ berührt. Sobald eine Schubspannung $\tau_{\omega 1}$ auftritt, ist demzufolge der Vektorenfächer keine ebene Figur mehr, sondern eine räumliche Fläche. Der Rand des Vektorenfächers ist die auf einen Kreiszyylinder "aufgewickelte" 180° -Cosinus-Linie. **Bild 10.4** zeigt Vektorenfächer für den wichtigen Sonderfall der ebenen (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchung, und zwar für $\sigma_2 < 0$ und $\sigma_2 > 0$.

Die gewonnene Vorstellung von der Randkurve des Vektorenfächers im $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum ist die Voraussetzung für das Verstehen der Probleme der folgenden Abschnitte.

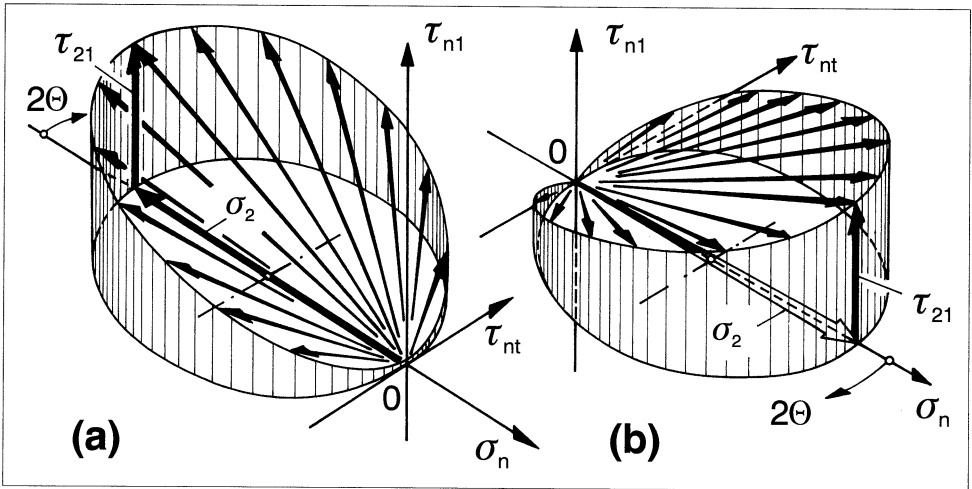


Bild 10.4: Räumlicher Vektorenfächer für kombinierte (σ_2, τ_{21}) -Beanspruchungen (a) für $\sigma_2 < 0$ und (b) für $\sigma_2 > 0$

10.3 Sensitivität des Bruchwinkels

Aus den vorausgegangenen Betrachtungen ergeben sich einige wichtige Schlußfolgerungen. Es hat sich gezeigt, daß die Berandung des zu einem bruchauslösenden $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand gehörenden Vektorenfächers, die von innen her an einer Stelle die Master-Bruchfläche berührt, eine "sanft geschwungene" räumliche Kurve ist. Man kann sich Situationen vorstellen, in denen das Stück der Cosinus-Halbwellen, auf dem der Berührungspunkt mit der Master-Bruchfläche zu finden ist, sich nahezu an die Master-Bruchfläche anschmiegt. Kleine Veränderungen der Form der Master-Bruchfläche würden in einem solchen Fall den Berührungspunkt merklich verschieben. Dies bedeutet, daß – abhängig von der gewählten Bruchbedingung und ihren Parametern – für einige Spannungszustände eine relativ hohe Sensitivität des Bruchwinkels θ_{fp} gegenüber der Gestalt der Master-Bruchfläche auftreten kann. Viel weniger empfindlich werden die für den Bruchzustand errechneten Spannungen auf kleine Veränderungen der Form der Master-Bruchfläche reagieren.

10.4 "Blinde Flecken" und "tote Räume"

Man kann sich sehr gut vorstellen, daß es an der Kuppel der Master-Bruchfläche für $\sigma_n \geq 0$ "ausgebuchtete" Bereiche gibt, die stärker gekrümmt sind als die Randkurven der Vekto-

renfächer, die in diesem Bereich auftreten, so daß die Cosinus-Halbwellen bestimmte Teile der Master-Bruchfläche nicht berühren können, weil der Kontakt vorher an anderer Stelle erfolgt. Rechenbeispiele mit Parametern für GFK bzw. CFK haben gezeigt, daß in einigen Oberflächenpartien der Master-Bruchfläche keine Berührungspunkte, d.h. keine Bruchzustände auftreten. Diese unberührbaren Gebiete oder sogenannten "blinden Flecken" auf der Master-Bruchfläche befinden sich größtenteils auf der für $\sigma_n \geq 0$ gültigen Kuppel.

Zum gleichen Ergebnis gelangt *Jeltsch-Fricker* [55] folgendermaßen: Wenn eine Master-Bruchfläche mathematisch formuliert wurde, z.B. durch die Angabe der Bruchbedingungen (9.23) für $\sigma_n < 0$ und (9.32) für $\sigma_n \geq 0$, kann damit der Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum berechnet werden. Wird dieser nun (z.B. in Form einer unendlich großen Menge von Cosinus-Halbwellen über Mohrschen Kreisen) in den $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum zurückübertragen, zeigt es sich, daß die Fläche, die alle möglichen Vektorenflächen einhüllt, stellenweise kleiner sein kann als die Master-Bruchfläche, von der ausgegangen wurde. Zwischen beiden entsteht örtlich "toter Raum". Dieser Sachverhalt läßt sich am ehesten am ebenen Sonderfall demonstrieren [85].

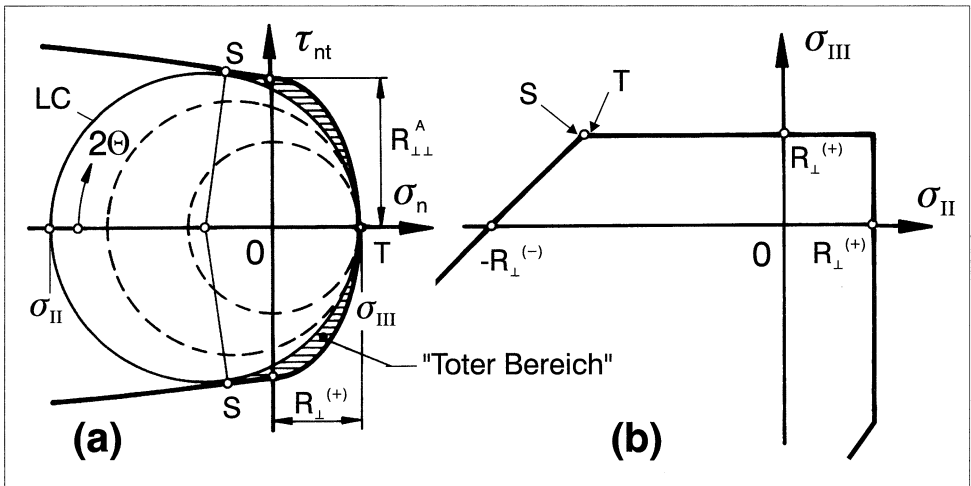


Bild 10.5: Zfb-Bruchkurven für eine ebene Beanspruchung in der transversal-isotropen (x_2, x_3) -Ebene. (a) (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve mit Grenzkreis LC (Limiting Circle) und "toter Bereich"; (b) $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Bruchkurve; S (Shear) bedeutet Schubbruch, T (Tension) Zugbruch.

In **Bild 10.5** ist unter (a) der Schnitt durch die Master-Bruchfläche bei $\tau_{n1} = 0$ dargestellt, d.h. die (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve. Mit dieser kann die Bruchfläche im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ -Raum berechnet werden, die aber durch den Übergang auf den zu $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23})$ gehören-

den Haupt-Normalspannungszustand $(\sigma_{II}, \sigma_{III}, 0)$ auch als $\sigma_{II}, \sigma_{III}$ -Bruchkurve dargestellt werden kann, Bild 10.5b. Wenn man die durch diese Bruchkurve umschlossenen, nicht zum Bruch führenden Spannungszustände in das Bild 10.5a rücküberträgt, füllt sich die von der Master-Bruchkurve umgebene Fläche mit Mohrschen Spannungskreisen (Cosinus-Halbwellen mit Amplitude "null"), mit Ausnahme des schraffierten "toten" Bereichs [85]. Falls man die (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve so korrigieren würde, daß dieser tote Bereich verschwindet, würde dies an der sich errechnenden $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Bruchkurve nichts ändern. Diese am "ebenen" Beispiel gezeigten Zusammenhänge können auch in den $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Raum übertragen werden. *Jeltsch-Fricker* [55] definiert als "Totraum" das Volumen des Master-Bruchkörpers, das man entfernen kann, ohne daß sich damit am Bruchkörper im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum irgend etwas ändert.

Wenn Toträume auch keinen Einfluß auf die Bruch-Spannungszustände haben, so beeinflussen sie doch die errechnete Bruchgefahr $\mathcal{E}(\theta)$ für $\theta \neq \theta_{fp}$. Die Form der Kurve "Bruchgefahr über dem Winkel θ ", die evtl. für probabilistische Auswertungen herangezogen werden soll, fällt mit einem Totraum weniger "völlig" aus als ohne Totraum [55]. Wenn man durch mathematische Modifikation der Bruchbedingung dafür sorgen würde, daß kein Totraum mehr auftritt, würde man überall in Abhängigkeit von θ die höchstmögliche Bruchgefahr errechnen. Ob man damit jedoch der Wirklichkeit näher kommt als bei Existenz des Totraumes, ist schwer zu sagen. Die zur Klärung dieser Frage erforderlichen experimentellen Untersuchungen sind deshalb so schwierig, weil man immer nur Brüche (bei $\mathcal{E}(\theta_{fp}) = 1$) erzeugen, aber keine Anstrengungen $\mathcal{E}(\theta) < 1$ messen kann.

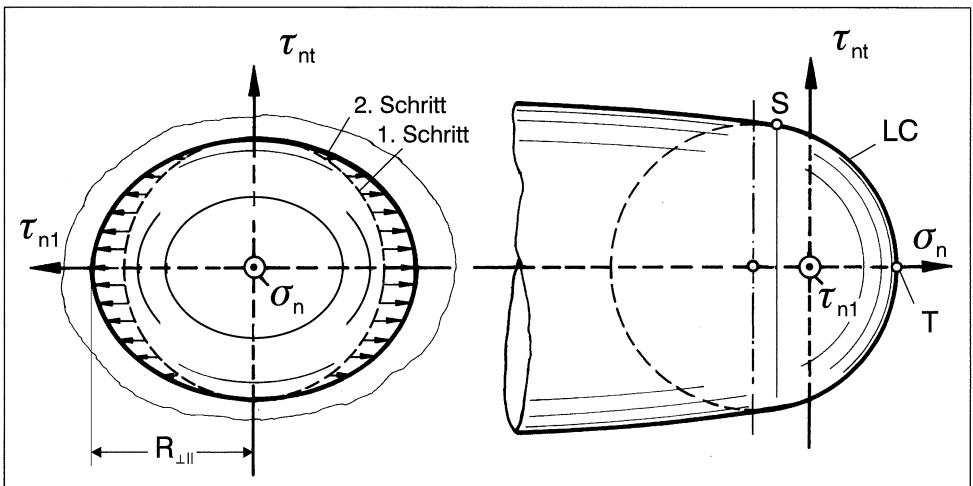


Bild 10.6: Alternativer $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Master-Bruchkörper, an dem kein "Totraum" auftreten kann.

Mit **Bild 10.6** wird demonstriert, welche Auswirkungen die Wegnahme des Totraums hat. Es ist ein Master-Bruchkörper gezeigt, der keinen Totraum hat. In der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene bildet der Grenzkreis LC zwischen den Punkten S und T (vgl. Bild 10.5) die Bruchkurve. Im Punkt S schließt an den Grenzkreis, (LC), bei dem sowohl Schubbruch (S) als auch Zugbruch (T) erfolgen kann, die parabolische "Hüllkurve" mit gleicher Steigung an. Den endgültigen Master-Bruchkörper kann man sich nun in zwei Schritten erzeugt denken. Im ersten Schritt läßt man die aus Grenzkreis und Parabel bestehende Bruchkurve um die σ_n -Achse rotieren. Der dadurch erzeugte Körper aus Kugelkalotte und anschließendem Rotationsparaboloid wird in einem zweiten Schritt in Richtung der τ_{n1} -Achse so "verstreckt", daß die Oberfläche die τ_{n1} -Achse bei $R_{\perp\parallel}$ schneidet. Damit ist ein Körper entstanden, dessen Oberfläche nirgends eine Unstetigkeit aufweist. Die Fallunterscheidung wäre nun nicht mehr an der Stelle $\sigma_n = 0$, sondern an der Stelle $\sigma_n(S)$ vorzunehmen. Rechts von dieser Stelle sind alle Schnitte $\tau_{n1} = \text{const.}$ Grenz-Kreise, nicht nur in der (σ_n, τ_{nt}) -Ebene bei $\tau_{n1} = 0$. Es gibt also keine unberührbaren Gebiete. Dort wo die Master-Bruchfläche aus Grenzkreisen gebildet wird, kann der Bruchwinkel jeden Wert zwischen 0° beim Zugbruch und dem zum Berührungspunkt S (Bild 10.5) gehörenden Bruchwinkel annehmen. Dies steht im Widerspruch zum 3. Satz der Bruchhypothese. (Bei dem gezeigten Bruchkörper gilt die übliche Kopplung der p -Parameter $(p/R) = \text{const.}$ und es ist $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\perp}^{(+)}$ und $p_{\perp\parallel}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(+)}$.)

10.5 Vorüberlegungen zu Fragen der Probabilistik

Aus Gründen der Probabilistik können die Ecken und Kanten der Bruchkörper in Wirklichkeit nicht so scharf ausfallen, wie sie in den Bildern 9.16 und 9.17 erscheinen. Dies kann man sich besonders leicht durch den Vergleich der einachsigen Zugbeanspruchung mit dem sogenannten isotropen Zug-Spannungszustand $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma > 0$ vergegenwärtigen. Im letztgenannten Fall ist $\sigma_n(\theta) = \sigma(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \sigma$ und damit auch die Bruchgefahr $\mathcal{E}(\theta)$ in jeder Richtung θ gleich groß. Fehlstellen in Form von Härtungsrissen, "flachgedrückten" Luftblasen und unverbundenen Partien der Faser/Matrix-Grenzfläche haben einen "Richtungssinn". Bei $(\sigma_2 = \sigma_3)$ -Beanspruchung kann jede in irgendeiner Richtung θ verlaufende gravierende Fehlstelle bruchauslösend wirken, während bei einachsiger σ_2 -Beanspruchung eine entsprechende Fehlstelle nur dann bruchwirksam wird, wenn sie ungefähr in der Richtung $\theta = 0^\circ$ orientiert ist. Die Wahrscheinlichkeit eines Bruches bei isotroper Quer-Zugbeanspruchung muß demnach höher sein als bei einachsiger Quer-Zugbeanspruchung. Deshalb ist zu erwarten, daß der Mittelwert der Bruchspannung niedriger ist als beim einachsigen Zug. Da man von der Bruchwinkelsuche her den Verlauf der schnittwinkelabhängigen Anstrengung oder Bruchgefahr $\mathcal{E}(\theta)$ über dem Winkel θ kennt, erscheint es möglich, das Modell auch für statistische Vorhersagen zu benutzen.

Beim Rechenprogramm *Brukan* [77] wird der Bruchwinkel θ_{fp} gesucht, indem eine Vielzahl von Werten $\mathcal{E}(\theta)$ im Bereich $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ berechnet und miteinander verglichen werden. Es liegt deshalb nahe, sich einen ersten Einblick in die angesprochenen Fragen zu verschaffen, indem man Flächeninhalte unter der $\mathcal{E}(\theta)$ -Kurve aufsummiert, dabei aber nur den Anteil von $\mathcal{E}(\theta)$ berücksichtigt, der einen gewählten "Schwellenwert" (threshold) von z.B. $\mathcal{E}(\theta)_{thr} = 0,5$ überschreitet. Je größer der berechnete Flächeninhalt, um so größer dürfte die Wahrscheinlichkeit sein, daß eine gravierende Fehlstelle einen "vorzeitigen" Bruch auslöst. So erwartet man z.B. auch bei einachsiger Quer-Druckbeanspruchung, bei dem sowohl der Bruchwinkel $\theta_{fp} \approx 50^\circ$ als auch der Bruchwinkel $\theta_{fp} \approx -50^\circ$ auftreten kann, eine etwas höhere Wahrscheinlichkeit der Bruchauslösung als beim einachsigen Quer-Zugversuch, bei dem der Bruch nur bei $\theta_{fp} = 0^\circ$ erfolgen kann.

Da näher bei $\mathcal{E}(\theta) = 1$ liegende Flächenelemente höher zu bewerten sind als solche, die in der Nähe des Schwellenwertes liegen, sollte man eigentlich nicht die Flächeninhalte, sondern ihre statischen Momente (Fläche x Abstand des Schwerpunkts vom Schwellenwert) vergleichen. So wird beim **Bild 10.7** verfahren [86].

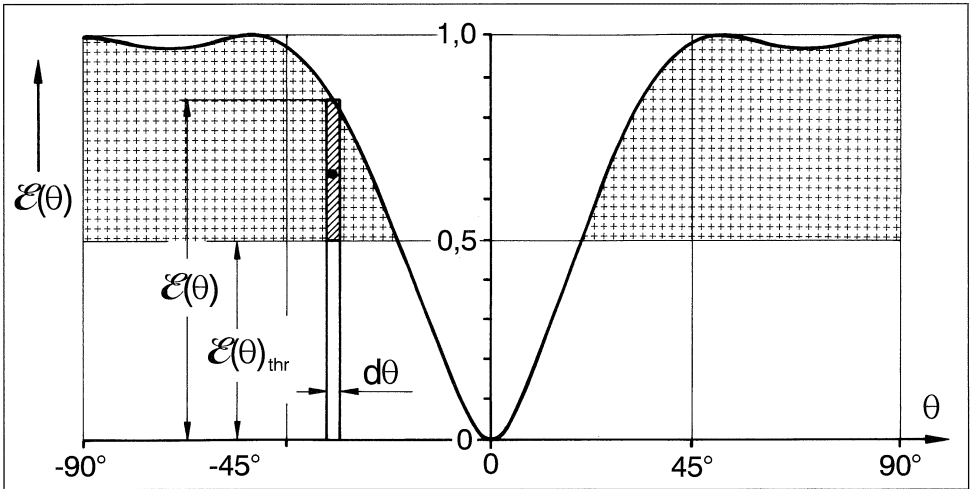


Bild 10.7: Zur Berechnung des "statischen Moments" der Fläche oberhalb eines Schwellenwerts $\mathcal{E}(\theta)_{thr}$ der schnitwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ am Beispiel des zum Grenzkreis nach Bild 10.5 gehörenden $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Spannungszustands

Ausgegangen wird von einer Kurve $\mathcal{E}(\theta)$, $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, die beim Bruchwinkel θ_{fp} den Wert $\mathcal{E}(\theta_{fp}) = 1$ aufweist. Als Schwellenwert, ab dem $\mathcal{E}(\theta)$ als relevant für eine Bruchauslösung durch Fehlstellen angesehen wird, ist $\mathcal{E}(\theta)_{thr} = 0,5$ gewählt worden.

Das "statische Moment" der Fläche oberhalb dieses Schwellenwertes, bezogen auf die Linie $\mathcal{E}(\theta)_{thr} = 0,5$, ist:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-90^\circ}^{90^\circ} (\mathcal{E}(\theta) - \mathcal{E}(\theta)_{thr})^2 d\theta \quad \text{für } \mathcal{E}(\theta) \geq \mathcal{E}(\theta)_{thr}. \quad (10.5)$$

Um einen Bezugswert S^* zu schaffen, wertet man die $\mathcal{E}(\theta)$ -Kurve für einachsige Quer-Zugbeanspruchung gemäß Gl. (10.5) aus.

Mit den Bezeichnungen S für den zu beurteilenden Spannungszustand und S^* für die einachsige Quer-Zugbeanspruchung sowie S^{**} für die isotrope zweiachsige Zugbeanspruchung wird dann folgender Ansatz gemacht:

$$\{\sigma\}_{red} = \{\sigma\}_{mod} \left[1 - \Delta^{**} \frac{S - S^*}{S^{**} - S^*} \right]. \quad (10.6)$$

Hierin sind:

- $\{\sigma\}_{red}$ die Größe des "probabilistisch" reduzierten Bruchspannungszustands-Vektors für einen beliebig gewählten $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}\tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustand,
- $\{\sigma\}_{mod}$ die Größe des mit dem Bruch-Modell ermittelten Bruchvektors,
- S^* das statische Moment nach Gl. (10.5) für einachsige Zugspannung σ_2 ,
- S^{**} das statische Moment nach Gl. (10.5) für den Spannungszustand $\sigma_2 = \sigma_3$,
alle anderen Spannungen "null",
- Δ^{**} die relative Abweichung zwischen Versuchsergebnissen
und Modell bei zweiachsiger Zugbeanspruchung $\sigma_2 = \sigma_3$.

Für die hier durchgeführte Beispielrechnung wurde als aus Versuchen bekannt angenommen, daß bei zweiachsiger Zugbeanspruchung mit $\sigma_2 = \sigma_3$ die reale Festigkeit um 20% gegenüber dem mit der Bruchbedingung errechneten theoretischen Wert reduziert ist, während bei einachsiger σ_2 -Beanspruchung das Modell durch den Parameter $R_{\perp}^{(+)}$ an die Versuchsergebnisse angepasst ist. Damit ergibt sich in Gl. (10.6) der Wert $\Delta^{**} = 0,2$. Nach dieser "Kalibrierung" kann nun die Reduzierung der mit dem Modell berechneten Bruchspannungen für jeden beliebigen Spannungszustand gemäß Gl. (10.6) vorgenommen werden. Jeder Spannungszustand, dessen $\mathcal{E}(\theta)$ -Verteilung "völliger" ist als diejenige für einachsige σ_2 -Beanspruchung, d.h. für den $S > S^*$ ist, erfährt somit eine Reduzierung der theoretischen Festigkeit.

Auf diese Weise und mit den angenommenen Werten sind die (σ_2, σ_3) - und die (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve nach **Bild 10.8** berechnet worden, bei denen nun "gerundete Ecken" auftreten.

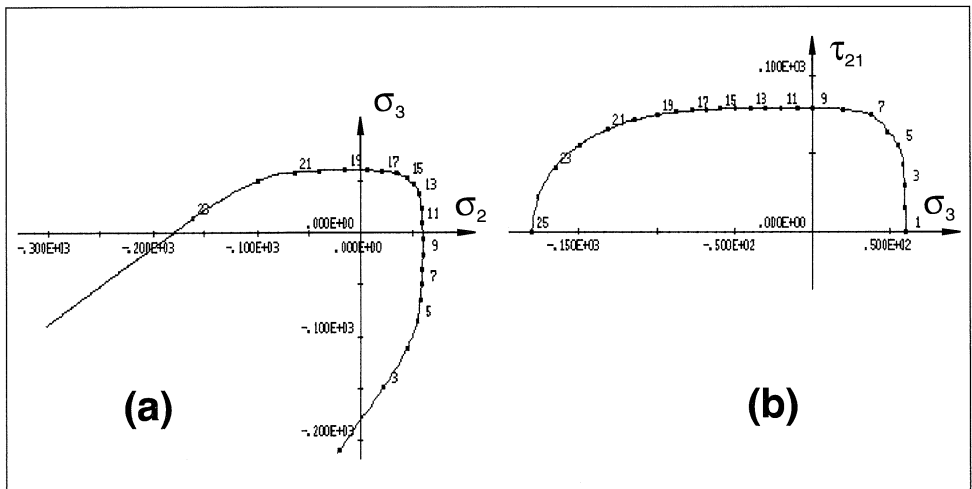


Bild 10.8: (σ_2, σ_3) -Bruchkurve (a) und (σ_3, τ_{21}) -Bruchkurve (b) mit durch Gl. (10.6) "gerundeten Ecken"

10.6 Versuch einer Beurteilung

Im folgenden wird versucht, die Ergebnisse der Abschnitte 10.3 bis 10.5 kritisch zu bewerten.

In der Frage der Sensitivität des Bruchwinkels, die sich aufgrund der Modellvorstellung von der Master-Bruchfläche und der Berandung des Vektorenfächers in Form einer räumlichen Cosinus-Halbwellen ergab, kann man annehmen, daß es auch in der Wirklichkeit bestimmte Spannungszustände gibt, bei denen der Bruchwinkel sehr empfindlich auf kleine Unregelmäßigkeiten am realen Verbundstoff reagiert. Wenn solche Bereiche erkannt werden können, wird man diese tunlichst für die experimentelle Verifikation der Modelle meiden.

Zur Problematik der "blinden Flecken" oder "toten Räume" ist zunächst zu bemerken, daß mit den beiden verschiedenen Bezeichnungen ein und dasselbe Phänomen angesprochen wird, nämlich die Unberührbarkeit bestimmter Teile der Master-Bruchfläche durch Cosinus-Halbwellen oder – anders ausgedrückt – das Auftreten von "Hohlraum" zwischen der Master-Bruchfläche und dem durch die Menge aller ohne Bruch ertragbaren Spannungszustände gebildeten "Bruch"-Körper.

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Erscheinungen eine Entsprechung in der Realität besitzen oder ob man danach trachten sollte, die Toträume an der Master-Bruchfläche durch entsprechende mathematische Modifikation der Bruchbedingungen zu beseitigen [79,85]. Diese Frage kann definitiv nur durch Experimente geklärt werden. Aus der Sicht des Autors besteht aber – bis zum Beweis des Gegenteils – der Totraum an der Master-Bruchfläche zu

Recht. Der Totraum zwingt den Bruchwinkel bei kleinen Veränderungen bestimmter Spannungszustände zu "springen", statt sich kontinuierlich mit dem Spannungszustand zu ändern. Das wird besonders bei dem schon mehrfach diskutierten Spannungszustand deutlich, der durch den Grenzkreis repräsentiert wird, vgl. Bilder 10.5 auf S. 179 und 10.7 auf S. 182. Würde man die (σ_n, τ_{nt}) -Bruchkurve so modifizieren, daß der Grenzkreis zur Bruchkurve wird, wäre bei dem zugehörigen $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ -Spannungszustand jeder Bruchwinkel möglich, was aber gegen den 3.Satz der Bruchhypothese verstoßen würde. Deshalb wird man wohl nur dann an die Wegnahme des Totraums denken müssen, wenn die Experimente wider Erwarten keine Häufung der Bruchwinkelergebnisse bei 0° und etwa 50° zeigen sollten.

Es sei nochmals daran erinnert, daß Totraum keinen Einfluß auf die errechneten Spannungen beim Bruch nimmt, wohl aber auf den Verlauf der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ über dem Winkel θ , wie beispielsweise aus Bild 10.7 auf S. 182. hervorgeht.

Leider lassen sich Anstrengungen $\mathcal{E}(\theta) < 1$ nicht experimentell nachweisen, so daß für die hier angesprochenen Bereiche wohl auf Dauer einige Ungewißheiten hingenommen werden müssen.

Die dem Bild 10.7 zugrundeliegenden Parameter ($R_{\perp}^{(+)} = 60 \text{ N/mm}^2$; $R_{\perp\parallel} = 80 \text{ N/mm}^2$; $R_{\perp}^{(-)} = 180 \text{ N/mm}^2$; $p_{\perp\parallel}^{(-)} = 0, 2$; $p_{\perp\parallel}^{(+)} = 0, 3$; $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\perp}^{(+)} = 0, 189$) führen dazu, daß sich zwischen den beiden Maxima der schnittwinkelabhängigen Anstrengung $\mathcal{E}(\theta)$ bei $\theta_{fp} \approx \pm 50^\circ$ und $\theta_{fp} = \pm 90^\circ$ nur ein ganz flacher Abfall zu einem lokalen Minimum ausbildet. Der Unterschied der "Anstrengungskurve" $\mathcal{E}(\theta)$ über θ gegenüber derjenigen, die entstehen würde, wenn man den toten Bereich entfernt, indem man den Grenzkreis zur Bruchkurve macht (die Bruchgefahr zwischen den Maxima bliebe dann konstant bei "1") ist in diesem Fall, wie aus Bild 10.7 ersichtlich, sehr gering.

Die im Abschnitt 10.5 angestellten Betrachtungen zu Fragen der Probabilistik sind nur als ein Nebenprodukt der Bruchwinkelsuche zu betrachten, durch die man sozusagen "gratis" einige Anhaltspunkte bekommt. Für eine solide Bearbeitung der probabilistischen Fragen sollten "professionellere" Methoden angewandt werden, wie sie z.B. in [75] angesprochen werden.

11 Offene Fragen

11.1 Anwendbarkeit für verschiedene Beanspruchungsarten

Eine weitverbreitete irrige Meinung ist die, daß Bruchbedingungen – wie auch die hier vorgestellten – nur auf monoton von "null" bis zum Bruch gesteigerte (sogenannte "zügige") Beanspruchung angewandt werden dürften. Wahrscheinlich rührt dieser Irrtum daher, daß die meisten Versuche zur Verifikation von Bruchbedingungen aus Gründen der Einfachheit sowie der Kosten- und Zeitersparnis mit kurzzeitiger, zügiger Belastung bis zum Bruch durchgeführt werden. Bruchbedingungen werden aber selten ausschließlich für nur eine Beanspruchungsart konzipiert, die Arbeit [57] dürfte in dieser Beziehung eine Ausnahme darstellen.

Bei den bisher gängigen Bruchbedingungen wurde nie der Anspruch erhoben, daß sie physikalisch begründet seien, sondern sie sollten nur dazu dienen, ein Interpolationspolynom durch einige experimentell ermittelte Stützpunkte zu legen. Dabei spielt die Beanspruchungsart keine Rolle. Selbstverständlich können die Versuchspunkte auch aus Versuchen mit langzeitiger ruhender oder schwingender Beanspruchung stammen [25,87]. Anders verhält es sich mit den in Kapitel 5 und 9 vorgestellten Bruchbedingungen. Sie basieren im wesentlichen auf der Mohrschen Festigkeitshypothese und es stellt sich somit die Frage, ob diese für alle Beanspruchungsarten gleichermaßen gilt. Es ist kaum zu erwarten, daß sich das Bruchverhalten der hier betrachteten spröde-brechenden Faserverbundstoffe mit der Beanspruchungsart gravierend ändert. Folglich bestehen auch keine Bedenken dagegen, die entsprechenden Bruchbedingungen nicht nur bei monoton gesteigerter Beanspruchung, sondern auch bei ruhender (statischer) und schwingender Langzeitbeanspruchung anzuwenden. Selbst wenn die physikalische Begründung in diesen Fällen noch angezweifelt werden kann, zum "curve fitting" eignen sich die angegebenen Formulierungen allemal recht gut. Vor allem sind sie insofern "werkstoffgerecht", als sie Zfb und Fb unterscheiden, was für alle Beanspruchungsarten richtig ist. Allerdings ist bei schwingender Beanspruchung zu erwarten, daß ein Zfb in einer Schicht den Fb in Nachbarschichten viel stärker durch Kerbwirkung stimuliert als bei zügiger und ruhender Beanspruchung.

Die neuen physikalisch fundierten Bruchbedingungen sind auch insofern angenehm, als man durch sie nicht zu einer aufwendigen Bestimmung von Festigkeitsparametern gezwun-

gen wird, die zwar zum curve fitting in die Bruchfunktion aufgenommen wurden, dort aber – physikalisch gesehen – überhaupt nicht hingehören. Ein Beispiel hierfür wird in der Arbeit [25] beschrieben, in der über Erfahrungen mit Bruchbedingungen bei schwellender Beanspruchung berichtet wird. Will man die Festigkeit einer UD-Schicht bei schwingender $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung berechnen, braucht man bei den neuen Bruchbedingungen eine Wöhler-Kurve für $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung und eine Wöhler-Kurve für $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung. Bei Anwendung der *Tsai, Wu*- Bruchbedingung benötigt man aber zusätzlich noch die $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Wöhler-Kurve, obwohl $\sigma_{\perp}^{(+)}$ keinen Einfluß auf den Schwingbruch unter kombinierter $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \tau_{\perp\parallel})$ -Beanspruchung hat.

Der wohl schwerwiegendste Mangel der vorgestellten "elementaren" Bruchanalyse ist der, daß sie die von Zfb-Rissen auf Nachbarschichten ausgeübte Kerbwirkung nicht erfaßt. Glücklicherweise wird diese durch die an der Reißspitze bei hoher Belastung bzw. großer Schwingspielzahl auftretende Delamination etwas gemildert. Trotzdem sollte sie – insbesondere bei schwingender Beanspruchung – in ihrer Auswirkung auf $\sigma_{\parallel}^{(+)}$ -beanspruchte Schichten möglichst nicht vollständig unberücksichtigt bleiben. Wenn die schichtenweise Analyse beispielsweise zeigt, daß eine Schicht (z.B. eine 0° -Schicht), die für die Tragfähigkeit eines Laminats eine entscheidende Bedeutung hat, mit zwei nicht ganz dünnen Nachbarschichten (z.B. 90° -Schichten) in Berührung steht, in denen massive Reißbildung vom Modus A auftritt, dann ist es sicher nicht richtig, bei der "Lebensdauer-Berechnung" für das Laminat bei der 0° -Schicht mit Werten aus einer σ_{\parallel} -Wöhler-Kurve zu rechnen, die an einem ungekerbten UD-Probekörper ermittelt wurde. Falls aber nur eine solche vorliegt, sollte man deren Werte für die Anwendung auf eine Schicht im Laminat, die von ihren Nachbarschichten angekerbt wird, mit einem geschätzten Faktor < 1 erniedrigen. Je nach Schwere der Ankerbung könnte ein solcher Faktor etwa 0,8 bis 0,5 sein. So würde die Kerbwirkung jedenfalls näherungsweise berücksichtigt. Für das Schätzen eines solchen Abminderungsfaktors ist es natürlich günstig, die Ergebnisse einer realistischen Zfb-Rechnung für die Nachbarschichten mit den angegebenen Bruch-Modi und Überschreitungsgraden $\mathcal{E}_{IFF} > 1$ nutzen zu können.

Trotz aller Fortschritte in der schichtenweisen Bruchanalyse von Laminaten wird von Schwingfestigkeits-Experten und Bruchmechanikern vielfach – z.B. in [88] – die Ansicht vertreten, daß die schichtenweise Bruchanalyse der Lamine für die Behandlung schwingender Beanspruchungen nicht anwendbar sei. Zweifellos ist es heute noch nicht möglich – nicht einmal für einen simplen Einstufenversuch – die zu erwartende Bruch-Schwingspielzahl eines Laminats mit befriedigender Genauigkeit mit Hilfe einer schichtenweisen Bruchanalyse vorherzuberechnen. Darauf kommt es aber auch nicht in erster Linie an. Am wichtigsten ist es, daß man beim Entwurf eines Laminats für schwingende Beanspruchung mit Hilfe der schichtenweisen Bruchanalyse erkennt, welche Schichten besonders kerb- und damit ermüdungsgefährdet sind, damit man durch "Umschichtung" oder Faserrichtungsänderungen

und möglicherweise Einbau von "Rißstopperschichten" schon beim Entwurf alles Erdenkliche tun kann, um ein möglichst schwingfestes Laminat zu erzielen. Auf diese Weise könnte man sich etliche kostspielige Schwingfestigkeitsversuche an Bauteilen ersparen!

Die Bruchanalyse bei schwingender Beanspruchung wird durch das "Weglaufen" von matrixdominierten Spannungen bei langdauernder Belastung erschwert. Bei der Schwingfestigkeitserprobung im Zuge der Entwicklung der schon mehrfach erwähnten Pkw-Drehfeder aus GFK haben sich einige grundsätzliche Erkenntnisse über das zweckmäßige Arbeiten mit Bruchbedingungen bei schwingender Beanspruchung ergeben [25]. Am Beginn der Entwicklung wurde die GFK-Drehfeder in einem Einstufenversuch mit einem zwischen den Werten 1700 Nm und 170 Nm pulsierenden Drehmoment belastet. Das Fasergerüst hielt die maximale und minimale Verdrehung der Feder etwa konstant, obwohl die Spannungen σ_2 (und τ_{21}) sich während der Versuchsdauer änderten. Die zwischen Oberspannung σ_{20} und Unterspannung σ_{2u} pulsierende $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung der äußeren UD-Schicht veränderte sich im Laufe der Zeit so sehr, daß die anfangs negative Unterspannung bis in den positiven Bereich "weglief", also von einer Druckspannung zu einer Zugspannung wurde. So kam es bei den Versuchen zu den zunächst "unerklärlichen" Quer-Zugbrüchen nach Modus A. Erwartet wurden nur durch die Druck-Oberspannung verursachte Modus C-Brüche. Diese traten dann auch nur noch auf, nachdem das Drehmoment-Verhältnis von $(M_{tu}/M_{to}) = 0,1$ auf 0,36 erhöht wurde, was den Betriebsbedingungen besser entsprach.

Es erscheint fast aussichtslos, das "Weglaufen" der matrixdominierten Spannungen bei schwingender Beanspruchung rechnerisch zu verfolgen. Deshalb wurde in [25] vorgeschlagen, sich folgendermaßen zu behelfen:

- Man benutzt als Festigkeitsparameter Schwingfestigkeiten $R_{\perp}^{(+)}(N), R_{\perp}^{(-)}(N), R_{\perp\parallel}(N)$, die nicht mit konstanter $\sigma_{\perp}^{(+)}$ - oder $\sigma_{\perp}^{(-)}$ -Beanspruchung bzw. $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchung ermittelt werden, sondern aus Schwingfestigkeitsversuchen stammen, in denen die Verzerrung ε_{\perp} bzw. $\gamma_{\perp\parallel}$ während der ganzen Versuchsdauer konstant ist.
- Es werden weiterhin die mit den Spannungen σ_2, τ_{21} usw. formulierten Zfb-Bruchbedingungen benutzt.
- Als Spannungswerte für σ_2 und τ_{21} setzt man in die Zfb-Bruchbedingungen diejenigen ein, die sich mit den für den Belastungsbeginn, d.h. für die ersten Lastzyklen, geltenden Sekantenmoduln $E_{\perp s}$ bzw. $G_{\perp\parallel s}$ errechnen.
- Als Schwingfestigkeitswerte $R_{\perp}^{(+)}(N), R_{\perp}^{(-)}(N), R_{\perp\parallel}(N)$ setzt man in die Zfb-Bedingungen diejenigen Werte aus der mit konstanten Verzerrungen ε_{\perp} bzw. $\gamma_{\perp\parallel}$ aufgenommenen Wöhler-Kurve ein, die sich aus ε_{\perp} bzw. $\gamma_{\perp\parallel}$ mit den gleichen Sekantenmoduln errechnen, wie man sie auch zur Berechnung der Schichtspannungen des Laminats benutzt hat.

Auf diese Weise wird – so ist zu hoffen – das im Bauteil auftretende "Weglaufen" der Spannungen dadurch zumindest näherungsweise erfaßt, daß man bei der Ermittlung der Festigkeiten im Probekörper ein ähnliches "Weglaufen" zuläßt, statt die Spannung konstant zu halten. Täte man dies nicht, sondern benutzte wie üblich Festigkeitswerte aus Wöhler-Linien, die bei konstanter Spannung aufgenommen wurden, müßte man in Zeitintervallen rechnen, in denen man abschnittsweise die Moduln und damit die Spannungen konstant hält. Dazu würden schwingenspielzahlabhängige Moduln und schließlich eine Schadens-Akkumulationshypothese benötigt, was alles zu einem kaum realisierbaren Aufwand führt.

Um mit der vorgeschlagenen Näherungsmethode die zu erwartende Schwingenspielzahl bis zum Beginn der Zfb-Rißbildung bei einer Einstufen-Belastung abzuschätzen, muß man iterativ so lange zusammengehörige Werte $R_{\perp}^{(+)}(N)$, $R_{\perp}^{(-)}(N)$, $R_{\perp\parallel}(N)$, d.h. solche, die sämtlich zu einer gleichen Bruch-Schwingenspielzahl N gehören, in die Bruchbedingung einsetzen, bis diese erfüllt ist, d.h. die Bruchfunktion den Wert 1 annimmt. Diejenige Bruch-Schwingenspielzahl N_B der Festigkeitswerte, mit denen die Bruchbedingung schließlich erfüllt wird, ist dann die zu erwartende Schwingenspielzahl bis zum Einsetzen der Zfb-Rißbildung der betrachteten Schicht im Laminat.

Bei der Benutzung der Fb-Bedingungen zur Abschätzung der Lebensdauer (Bruch-Schwingenspielzahl) des Laminats wird in konventioneller Weise verfahren, indem $R_{\parallel}(N)$ -Werte einer bei konstanter Spannung σ_{\parallel} ermittelten Wöhler-Linie benutzt werden.

Manche der hier angestellten Betrachtungen können sinngemäß auf langdauernde ruhende (statische) Beanspruchungen übertragen werden [25].

Obwohl also zur Anwendung der Bruchbedingungen auf verschiedene Beanspruchungsarten schon Vorarbeit geleistet worden ist, sind auf diesem weiten Feld doch noch viele Fragen offen.

Eine Beanspruchungsart, die vollkommen außerhalb der Reichweite der in diesem Buch behandelten Methode der schichtenweisen Bruchanalyse liegt, ist die Stoß- oder Schlagbeanspruchung (Impact). Gerade gegenüber dieser Beanspruchungsart sind die Faserverbund-Lamine außerordentlich empfindlich. Dies stellt oft eines der größten Hemmnisse für ihren Einsatz in Bauteilen dar, bei denen solche Beanspruchungen nicht auszuschließen sind; man denke z.B. an Steinschlag bei Autos oder bei Flugzeugen während Start und Landung auf unbefestigten Pisten. Obwohl auch bei Impact-Beanspruchung Zwischenfaserbrüche eine große Rolle spielen, kann nicht erwartet werden, daß allein mit den hier beschriebenen Methoden das Bruchgeschehen angemessen erfaßt werden könnte. Die Unzulänglichkeit beginnt bereits bei der Spannungsanalyse; denn bei hohen Auftreffgeschwindigkeiten spielen bereits die Ausbreitung und Reflexion der Stoßwellen eine Rolle. Auch die Stoffgesetze bei extrem hohen Deformationsgeschwindigkeiten sind natürlich gegenüber der Situation bei zügiger oder schwingender Belastung sehr verändert. In einem hohen Maße bilden sich Schlagschäden in

Form von Delaminationen aus, für die – wie schon mehrfach erwähnt – die hier vorgestellten Bruchanalysemethoden nur sehr begrenzt brauchbar sind. Diese können deshalb allenfalls in einer untergeordneten Funktion in ein aufwendigeres Modell für die Schlagschadensanalyse mit eingebunden werden. Vermutlich werden bruchmechanische Ansätze auf diesem Gebiet – insbesondere zur Beschreibung der Delaminationsvorgänge – eine überragende Bedeutung erlangen.

11.2 Einige ungeklärte Fragen

Im folgenden sollen einige wichtige, aber unbefriedigend gelöste Probleme und ungeklärte Fragen unter entsprechenden Schlüsselworten zumindest einmal kurz angesprochen werden.

Nichtlinearität und Verzerrungs-Interaktionen

Die starken Krümmungen der $(\sigma_{\perp}^{(-)}, \varepsilon_{\perp})$ -Diagramme und $(\tau_{\perp\parallel}, \gamma_{\perp\parallel})$ -Diagramme zeigen sich nur bei der Erstbelastung, s. Bild 1.3 auf S. 5. Bei der anschließenden Entlastung führt die Entlastungslinie vom Endpunkt der Erstbelastung nahezu geradlinig in den Belastungs-Nullpunkt zurück, wenn man einmal von einer meist auftretenden kleinen bleibenden Dehnung bzw. Schubverformung absieht. Die Zweitbelastungs-Linie fällt dann ungefähr mit der Entlastungslinie des ersten Zyklus zusammen. Bei mehrfacher Belastung bis zur stets gleichen Höchstlast spielt die hier angesprochene Nichtlinearität also keine nennenswerte Rolle mehr. Von dort her betrachtet, wird das Problem der Nichtlinearität bei mehrfacher Belastung etwas differenzierter zu betrachten sein, als in dieser Arbeit geschehen.

Wichtiger – aber auf jeden Fall schwieriger zu berücksichtigen – ist u.U. der in den Bildern 3.3 und 3.4 auf S. 35 und 36 zum Ausdruck kommende Befund, daß sich die Spannungen σ_2 und τ_{21} gegenseitig beim Verformungsverhalten beeinflussen, wenn sie kombiniert auftreten. Vermutlich ist aber auch dies nur bei der Erstbelastung so ausgeprägt der Fall, denn nur bei dieser treten die für die gegenseitige Beeinflussung ursächlichen Mikroschädigungen auf. Die aufgeworfenen Fragen sollten bald geklärt werden, weil augenblicklich noch eine gewisse Unsicherheit bei der Wahl der Moduln für die Spannungs- und Bruchanalyse besteht.

Das "dünne Schicht"- und "in situ"-Problem

Um den Rahmen dieses Buches nicht zu sprengen, wurde nur am Rande auf die Frage der Ermittlung der Festigkeitsparameter eingegangen, die in den Bruchbedingungen erscheinen. Es wurde im allgemeinen vorausgesetzt, daß diese an UD-Probekörpern ermittelt werden. Dagegen gibt es aber ernst zu nehmende Einwände. Es ist seit langem bekannt [89], daß die Rißbildung in Laminaten – insbesondere in dünnen Schichten – durch die richtungsabhängige Steifigkeit der Nachbarschichten nicht unerheblich beeinflußt wird. Peters [90] erklärt dies anschaulich mit dem Vorhandensein einer gewissen konstanten Eindringtiefe einer die Rißöffnung behindernden Wirkung durch die Nachbarschichten, die sich um so stärker auswirkt,

je kleiner das Verhältnis der Dicke der Schicht zur Eindringtiefe ist. Auch der Größeneinfluß (size effect, Weibull-Effekt) mag eine gewisse Rolle spielen [17]. Die Behinderung der Rißöffnung dürfte im übrigen am stärksten sein, wenn die Fasern der Nachbarschicht mit der Faserrichtung der rißgefährdeten Schicht einen Winkel von 90° bilden, so daß die größtmögliche Steifigkeit der Nachbarschicht der Rißöffnung entgegenwirkt. Inzwischen gibt es für ein $(0^\circ, 90^\circ)$ -Laminat eine Theorie [68] (dort Seite 219), die einen Dickeneinfluß qualitativ richtig erfaßt, für die Konstruktionstechnik aber nicht ohne weiteres benutzbar ist.

Als seinerzeit die hier angesprochenen Probleme publik wurden, war man mancherorts eine Zeitlang geneigt, die Methoden der schichtenweisen Bruchanalyse als einen gescheiterten Versuch zu betrachten und sie ad acta zu legen. Wenn nämlich die Festigkeitsparameter in den Bruchbedingungen, mit denen man z.B. einen Laminataufbau optimieren will, selbst in gravierender Weise vom Laminataufbau abhängen, wäre das Modell in der Tat unbrauchbar. So schwerwiegend sind die Einflüsse allerdings nicht, daß man das Modell als Ganzes verwerfen müßte, aber es besteht aller Grund, die Bedenken ernst zu nehmen und nach Abhilfe zu suchen. Die nächstliegende Maßnahme könnte darin bestehen, die Festigkeitsparameter nicht an UD-Probekörpern, sondern an speziell zu diesem Zweck konzipierten Prüflaminaten zu ermitteln. Dabei handelt man sich aber sogleich die Unannehmlichkeit ein, daß man nun den Spannungszustand beim Bruch in der Prüfschicht mit einer schichtenweisen, nicht-linearen Spannungsanalyse berechnen muß, wobei sich neue Fehlerquellen einstellen. Die hier anstehenden Fragen können nur in einer sehr engen Kooperation von Vertretern der Damage Mechanics, der Konstruktionstechnik und Prüftechnik befriedigend gelöst werden.

"Menschliche" und organisatorische Probleme

Auch auf der menschlichen Seite der Forschungs- und Entwicklungstätigkeit gibt es offene Fragen und ungelöste Probleme. Wie in vielen Lebensbereichen so sind auch bei der Ingenieurstätigkeit oft gerade die menschlichen und organisatorischen Probleme die größeren Hemmnisse. Die Faserverbundtechnik hätte sich vermutlich wesentlich besser entwickeln können, wenn es mehr Kommunikation und auch Kooperation unter den Vertretern der verschiedenen durch die Faserverbundtechnologie angesprochenen Fachdisziplinen gegeben hätte. Konstrukteure sind meistens nicht sehr kommunikationsfreudig. Ein Grund hierfür dürfte die Tatsache sein, daß sie wegen ihres "Alltagsgeschäfts" nicht jederzeit über die neuesten Erkenntnisse der Wissenschaft im Bilde sein können. Sie zeigen deshalb häufig eine gewisse Scheu vor Fachgesprächen mit "Wissenschaftlern", insbesondere mit solchen, die in der Grundlagenforschung tätig sind. Vielfach tragen Wissenschaftler ungewollt zu dieser Abneigung bei, indem sie ingenieurmäßige Ausführungen – wie beispielsweise diejenigen in diesem Buch – als "unwissenschaftlich" einstufen. Dem könnten die Konstrukteure aber mit dem Hinweis begegnen, daß man nicht warten kann, bis die Wissenschaft sich endlich auch

der Probleme annimmt, mit denen die Konstruktion tagtäglich zu kämpfen hat. Das Bauteil muß hier und heute entwickelt werden und nicht erst in fünf oder zehn Jahren, und zwar so gut wie möglich (und nötig) unter den gegebenen Rahmenbedingungen und nicht mit dem Anspruch höchster wissenschaftlicher Korrektheit. Auf der Basis dieses Bewußtseins sollten Konstrukteure aber für den wissenschaftlichen Fortschritt höchst aufgeschlossen sein und jede Gesprächsmöglichkeit nutzen, allein schon deshalb, damit "die Wissenschaft" sich ihrer dringlichen Probleme annimmt.

Zum Schluß noch ein praktischer Rat: Man sollte fortan kein anspruchsvolles Faserverbundbauteil, bei dem die "Festigkeit" eine entscheidende Rolle spielt, mehr entwickeln, ohne in allen Entwicklungs-Etappen eine zeitgemäße, mit einem vernünftigen Aufwand/Nutzen-Verhältnis konzipierte, Bruchanalyse durchzuführen. Bei den heute selbstverständlich immer noch unverzichtbaren Belastungs- und Bruchversuchen am Prototyp-Bauteil sollte man dann auch den Prüfaufwand – mit den damit verbundenen Kosten – nicht scheuen, der nötig ist, um zu erfahren, wo die Theorie richtige Vorhersagen gemacht hat, und wo möglicherweise "Korrekturfaktoren" angebracht werden müssen. Nach der Einarbeitung dieses auf die eigenen Belange abgestimmten Erfahrungsschatzes wird die schichtenweise Bruchanalyse zu einem hervorragenden Instrument, das Entwicklungszeit und -kosten sparen hilft.

Die hier angeratene innige Verquickung von "Berechnung" und "Prüfung" setzt allerdings auch eine enge Vernetzung dieser beiden Bereiche im Unternehmen voraus. Die in Großunternehmen meist anzutreffende personelle und gar räumliche Trennung des Prüfbereichs vom Berechnungsbereich ist für ihr enges Zusammenwirken oft sehr erschwerend.

11.3 Versuch einer Prioritätensetzung

Die bisherigen Ausführungen sollten bereits deutlich gemacht haben, daß es in der Festigkeitsanalyse der Faser-Matrix-Laminate nicht nur einige "blinde Flecken", sondern große unerforschte Gebiete gibt. Das bisher zur Verfügung stehende Know-how macht einen sehr inhomogenen und unausgewogenen Eindruck. Einerseits existieren für manche Probleme bereits sehr verfeinerte Modelle, andererseits sind aber noch etliche Voraussetzungen, die von grundlegender Bedeutung sind, bei weitem nicht hinreichend geklärt. Für die Forschung kann es deshalb – aus der Sicht des Autors – vorerst nicht um weitere Verfeinerungen der Modelle gehen, sondern mit höchster Priorität müßten zunächst deren elementare Grundlagen gesichert werden. Aus dieser Sicht fällt es nicht schwer, eine Prioritäten-Liste zu erstellen. Das Buch befaßt sich sehr eingehend mit der Zwischenfaserbruch-Problematik. Dafür gibt es gute Gründe; diese Frage war in der Vergangenheit zu sehr vernachlässigt worden und die angebotenen Lösungen wurden oft der Realität nicht gerecht. Auch spielen die Zwischenfaserbrüche beim Bruchgeschehen eine weit wichtigere Rolle als landläufig angenommen wird.

Die entscheidende Voraussetzung der Zf-Bruchanalyse ist die, daß sich eine Schicht in einem Laminat genau so verhält wie die isoliert untersuchte Einzelschicht. Dies wird durch den "dünne Schicht"- und "in situ"-Effekt in Frage gestellt. Deshalb muß mit hoher Dringlichkeit dieser Problemkreis abgeklärt werden. Dabei wird es – wie eingehend erörtert wurde – unumgänglich sein, die Zfb-Versuche mit einer sehr verfeinerten, nicht-linearen Spannungsanalyse auszuwerten.

Die in diesem Buch in den Vordergrund gerückte Diskussion der Zwischenfaserbruch-Problematisierung darf nicht den Blick dafür verstellen, daß die Tragfähigkeit eines gut konzipierten Laminats vom Faserbruch bestimmt wird. Auch hier gibt es noch eine gravierende Unsicherheit bei der Voraussetzung der Bruchhypothese der maximalen Faser-Längsspannung, wie bei der Diskussion der Bruchbedingungen für Faserbruch auf S. 75 ausgeführt wurde. *Hart-Smith* weist in [28] und vielen weiteren Arbeiten darauf hin, daß eine Abhängigkeit der ertragbaren Faser-Längsspannung von der Querbeanspruchung der Faser auftritt. Dies ist schwer zu erklären. Man kann auch nicht ausschließen, daß die vermeintliche Abhängigkeit auf unzulängliche Versuchstechniken zurückzuführen ist [91]. Behauptet wird, daß an einem ausgeglichenen ($0^\circ, 90^\circ$)-Laminat bei einer Beanspruchung, die zu dem Betrage nach gleich hohen Dehnungen mit entgegengesetzten Vorzeichen in den beiden Faserrichtungen führt, nur eine etwa halb so hohe Faser-Längsspannung verwirklicht werden könne wie bei einachsiger Beanspruchung in einer Faserrichtung. Weil diese Frage z.B. für die Belastbarkeit von Torsionsrohren aller Art von höchster Bedeutung ist, sollte sie dringend geklärt werden. Verlässliche Ergebnisse sind aber nur zu erreichen, wenn die zu vergleichenden Spannungszustände an gleichen Probekörpern realisiert werden, z.B. an rohrförmigen Probekörpern. An einem $\pm 45^\circ$ -Rohr läßt sich im Torsionsversuch der Schubspannungszustand realisieren, bei dem die Dehnungen der $+45^\circ$ - und -45° -Richtung dem Betrage nach gleich groß sind aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Mit dem gleichen Probekörper läßt sich aber auch der korrespondierende Zugversuch verwirklichen, indem gleichzeitig Axial-, Umfangs- und Torsionsspannung erzeugt wird, wobei alle drei dem Betrage nach gleich groß sein müssen, damit aus ihnen eine einachsige Beanspruchung in einer Faserrichtung resultiert. Erst wenn die hier angesprochenen Grundvoraussetzungen der Fb- und Zfb-Analyse gesichert erscheinen oder die anzustellenden Untersuchungen zu einer vielleicht nötigen Modifikation geführt haben, erscheint eine Weiterentwicklung der Fb-Modelle sinnvoll.

Dringlich sind auch die Untersuchungen zum Zfb im Bereich, in dem sowohl $\sigma_2 < 0$ als auch $\sigma_3 < 0$ ist (vgl. S. 169). Ebenfalls muß noch gründlicher als bisher [64] geklärt werden, wie sich solche Spannungszustände auf die faserparallele Druckfestigkeit auswirken.

Schließlich muß noch an die Probleme des σ_1 -Einflusses auf den Zwischenfaserbruch und an die mit der Verspannung von Faser und Matrix zusammenhängenden Fragen erinnert werden (vgl. S. 67, 68).

12 Zukunftsaussichten

Offenbar wird der in Teil I und II geschilderte Stand der Bruchanalyse, obwohl die Grundlagen schon vor Jahrzehnten publiziert wurden, bisher nur an wenigen Stellen bei der Entwicklung von Faserverbundbauteilen genutzt, so daß es nicht gerechtfertigt ist, ihn als "Stand der Technik" zu bezeichnen. Der Hauptgrund hierfür dürfte darin bestehen, daß die vorgestellten Methoden und Modelle bisher nicht in kommerzielle Software umgesetzt wurden. An einigen Universitäten und Forschungs-Instituten werden aber Bruchanalyse-Programme benutzt, die den hier entwickelten Vorstellungen sehr nahekommen [83,92].

Es besteht nicht der geringste Zweifel daran, daß die neuen Modelle nur dann eine Chance haben, eine weitverbreitete Anwendung zu finden, wenn sie in kommerzielle Rechenprogramme implementiert werden. Deshalb ist zu hoffen, daß die Ergebnisse der angelaufenen Versuche zur Verifikation der neuen Modelle so überzeugend ausfallen werden, daß genügend Motivation für in Betracht kommende Softwarehäuser zu einer Neubearbeitung ihrer Composite-Analyse-Programme entsteht. Sicherlich darf man sich aber im Hinblick auf die Marktsituation im Faserverbundbereich keinen übertriebenen Erwartungen hingeben. Deshalb wird wohl der eine oder andere Anwender, für den die Nutzung der neuen Methoden wichtig ist, doch zur Selbsthilfe schreiten und – jedenfalls fürs erste – eigene Rechenprozeduren in bestehenden Programme einbinden müssen, was aber auch nicht auf besonders große Schwierigkeiten stoßen dürfte.

Die bisher im Rahmen der Überprüfung der Modellvorstellungen durchgeführten Experimente an UD-GFK [15,16,84] zur Bestimmung von Bruchspannungen und Bruchwinkeln stehen weitgehend mit den Modell-Vorhersagen in Einklang. Die meisten der geplanten, z.T. außerordentlich schwierigen Experimente befinden sich aber noch in der Entwicklungsphase. Eine vollständige experimentelle Überprüfung eines Bruchkriteriums ist praktisch gar nicht durchführbar. Die Versuche werden im $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Raum ausgeführt, wobei mehrere Spannungszustände zu ein und demselben Bruchpunkt auf der $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Master-Bruchfläche führen können; es dürfte deshalb nur eine relativ "dünne" experimentelle Belegung der Master-Bruchfläche möglich sein. Andererseits sind die neuen Ansätze aber derartig physikalisch plausibel, daß eine in einigen wesentlichen Punkten brauchbare Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie in den Bruchspannungen und vor allem den Bruchwinkeln bereits ein hohes Maß an Vertrauen in die neue Methode rechtfertigen würde.

Die Aufbereitung der neuen Zfb-Analyse für FEM-Programme wird eine der wichtigsten Aufgaben bei der weiteren Entwicklungsarbeit sein müssen. Bei einer FEM-Spannungs- und -Bruchanalyse wird es normalerweise viele Elemente geben, in denen die Anstrengung sehr niedrig ist, so daß weder eine genaue Angabe der Anstrengung $\mathcal{E}(\theta_{fp})$ noch eine Aussage über den zu erwartenden Bruchwinkel θ_{fp} interessiert. Deshalb stellt sich grundsätzlich die Frage, ob sich nicht eine "stufenweise Verfeinerung" der Rechnung empfehlen würde. Eine solche könnte darin bestehen, daß man die Berechnung mit einer als konventionelles Polynom angesetzten Bruchfunktion $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ beginnt, die eine grobe Approximation des mit Hilfe der $(\sigma_n, \tau_{nt}, \tau_{n1})$ -Master-Bruchfläche ermittelten $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Bruchkörpers darstellt. Wenn sich dann bei der Rechnung eine Anstrengung $\mathcal{E} \geq 0,6$ bis $0,8$ ergibt, könnte man auf das Rechnen mit der Master-Bruchfläche "umschalten".

Möglicherweise werden aber diese und andere Überlegungen zur Reduzierung von Rechenzeiten wie das auf S. 166 erwähnte "elektronische Album" bald gegenstandslos, wenn die Ausstattung der Konstruktions- und Entwicklungsabteilungen mit Rechenkapazität weiter so fortschreitet wie gegenwärtig. Ähnliches mag für einen Vorschlag von *Cuntze* [93] gelten, der von der Vorstellung ausgeht, daß man Teil-Bruchflächen, die einem bestimmten Bruch-Modus zugeordnet sind, mit Invarianten der Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21}$ approximieren könnte, um sich die Bruchwinkelsuche zu ersparen. Es ist aber schwer vorstellbar, daß es möglich sein sollte, im allgemeinen Fall des fünfdimensionalen $(\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{21})$ -Spannungszustands ohne die Anwendung eines Rechenprogramms wie *Brukan* [77] herauszufinden, welcher Bruch-Modus beim betrachteten Spannungszustand auftreten wird. Dies ist aber die Voraussetzung dafür, daß man den jeweils passenden Invariantensatz zur Anwendung bringen kann.

Das Hauptanwendungsgebiet der neuen Methode wird sicherlich vorerst bei den Faserverbundwerkstoffen mit Polymermatrix liegen, weil zum einen diese bisher die größte technisch/wirtschaftliche Bedeutung erlangt haben und zum anderen die neue Methode auch zunächst ein wenig für diese Stoffklasse "maßgeschneidert" wurde. Man wird sorgfältig prüfen müssen, inwieweit sie auch für andere sich spröde verhaltende Verbunde geeignet ist. Wenn man beispielsweise an faserverstärkte Keramik mit einer extrem niedrigen Zugfestigkeit der Matrix denkt, ist vorhersehbar, daß der Einfluß der faserparallelen Spannung erhöhte Beachtung verlangen wird.

Grundsätzlich ist zu erwarten, daß die neue Bruchanalyse-Methode große praktische Bedeutung erlangen wird, weil sie erstmalig physikalisch plausible Spannungswerte beim Bruch – auch bei räumlichen Spannungszuständen – liefert, und darüber hinaus für die Bruchfolgenabschätzung sehr wichtige Zusatzinformationen bietet. Mit dem zu erwartenden Fortschritt in der Numerik und bei der vermehrt verfügbaren Rechenkapazität wird auch der heute möglicherweise noch etwas "abschreckende" Rechenaufwand für die Bruchwinkelsuche bald

bedeutungslos werden, zumal bei 2D-Beanspruchung – wie im Teil II gezeigt wurde – von einem nennenswerten zusätzlichen Rechenaufwand überhaupt keine Rede sein kann.

Längerfristig gesehen wird man anstreben, das Schädigungs- und Bruchverhalten von Laminaten nicht nur für einfache Beanspruchungszustände wie zügige Belastung bis zum Bruch oder schwingende Belastung mit konstanter Ober- und Unterspannung zu behandeln, sondern dieses auch bei einer komplizierten Belastungsgeschichte vorhersagen zu können, beispielsweise auch bei mehreren nacheinander auftretenden unterschiedlichen Lastfällen. In einer so erweiterten Festigkeitsanalyse werden die in diesem Buch behandelten Vorstellungen und Modelle sicher ein wichtiger Baustein sein, aber wesentliche andere Elemente müssen hinzutreten. Beispielsweise wird dann eine Art "Registrier- und Speicherwerk" benötigt, mit dem die im Laufe der Belastungsgeschichte eingetretenen Schädigungen und Brüche, z.B. Zf-Risse, festgehalten werden.

Soll das anspruchsvolle und schwierige Unterfangen gelingen, das Verhalten von Faser-Matrix-Laminaten, angefangen bei der Mikromechanik [94] bis hin zum Schädigungs- und Bruchverhalten ganzer Bauteile "berechenbar" zu machen, so bedarf es zweifellos einer intensiven Bündelung von Know-how aus der Schädigungs- und Schadensmechanik, der Bruchmechanik und der in diesem Buch dargestellten ingenieurmäßigen Methoden sowie einer engen Kooperation mit der Werkstoffkunde und Prüftechnik.

13 Anhang

13.1 Literaturverzeichnis

- [1] Puck, A.; Schneider, W.: *On Failure Mechanisms and Failure Criteria of Filament-wound Glass-Fibre/Resin Composites*. Plast Polym. (Febr. 1969), S. 33-43
- [2] Puck, A.: *Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung*. Kunststoffe 59 (1969) 11, S. 780-787
- [3] Hashin, Z.: *Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites*. J. Appl. Mech. 47 (1980), S. 329-334
- [4] Hart-Smith, L. J.: *The Role of Biaxial Stresses in Discriminating between Meaningfull and Illusory Composite Failure Theories*. Composite Structures 25 (1993), S. 3-20
- [5] Tsai, S. W.: *Theory of Composites Design*. Think Composites, Dayton, Ohio / Paris / Tokyo 1992
- [6] Puck, A.: *Praxisgerechte Bruchkriterien für hochbeanspruchte Faser-Kunststoff-Verbunde*. Kunststoffe 82 (1992) 2, S. 149-155
- [7] Nahas, M. N.: *Survey of Failure and Post-Failure Theories of Laminated Fibre-Reinforced Composites*. J. Comp. Techn. & Res. Vol. 8 (1986) 4, S. 138-153
- [8] N. N.: *ESA Structural Materials Handbook*, Vol. 1, Polymer Composites, Section III Design Calculation Methods, Chapt. 11 - Strength Prediction & Failure Criteria
- [9] Rohwer, K.: *Computational Models for Laminated Composites* Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 17 (1993), S. 323-330
- [10] Christensen, R. M.: *Tensor Transformations and Failure Criteria for the Analysis of Fiber Composite Materials*. J. Comp. Mat. 22 (1988) 9, S. 874-897
- [11] Puck, A.: *Ein Bruchkriterium gibt die Richtung an*. Kunststoffe 82 (1992) 7, S. 607-610

- [12] Michaeli, W.; Huybrechts, D.: *A New Approach for the Dimensioning of Thick Laminates using Physically Based Strength Criteria*. Proc. 39. Conf. SAMPE 1994 Anaheim, CA, USA Vol. 2, S. 2829-2840
- [13] Michaeli, W.; Huybrechts, D.: *A new Approach for the Dimensioning of Thick Laminates*. Int. Mech. Eng. Congr. (IMECE) of ASME. Nov. 1994 Chicago, IL, USA, Proc. MD Vol. 49, S. 307-319
- [14] Cuntze, R. G.: *Evaluation and Application of a New Physically Based 2D/3D Inter-Fibre-Fracture (IFF) Strength Criterion*. Proc. Internat. Symp. Advanced Materials for Lightweight Structures, ESTEC, Noordwijk 1994, ESA-WPP-070, S. 133-139
- [15] Huybrechts, D.; Michaeli, W.: *Dimensioning of "Thick" Laminates*. 16. Conf. of the Europ. Chap. of the Soc. for the Advancement of Mat. and Proc. Engen. (SAMPE); 30. Mai - 1. Juni 1995, Salzburg, Proc., S. 211-222
- [16] Kroll, L.; Hufenbach, W.: *New Proof of Laminate Design by a Physically Based Failure Criterion*. Proceedings of ICCM-10, Whistler (Kanada) 1995 Vol. 1, S. 715-722
- [17] Talreja, R. (Hrsg.): *Damage Mechanics of Composite Materials*. Elsevier, Amsterdam / London / New York / Tokyo 1994
- [18] Puck, A.: *Neue Hochleistungs-GFK-Bauteile – Drehstabfedern, Stabilisatoren, und drehelastische Wellen*. Vortrag 22. AVK-Tagung, Mainz 1989, S. 5.1-5.10
- [19] Puck, A.: *Entwicklung von GFK-Drehrohrfedern*. Ing. Werkst. 3 (1991) 4, S. 66 und 69-71 sowie 6, S. 66-67
- [20] Puck, A.: *GFK-Drehrohrfedern sollen höchstbeanspruchte Stahlfedern substituieren*. Kunststoffe 80 (1990) 12, S. 1380-1384
- [21] Michaeli, W.; Wegener, M.: *Einführung in die Technologie der Faserverbundwerkstoffe*. Hanser, München / Wien 1990
- [22] Ehrenstein, G. W.: *Faserverbundkunststoffe*. Hanser, München / Wien 1992
- [23] Raju, I. S.; Foye, R. L.; Avva, V. S.: *"A Review of the Analytical Methods for Fabric and Textile Composites"*. Proceedings of the Indo-U.S. Workshop on Composites for Aerospace Application, Part I, July 1990, Bangalore, S. 129-159
- [24] Puck, A.; Schürmann, H.: *Die Zug/Druck-Torsionsprüfung an rohrförmigen Probekörpern*. Kunststoffe 72 (1982) 9, S. 554-561

- [25] Garbe, J.; Puck, A.: *Erfahrungen mit Bruchkriterien an schwellend belasteten GFK-Drehfedern*. Kunststoffe 83 (1993) 5, S. 406-411
- [26] Hochbein, H.: *Bericht zum Entwicklungsprojekt "Lkw-Stabilisator aus GFK"*. Universität Gh Kassel / Böhler AG, Düsseldorf, 1989 (unveröffentlicht)
- [27] Schreiber, W.: *Zur Gestaltung und Dimensionierung von Antriebswellen aus Faser-Kunststoff-Verbunden*. Diss. Univ. Gh Kassel 1988; Fortschr.-Ber. VDI R.1 Nr. 184, VDI-Verlag, Düsseldorf 1990
- [28] Hart-Smith, L. J.: *Fibrous Composite Failure Criteria – Fact and Fantasy*. 7. Int. Conf. on Comp. Structures, Paisley, UK, July 1993. Mc Donnell Douglas MDC 93 K 0047
- [29] Hull, D.: *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press, Cambridge / London / New York 1981
- [30] Ewius, P. D.; Ham, A. C.: *The Nature of Compressive Failure in Unidirectional Carbon Fibre Reinforced Plastics*. AIAA/ASME/SAE 15. Structures, Structural Dynamics and Materials Conf., Las Vegas, USA, April 1974, S. 1-11
- [31] Michaeli, W.; Huybrechts, D.; Wegener, M.: *Dimensionieren mit Faserverbundkunststoffen*. Hanser, München / Wien 1995
- [32] Ikegami, K.; Nose, Y.; Yasunaga, T.; Shiratori, E.: *Failure Criterion of Angle Ply Laminates of Fibre Reinforced Plastics and Application to Optimise the Strength*. Fibre Science and Technology 16 (1982), S. 175-190
- [33] Tsai, S. W.: *Theory of Composites Design*. Think Composites, Dayton, Ohio / Paris / Tokyo 1992, S. 9.5-9.6
- [34] Prinz, R.; Gädke, M.: *Characterization of Interlaminar Mode I and Mode II Fracture in CFRP Laminates*. Proc. Intern. Conf. "Spacecraft Structures and Mechanical Testing" Noordwijk, April 1991, S. 97-102
- [35] N. N.: VDI-Richtlinie 2014: *Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund*, Blatt 3. Beuth-Verlag, Berlin, erscheint demnächst
- [36] Vinson, J. R.; Sierakowski, R. L.: *The Behavior of Composite Materials*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht / Bosten / Lancaster 1986
- [37] Tsai, S. W.: *Composites Design*. Think Composites, Dayton, Ohio / Paris / Tokyo 1988
- [38] Moser, K.: *Faser-Kunststoff-Verbund*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1992

- [39] Puck, A.: *Einführung in das Gestalten und Dimensionieren* in: Ehrenstein, G. W. und Martin, H.-D. (Hrsg.): Konstruieren und Berechnen von GFK-Teilen. Beiheft zur Zeitschrift Kunststoff-Berater, Umschau-Verlag, Frankfurt a. M. 1969, S. 44-66
- [40] Rüegg, Ch.: *Kardanwellen in CFK- und Hybridbauweise* in: *Verarbeiten und Anwenden kohlenstoffaserverstärkter Kunststoffe*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1981
- [41] Schürmann, H.: *Zur Erhöhung der Belastbarkeit von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden durch gezielt eingebrachte Eigenspannungen*. Diss. Univ. Gh Kassel 1986; Fortschr.-Ber. VDI R.1 Nr. 170, VDI-Verlag, Düsseldorf 1989
- [42] Puck, A.: *Faser-Kunststoff-Verbunde mit Dehnungs- oder Spannungs-Kriterien auslegen?* Kunststoffe 82 (1992) 5, S. 431-434
- [43] Moser, K.: *Faser-Kunststoff-Verbund*. VDI-Verlag, Düsseldorf 1992, S. 314-319
- [44] Jakobi, R.: *Zur Spannungs-, Verformungs- und Bruchanalyse an dickwandigen, rohrförmigen Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden*. Diss. Univ. Gh Kassel 1987; Fortschr.-Ber. VDI R.5 Nr. 126, VDI-Verlag Düsseldorf 1987
- [45] Jakobi, R.; Puck, A.: *Zur Konstruktion und Berechnung von röhrenförmigen Faserverbund-Biegeträgern*. Vortrag, 18. AVK-Tagung, Freudenstadt 1982, S. 10.1-10.10
- [46] Herakovich, C. T.: *On the Relationship between Engineering Properties and Delamination of Composite Materials*. J. Comp. Mat. Vol. 15 (1981), S. 336-348
- [47] Herakovich, C. T.: *Free Edge Effects in Laminated Composites* in: Rabotnov, Y. u. N. (Hrsg.): Handbook of Composites, Volume 2. Structures and Design. North-Holland, Amsterdam / New York / Oxford / Tokyo 1992, S. 187-230
- [48] Kim, R. Y.; Soni, S. R.: *Experimental and Analytical Studies on the Onset of Delamination in Laminated Composites*. J. Comp. Mat. Vol. 18 (1984), S. 70-80
- [49] Soni, S. R.; Kim, R. Y.: *Delamination of Composite Laminates Stimulated by Interlaminar Shear*. Comp. Mat.: Testing and Design (7. Conf.) ASTM STP 893. J. M. Whitney, Ed., ASTM, Philadelphia 1986, S. 286-307
- [50] Kress, G.: *Free Edge Influence on CFRP-Laminate Strength*. Int. J. Damage Mech. Vol. 3, April 1994, S. 192-211
- [51] Kothe, E.: *Kombinierte Beanspruchungen* in: Knauer, B.; Wende, A. (Hrsg.): Konstruktionstechnik. Akademie-Verlag, Berlin 1988, S. 447-481

-
- [52] Hoffmann, O.: *The Brittle Strength of Orthotropic Materials*. J. Comp. Mat. Vol. 1 (1967), S. 200-206
- [53] Reddy, Y. S.; Reddy, J. N.: *Three-Dimensional Finite Element Progressive Failure Analysis of Composite Laminates under Axial Extension*. J. of Comp. Techn. & Res. 15 (1993), S. 73-87
- [54] Mohr, O.: *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?* Z. d. VDI 24 (1900) 45, S. 1524-1530 u. 46, S. 1572-1577
- [55] Jeltsch-Fricker, R.: *Bruchbedingungen vom Mohrschen Typ für transversal isotrope Werkstoffe am Beispiel der Faser-Kunststoff-Verbunde*. Kasseler Schriften zur Angewandten Mathematik . Preprint Nr. 1 (2) 1995, Univ. Gh Kassel
- [56] Stowell, E. Z.; Lin, T. S.: *On the Mechanical Behavior of Fibre-Reinforced Crystalline Materials*. J. Mech. Phys. Solids 9 (1961), S.242-260
- [57] Hashin, Z.; Rotem, A.: *A Fatigue Failure Criterion for Fibre Reinforced Materials*. J. Comp. Mat. 7 (1973), S. 448-464
- [58] Azzi, V. D.; Tsai, S. W.: *Anisotropic Strength of Composites*. Experimental Mechanics, Sept. 1965, S. 283-288
- [59] Gol'denblat, I. I.; Kopnov, V. A.: *Strength of Glass-Reinforced Plastics in the Complex Stress State*. Mekhanika Polimerov 1 (1965) 2, S. 70-78
- [60] Zacharov, K. V.: *Strength of Laminated Plastics*. Plastische Massen (6, 1963), S. 48-51
- [61] Tsai, S. W.; Wu, E. M.: *A General Theory of Strength for Anisotropic Materials*. J. Comp. Mat. 5 (1971) 1, S. 58-80
- [62] Menges, G.: *Erleichtertes Verständnis des Werkstoffverhaltens bei verformungsbezogener Betrachtungsweise*. Fortschr.-Ber. d. VDI-Z R.5 Nr. 12, VDI-Verlag, Düsseldorf 1971
- [63] Knaust, U.: *Zur Analyse und Optimierung von Faserverbund- Leichtbauteilen*. Diss. Univ. Gh Kassel 1988; Fortschr.-Ber. VDI R.20 Nr. 11, VDI- Verlag, Düsseldorf 1989
- [64] Edge, E. C.: *Does Transverse and Shear Loading affect the Compression Strength of Unidirectional CFC?* Composites 25 (1994) 2, S. 159-161
- [65] Puck, A.: *Progress in Composites Component Design by Advanced Failure Models* 17. Conf. of the Europ. Chap. of the Soc. for the Advancement of Mat. and Proc. Engen. (SAMPE); 28.-30. Mai 1996, Basel, (In Vorbereitung)

- [66] Choo, V. K. S.: *Effect of Loading Path on the Failure of Fibre Reinforced Composite Tubes*. J. Comp. Mat. 19 (1985), S. 525-532
- [67] Schröder, B.: *Untersuchungen zum Spannungs-Verformungs-Verhalten von UD-GFK bei Quer- und Quer/Längs-Beanspruchung*. Dipl.-Arbeit Univ. Gh. Kassel, Fachgebiet Faserverbundtechnik (Prof. Dr.-Ing. A. Puck) 1983
- [68] Nairn, J. A.; Hu, S.: *Matrix Microcracking* in: [17], S. 187-243
- [69] Puck, A.: *Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtverbund-Bauelementen*. Kunststoffe 57 (1967) 12, S. 965-973
- [70] Meier, U.; Müller, R.; Puck, A.: *GFK-Biegeträger unter quasistatischer und schwingender Beanspruchung*. Vortrag, 18. AVK-Tagung, Freudenstadt 1982, S. 35.1-35.7
- [71] Chou, T. W.; Ishikawa, T.: *Analysis and Modeling of Two-Dimensional Fabric Composites* in: Textile Structural Composites. T. W. Chou and F. K. Ko. eds., Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1989, S. 209-264
- [72] Coulomb, C. A.: *Sur une Application des Regles de Maximis et Minimis a quelques Problemes de Statique, relatifs a l'Architecture*. Memoires de Mathematique et de Physique, Academie Royal des Sciences par divers Savans, Anné 1773, Paris, France, 1776
- [73] Griffith, A. A.: *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A221 (1920), S. 163-198
- [74] Friedrich, K. (Hrsg.): *Application of Fracture Mechanics to Composite Materials*. Elsevier, Amsterdam/Oxford/New York/Tokyo 1989
- [75] Hahn, H. T.; Erikson, J. B.; Tsai, S. W.: *Characterisation of Matrix/Interface-Controlled Strength of Unidirectional Composites* in: Fracture of Composite Materials. M. Nijhoff Publ. Den Haag, NL 1982, S. 197- 214
- [76] Paul, B.: *A Modification of the Coulomb Mohr Theory of Fracture*. J. Appl. Mech. June 1961, S. 259-286
- [77] Rechenprogramm zur Bruchkurven-Analyse (*Brukan*). Prof. Dr. R. Jeltsch-Fricker, Universität Gh Kassel, AG Ing.math.
- [78] *Rechenprogramm Brukan-Visual 3D zur Darstellung von Teil-Bruchflächen und Bruchwinkeln*. Prof. Dr.-Ing. A. Puck, Immenhausen u. Dipl.-Ing. D. Zeise, Stuttgart
- [79] BMBF-gefördertes Projekt: *Zum verbesserten Festigkeitsnachweis von Bauteilen aus Faser-Kunststoff- Verbunden*. Förderkennz. 03N8002

- [80] Leon, A.: *Über die Scherfestigkeit des Betons*. Beton und Eisen 34 (1935) 8, S. 130-135
- [81] Puck, A.: *Physikalisch begründete 3D-Bruchkriterien für UD-Verbunde*. Vortrag, Arbeitskreis "Neue Bruchkriterien". Universität Gh Kassel, AG Ing.math., 2. Juni 1993
- [82] Kress, G. R.: *Analytische und experimentelle Untersuchung zu Versagensvorgängen in Faserverbundwerkstoffen mit besonderer Berücksichtigung der Randeffekte*. Fortschr.-Ber. VDI R.18 Nr. 130, VDI-Verlag, Düsseldorf 1993
- [83] Puck, A.; Schürmann, H.: *Failure Analysis of FRP Laminates by Means of Physically Based Phenomenological Models*. Special Issue of Comp. Sc. and Techn. 1996, im Druck
- [84] Huybrechts, D.: *Ein erster Beitrag zur Verifikation des wirkebenebezogenen Zwischenfaserbruchkriteriums nach Puck*. Diss. R.W.T.H. Aachen 1996
- [85] Jeltsch-Fricker, R.: *Die Totraum-Problematik*. Vortrag im Rahmen des Projektes [79], Universität Gh Kassel, AG Ingenieurmathematik, 12. März 1994
- [86] Fabisch, S.; Puck, A.: *Vorüberlegungen zur Probabilistik bei wirkebenebezogenen Bruchbedingungen für UD-Faser/Matrix-Verbunde*. Unveröffentlichte Studie, Kassel 1995
- [87] Knappe, W.; Schneider, W.: *Bruchkriterien für unidirektionalen Glasfaser/Kunststoff unter ebener Kurzzeit- und Langzeitbeanspruchung*. Kunststoffe 62 (1972) 12, S. 864-868
- [88] Huth, H.: *Vorgehensweisen beim Betriebsfestigkeitsnachweis für Faserverbundbauteile*. Vortrag, 25. AVK-Tagung, Berlin 1993, S. B10.1-B10.8
- [89] Flaggs, D.L.; Kural, M.H.: *"Experimental Determination of the In Situ Transverse Lamina Strength in Graphite Epoxy Laminates"*. J. Comp. Mat. Vol. 16 (1982), S. 103-116
- [90] Peters, P. W. M.: *Die Festigkeit von Glas-, Aramid- und Kohlenstoff-Epoxyd senkrecht zur Faser*. Vortrag, 21. AVK-Tagung, Mainz 1987, S. 30.1-30.8
- [91] Hart-Smith, L.J.: *Persönliche Mitteilungen an den Autor*, August 1994
- [92] Gädke, M.: *Crack Initiation and Groth in Notched CFRE-Laminates*. Proc. Internat. Conf. Spacecr. Struct. and Mech. Testing. 24.-26. Apr. 1991 (ESA SP-321), Oct. 1991
- [93] Cuntze, R.G.: *Bruchtyp-Festigkeitskriterien, formuliert mit Invarianten, die die Werkstoffsymmetrie des jeweiligen iso-/anisotropen Werkstoffs beinhalten*. Vortr. 8. Worksh. Comp. Forsch. i. d. Mech., Lab. f. Techn. Mech., Univ. Paderborn, 5.-6. Dez. 1995
- [94] Stellbrink, K.K.U.: *Micromechanics of Composites*. Hanser, München/Wien 1996

13.2 Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Wegen des grundlegenden Charakters der Arbeit werden durchweg Symbole benutzt, die sich an der heute vorherrschenden anglo-amerikanischen Fachsprache orientieren. Bei den betreffenden Symbolen ist jeweils im Text vermerkt, von welchem englischen Begriff sie sich herleiten.

Abkürzungen:

UD	unidirektional faserverstärkt
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
CFK	Kohlenstofffaser-Kunststoff
GFK	Glasfaser-Kunststoff
Fb	Faserbruch
Zfb	Zwischenfaserbruch
CLT	Classical Laminte Theory (klassische Laminat-Theorie)
CDS	Characteristic Damage State (charakteristischer Schädigungszustand)
FEM	Finite Elemente Methode
FPF	First Ply Failure (erste Schicht-Bruch)
LPF	Last Ply Failure (letzte Schicht-Bruch)

Koordinatensysteme:

x, y	Laminat-Koordinatensystem (in der Schichtebene)
x_H, y_H	Laminat-Koordinatensystem, bezogen auf die Richtung der Haupt-Normalspannungen bei ebener Beanspruchung in der Schichtebene
x_{1H}, x_{2H}, x_{3H}	Koordinatensystem in den Richtungen der Haupt-Normalspannungen bei räumlicher Beanspruchung
x_1, x_2, x_3	Schicht-Koordinatensystem (cartesisches Rechts-Koordinatensystem), x_1 parallel zur Faserrichtung, x_2 parallel zur Schichtebene, senkrecht zur Faserrichtung, x_3 in Dickenrichtung
x_1, x_{II}, x_{III}	auf die "Haupt-Normalspannungen" σ_{II} und σ_{III} (aus $\sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}$) in einem Punkt der UD-Schicht bezogenes Koordinatensystem, x_1 parallel zur Faserrichtung, x_{II} in Richtung der "Haupt-Normalspannung" σ_{II} , x_{III} in Richtung der "Haupt-Normalspannung" σ_{III} .
x_1, x_n, x_t	auf eine fasерparallele Bruchebene bezogenes Koordinatensystem, x_1 parallel zur Faserrichtung, x_n senkrecht (normal) zur Schnittebene oder Bruchebene, x_t parallel zur Schnittebene oder Bruchebene, senkrecht (transversal) zur Faserrichtung.

Lateinische Formelzeichen:

e	Bruchdehnung oder Bruchstauchung (positiver Zahlenwert!)
E	Elastizitätsmodul
\mathcal{E}	Anstrengung (Ausnutzungsgrad)
f	Zahlenfaktor
F	Bruchfunktion
\tilde{F}	transformierte Bruchfunktion
G	Schubmodul
k	Nummer einer Schicht
K	Steifigkeitsmatrix
K^{-1}	Nachgiebigkeitsmatrix
m	Zahlenfaktor; Vergrößerungsfaktor
M	Feuchtegehalt
n	Kraftfluß, Schichtzahl eines Laminats, Exponent
p	Proportionalitätsfaktor bei σ_n , Neigungsmaß
r	Radius; Homogenitätsgrad
R	Festigkeit
R^A	Bruchwiderstand der Wirkebene
S	statisches Moment einer Fläche
t	Dicke
T	Temperatur
x, y, z	Koordinaten(richtungen)

Griechische Formelzeichen:

α	Winkel zwischen x-Richtung und Faserrichtung bei der Netztheorie oder Laminattheorie
γ	Schubwinkel
δ	Winkeldifferenz $\omega - \varphi$
Δ	Winkeldifferenz $\Theta_{fp}^{(-)} - 45^\circ$; relative Abweichung zwischen Modell und Versuch, Differenz
ε	Dehnung, (Stauchung: negativer Wert)
η	Abminderungsfaktor für Elastizitätsgrößen
θ	Winkel zwischen den Richtungen x_2 und x_n
Θ	Winkel zwischen den Richtungen x_{II} und x_n
κ	Faserkreuzungswinkel
λ	Zahlenfaktor
μ	Reibungsbeiwert
ν	Querkontraktionszahl (der 1. Index bezeichnet die Kontraktionsrichtung)
ρ	Winkel $\arctan \sigma_2 / \tau_{21} $
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung

φ	Winkel zwischen x_2 und x_{II}
Φ	Winkel zwischen x und x_H
ψ	Winkel $\arctan \tau_{n1}/\tau_{nt}$
Ψ	Winkel $\arctan \tau_{zy}/\tau_{zx}$
ω	Winkel $\arctan \tau_{31}/\tau_{21}$

Indizes:

hochgestellte Indizes:

A	die Wirkebene von Spannungen betreffend
$(+)$	Zugbeanspruchung betreffend
$(-)$	Druckbeanspruchung betreffend
(If)	die Schichtgrenzfläche betreffend
(l)	lastbedingt
(r)	verspannungsbedingt (Eigenspannung)
\sim	über die Dicke eines Laminats gemittelt
$*$	auf einachsige $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung bezogen
$**$	auf zweiachsige, isotrope $\sigma_{\perp}^{(+)}$ -Beanspruchung bezogen

tiefgestellte Indizes:

\parallel	parallel zur Faserrichtung
\perp	quer zur Faserrichtung
$\perp\parallel$	Quer/Längs-...
$\perp\perp$	Quer/Quer-...
$\perp\psi$	Quer/ x_{ψ} -Richtung
a	außen
i	innen
d	degradiert (exponentiell)
D	Degradation (linearisiert)
F	Faser
M	Matrix
mod	Modell
Res	Reserve-...
red	reduziert
IFF	Zwischenfaserbruch
FF	Faserbruch
$mech$	mechanisch verursacht
$therm$	thermisch verursacht
thr	Schwellenwert
w	Schwächungs-...

13.3 Fachwortverzeichnis

Anstrengung: Zahlenwert zur Kennzeichnung des relativen Ausnutzungsgrades eines Werkstoffs hinsichtlich seiner Festigkeit

anisotrop: richtungsabhängig

Bruch: Werkstofftrennung durch Spannungseinwirkung

Bruchebene: bei einem Bruch entstehende Werkstoffoberfläche

Bruchfläche: Fläche im Spannungsraum, die alle ohne Bruch ertragbaren Spannungszustände umschließt

Bruchgefahr: Kurzform für schnittwinkelabhängige Anstrengung

Bruchhypothese: plausible Annahme über die Bruch verursachenden Zustände

Bruchkriterium: mathematische Beziehung, die ohne Bruch ertragbare Spannungszustände von solchen unterscheidet, die nicht ertragbar sind

Bruchmechanik: Teilgebiet der Mechanik, das sich mit der Rißentstehung an inneren Defekten und der Rißausbreitung in spröden Werkstoffen befaßt

Bruchwiderstand der Wirkebene: Widerstand einer Spannungs-Wirkebene gegen ihren Bruch infolge einer einzelnen in ihr wirkenden Normal- oder Schubspannung

Delamination: (örtliche) Schichtentrennung in einem Laminat

Degradation: Herabsetzung von Eigenschaften bei Überschreitung bestimmter Beanspruchungsgrenzen, z.B. der Zwischenfaserbruch-Grenze

Eigenspannungen: Spannungen, die ohne äußere Krafteinwirkung in einem Werkstoff oder Bauteil existieren

Elementarfaser: Einzelfaser (im Durchmesserbereich von 5 bis 50 μm)

Einzelschicht: schichtförmiger Bestandteil ("Bauelement") eines Laminats

Faserbruch: Bruch einer Einzelschicht, bei dem Zigtausende von Elementarfasern brechen

Festigkeit: Zahlenangabe über die von einem Werkstoff ohne Bruch (oder gravierende Veränderung, die seine Tragfähigkeit begrenzt) ertragen werden kann

Festigkeitsanalyse: Rechnerische Beschreibung der Bruchgrenzen und des Bruchverhaltens von Werkstoffen bei mehrachsiger Beanspruchung

Fehlstelle: ungewollte Unregelmäßigkeit (Hohlraum, Riß, Einschluß) in einem Werkstoff

homogen: 1. in bezug auf einen Werkstoff: Aus Gleichartigem aufgebaut. 2. in bezug auf eine Spannung: Über größere Bereiche relativ unveränderlich. 3. in bezug auf eine Funktion: Sie ist bezüglich bestimmter Variabler homogen vom Grad r , wenn bei Vergrößerung aller dieser Variablen mit dem Faktor λ aus der Funktion λ^r ausgeklammert werden kann

Hysterese: hier: Nichtzusammenfallen von Be- und Entlastungskurve in einem Kraft,Weg-Diagramm

isotrop: nicht richtungsabhängig

invariant: unveränderlich bei Veränderung des Koordinatensystems

Invariante: hier speziell: Funktion von Spannungen (z.B. Summe der Haupt-Normalspannungen), deren Wert nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängt

Laminat: hier: Schichtenverbund, bei dem die einzelnen Schichten unterscheidbar sind (z.B. durch unterschiedliche Faserrichtung)

Laminatversagen: Unbrauchbarwerden oder Bruch eines Laminats

Laminat-Theorie: Rechenverfahren zur Ermittlung der Spannungen und Verformungen der einzelnen Schichten eines Laminats und des Laminats als Ganzem

Matrix: Stoff, durch den Fasern zu einem Faser-Matrix-Verbund gefügt werden und der Kraftübertragung zwischen den Fasern ermöglicht

Modell: Vereinfachte theoretische Vorstellung von einem realen Vorgang, z.B. einem Bruchvorgang. Auch die entsprechende mathematische Formulierung wird gelegentlich als "Modell" bezeichnet

Makromechanik: hier: Betrachtungsweise, bei der die Einzelschichten als homogen angesehen werden

Mikromechanik: Betrachtungsweise im Größenbereich von μm , in der Faser- und Matrixbereiche unterschieden werden

Mikroschädigungen: Feinste (meist unsichtbare) Risse in Einzelschichten

Mohrscher Kreis: Graphische Konstruktion zur Ermittlung der Spannungen auf einer zu den Haupt-Normalspannungs-Richtungen schräg verlaufenden Schnittebene

Nachgiebigkeiten: Elastizitätsgrößen, durch die Verformungen mit Kräften gekoppelt sind

Netztheorie: Vereinfachte Laminattheorie, die das Mittragen der Matrix unberücksichtigt läßt

Reservefaktor: Faktor, mit dem Spannungen erhöht werden können, bevor Bruch eintritt

Roving: Strang aus einigen Tausend Elementarfasern

Steifigkeiten: Elastizitätsgrößen, durch die Kräfte mit Verformungen gekoppelt sind

Streckungsfaktor: Kurzform für schnittwinkelabhängige Anstrengung

UD-Schicht: unidirektional faserverstärkte Schicht aus Faser-Matrix-Verbund

Wirkebene: Schnittebene, auf der eine oder mehrere Spannungen wirken

Widerstand der Wirkebene: Widerstand (angegeben z.B. in N/mm^2), den eine Wirkebene ihrem Bruch durch eine einzelne in ihr wirkende Normal- oder Schubspannung entgegensetzt

Verschmieren: Theoretische Verwandlung eines Mediums mit Diskontinuitäten (wie z.B. Zwischenfaserrissen) in ein Kontinuum

Wöhler-Kurve oder Wöhler Linie: Graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen der beim Schwingfestigkeitsversuch wirksamen Beanspruchungshöhe und der Schwingspielzahl bis zum Bruch

Zwischenfaserbruch: zwischen Fasern verlaufender Bruch, der eine UD-Schicht auf ihrer gesamten Dicke durchtrennt

13.4 Stichwortverzeichnis

A

Abminderungsfaktor	83ff
Album, elektronisches	166
analytische Lösungen	44
Anpassung an Versuchsergebnisse	63f
Anwendungsempfehlungen	158ff
Aufbau von Laminaten	11ff
ausgeglichener Winkelverbund	26
Ausknicken (von Fasern)	21

B

Basisfestigkeiten	152
Bauteil-Entwurf	99
Beanspruchung des UD-Verbunds	4
Beanspruchungsarten	187ff
Begriffe	45ff
Beulen	29
Blinde Flecken	178ff, 184f
Bruchbedingung (Definition)	45f
Bruchdehnung	73
Bruchfunktion (Definition)	46
Bruchhypothese (Definition)	46
Bruchhypothese, erweiterte	112ff
Bruchkörper	67, 75ff, 165ff
Bruchkriterium (Definition)	45
Bruchmechanischer Hintergrund	110
Bruch-Modus	15ff, 83ff, 170
Bruchstauchung	73
Bruchwiderstand der Wirkebene	117ff
Bruchwinkel-Ermittlung	126ff
Bruchzähigkeit	110f

C

charakteristischer Schädigungszustand (CDS) ..	14
Cosinus-Halbwelle	175ff
Coulombsche Hypothese	105, 116

D

Damage Mechanics	9
Definitionen	45ff
Degradation	6, 81ff
Dehnungsenergie-Freisetzungsrate	110f
Dehnungs-Überhöhung	68
Delamination	18ff
Delaminations-Bedingung	150ff
Delaminationsgefahr	91ff
dickwandig	44
Drehrohrfeder	12, 15, 17f
Druckbruch	23
"dünne Schicht"-Effekt	191f

E

Eigenspannungen	38f, 78ff, 156ff
Elastizitätsgesetz	37
elektronisches Album	166
Evolutionsgesetz	84

F

Faserbruch	6, 21ff
Faserbruch-Bedingungen	53, 56, 71ff
Festigkeiten	4, 116ff
Festigkeitsparameter	116ff
Feuchtekonzentration	78
First Ply Failure (FPL)	9
Flußdiagramm	92

H

Hashin's Idee	107
Haupt-Normalspannungen	132f
Hoffmann-Bruchbedingungen	47
Hüll-Linie	55
Hybrid-Laminat	13
Hysterese	5

I

Impact	190f
"in situ"-Effekt	191f
Interaktion	142ff
interlaminare Spannungen	20, 40ff
Interpolationsformel	147, 150
intralaminare Spannungen	20
invariant	53
Invarianten	196
Isochromaten	68
Iteration	36

K

Keilwirkung	27f
Kerbwirkung	188ff
kinking	21f
kommerzielle Rechenprogramme	9
Kontinuumstheorie	82
Knicken, inneres	21f
Kraftfluß	31f

L

Laminat-Theorie	35ff
Laminatversagen	23ff, 95
Lastfälle	23f

Lastpfad	78
Last Ply Failure (LPF)	102
Linearer Ansatz	138ff

M

Master Bruchfläche	109
"Menschliche" Probleme	192f
Mikromechanik	3
Mikroschädigung	5,39
Mode I, II, III	110f
Modus	s. Bruch-Modus
Mohrsche Hypothese	60,107
Mohrscher Kreis	139f,174f

N

Nach-Bruch-Theorien	85
Neigungs-Parameter	122f
Nicht-Linearität	35ff
Nürnberger Schere	24

O

Optimierung	101
Organisatorische Probleme	192f

P

Parabolischer Ansatz	140ff
Parallelogrammgestänge	25f
Prepreg	13
Probabilistik	181ff

Q

quasi-linear-elastisch	36
Querkontraktion (s Zahl)	72,83f

R

Radienverhältnis	12
Reservefaktor	51
Resttragfähigkeit	95
Ringfadenaue	11

S

Sandwicheffekt	13
Schädigungshypothese	5
Schädigungsmechanik	9
Schlagbeanspruchung	190f
Schnelle Programme	99
Schubfluß	31

Schubknicken	21f
Schubkorrektur	73f
Schwächungsfaktor	69,153ff
Schwingende Beanspruchung	191ff
Sekantenmodul	36f
Sensitivität des Bruchwinkels	178
Spannungsanalyse	30ff
Spannungsintensitätsfaktoren	110f
Spannungsüberhöhung	68
Spannungs, Verzerrungs-Diagramme	5,86
Sprengwirkung	23f
Sprödbbruch	105
Stoßbeanspruchung	190
Streckungsfaktor	126f
Sukzessives Bruchgeschehen	6
Symmetrischer Laminataufbau	13

T

Tangentenmodul	36f
Tsai, Wu-Bruchbedingung	55
Transformationsformel	108
transversal-isotrop	52
Toter Raum	178ff,184f

U

Überanstrengung	84f
Überschreitungsgrad	84f

V

Vektorenfächer	173ff
Vereinfachung bei	
2D-Beanspruchung	161ff
Verformungsverhalten	91
Verspannung zwischen	
Fasern und Matrix	67f
Visualisierung	49ff

W

Wickeltechnik	11f
Winkelwahl	32f
Wirkebene	50
Wirkebene-Bruchwiderstand	117ff

Z

Zacharov-Bruchbedingung	55
Zukunftsaussichten	195f
Zwischenfaserbruch	5,14ff
Zwischenfaser-Bruchbedingung	59ff
Zwischenfaser-Risse	5

Dieses Werk stellt erstmalig eine ingenieurmäßige Festigkeitsanalyse der Faserverbund-Lamine in geschlossener Form dar. Die Rechenmodelle sind so einfach gehalten, daß sie problemlos in der Konstruktionspraxis eingesetzt werden können; dennoch geben sie das vielgestaltige physikalische Bruchgeschehen richtig wieder.

Der Autor, der sein fundiertes Wissen abwechselnd in der Industriep Praxis und in der Grundlagenforschung erwarb, verbindet hier den Aspekt der Praxisnähe mit der physikalischen Korrektheit.

Das Buch führt in didaktisch hervorragender Form vom Laminataufbau über Hinweise zur Spannungsanalyse und die ausführliche Darstellung praxisbewährter Methoden der Festigkeitsanalyse bis an die Front der Forschung, wo eine unkonventionelle Betrachtungsweise zu überraschenden Einsichten und neuen Möglichkeiten führt. Und ganz nebenbei erfährt der Leser eine Menge aus der Trickkiste eines Pioniers der Faserverbundtechnik.

Eine gute Festigkeitstheorie hilft, die Entwicklungszeiten und -kosten bei Faserverbundbauteilen erheblich zu verringern.