Computing 22, 31—58 (1979)

Computing

Die Verwandtschaft kontextfreier Grammatiken

H. K.-G. Walter, Darmstadt

Eingegangen am 27. September 1976

Zusammenfassung — Abstract

Die Verwandtschaft kontextfreier Grammatiken. Wir greifen die von G. Hotz angeregten Fragen der Verwandtschaft von Grammatiken auf. Durch zwei neue Theoreme, die Faktorisierungen beliebiger Transformationen in Einbettungen und Reduktionen und Ergänzungen von Diagrammen in Produktform gestatten, können wir zeigen, daß sich das allgemeine Verwandtschaftsproblem eindeutiger kontextfreier Grammatiken zurückführen läßt auf die Verwandtschaft über Simulationen. Simulationen treten ja in der Regel bei Normalformenkonstruktionen auf. Für die Verwandtschaftsbeziehung linearer Grammatiken läßt sich eine notwendige Bedingung herleiten, die im Falle linkslinearer Grammatiken auch hinreichend ist.

Ein von G. Hotz aufgeworfenes Problem, die Verwandtschaft linearer schwach äquivalenter Grammatiken, wird negativ beantwortet.

On the Relatedness of Contextfree Grammars. We take up the question of relationship between grammars which has been initiated by G. Hotz. Two new theorems on factorization of arbitrary transformations into embeddings and reductions and on product constructions involving nonlengthpreserving homomorphisms are derived. With the help of these two theorems we can characterize the general relationship of unambiguous contextfree grammars by the relationship, defined by simulations. Simulations are wellknown in the case of normal-form-constructions. A necessary condition is given for the relationship of linear grammars, which is sufficient in the case of leftlinear grammars.

A problem of G. Hotz, concerning the relationship of weakly equivalent linear grammars is answered negatively.

0. Einleitung

G. Hotz hat in seinen Arbeiten [6], [7] ein Programm zur Behandlung des Äquivalenzproblems von Grammatiken entworfen. Bekanntermaßen trifft man bei diesem Problem schon bei linearen Grammatiken auf Nichtentscheidbarkeitssätze. Dies bedeutet, daß schon in dieser Grammatikklasse der Zusammenhang zwischen Grammatik und erzeugter Sprache sehr lose ist und die erzeugte Sprache die Struktur der Grammatik unvollständig bestimmt. Es ist daher von großem Interesse, Relationen zwischen Grammatiken zu finden, die einerseits die Äquivalenz nach sich ziehen, andererseits hinreichend entscheidbar sind.

Als Prototyp einer solchen Relation kann die aus der Theorie der endlichen Akzeptoren folgende strukturelle Äquivalenz linkslinearer Grammatiken an-

0010-485X/79/0022/0031/$ 05.60

gesehen werden, die sich bereits in [7] findet. Diese strukturelle Äquivalenz läßt sich in natürlicher Weise über Grammatik-Homomorphismen definieren. Einen vorläufigen Abschluß für dieses Programm stellen die Arbeiten von C. P. Schnorr ([11], [12]) und Bartholomes-Hotz [1] dar. C. P. Schnorr verwendet hierbei eingeschränkt nur sogenannte „alphabetische" Morphismen. Diese Einschränkung gestattet es, die Theorie der Äquivalenz von endlichen Akzeptoren auf Grammatiken zu verallgemeinern. Weitere Einschränkungen werden in [1] betrachtet, so daß die Parallelität zu endlichen Akzeptoren noch näher ist. Im übrigen bezieht sich [1] nur auf lineare Grammatiken.

Im Gegensatz zu Automaten läßt aber die algebraische Theorie der Grammatiken, wie sie in [6] erstmalig dargestellt wurde, stärkere Deformationen der Grammatiken zu als die erwähnten alphabetischen Morphismen. Die Behandlung dieser Morphismen ist aber vom algebraischen Standpunkt ungleich schwieriger, da auf algebraische Standardkonstruktionen, wie etwa Produktbildungen ([13], [14]), zunächst verzichtet werden muß. Derartige Konstruktionen sind aber für die Schnorrschen Ergebnisse unverzichtbar.

Diese Arbeit stellt nun den Versuch dar, größere Morphismenklassen zu betrachten und die strukturelle Äquivalenz für derartige Klassen zu untersuchen. Es zeigt sich, daß die in den vorgenannten Arbeiten verwendeten algebraischen Konstruktionen stärker als notwendig sind. Aufwendigere algebraische Untersuchungen über Grammatiken und Morphismen führen in der Tat zu Konstruktionen, die in ähnlicher Weise wie in [11] oder [1] eingesetzt werden können.

Grundlage unserer Untersuchungen ist der Übergang von einer Grammatik zur freien X-Kategorie der Ableitungen. Die Konstruktion der freien X-Kategorie findet sich in [5] und [8]. Wir beschränken uns darauf, diese Konstruktion nur grob zu skizzieren und verweisen den Leser für Details auf [8]. Eine Vertrautheit des Lesers mit elementaren Konzepten der formalen Sprachen und Grammatiken, wie etwa der Chomsky-Hierarchie, wird vorausgesetzt (hierzu [4], [10], [8]).

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Hotz danken, der diese Untersuchungen wesentlich inspiriert hat.

1. Grammatiken und Morphismen

Wir stellen in diesem Abschnitt die wesentlichen Begriffsbildungen zusammen.

Eine *Grammatik* ist ein 4-tupel $\mathbb{G}=(A(\mathbb{G}), P(\mathbb{G}), T(\mathbb{G}), S(\mathbb{G}))$, wobei $A(\mathbb{G})$ ein Alphabet ist (*Alphabet von* $\mathbb{G}$) und $T(\mathbb{G})\subseteq A(\mathbb{G})$ (*Terminalalphabet*),

$$S(\mathbb{G})\subseteq A(\mathbb{G})\backslash T(\mathbb{G})=Z(\mathbb{G})$$

(*Axiome* und *Zwischenalphabet*) und

$$P(\mathbb{G})\subseteq Z(\mathbb{G})^{+}\times A(\mathbb{G})^{*}$$

endlich (*Regelsystem*) gilt. Dabei ist X^* das freie Monoid über X mit leerem Wort „ϵ" und Wortlänge $|w|$, $X^{+}=X^{*}\backslash\{\epsilon\}$.

Seien $w, w' \in A(\mathbb{G})^*$, so ist eine Ableitung f von $df=w$ nach $cf=w'$ eine Folge

$$w=u_1\, p_1\, v_1,\; u_1\, q_1\, v_1=u_2\, p_2\, v_2, \ldots, u_{s-1}\, q_{s-1}\, v_{s-1}=u_s\, v_s\, p_s,\; u_s\, q_s\, v_s=w'$$

mit $u_i, v_i \in A(\mathbb{G})^*$ und $(p_i, q_i) \in P(\mathbb{G})\ (1 \leq i \leq s)$.

Nach G. Hotz [5] läßt sich jeder Grammatik $\mathbb{G}$ die freie X-Kategorie $F(\mathbb{G})$ der Ableitungen, genauer der nicht wesentlich verschiedenen Ableitungen, zuordnen. Dabei sind die Objekte die Elemente von $A(\mathbb{G})^*$ und die Morphismen die Ableitungen. Die Operationen der Parallelausführung und Hintereinanderausführung von Ableitungen lassen sich durch folgende Schaubilder verdeutlichen:

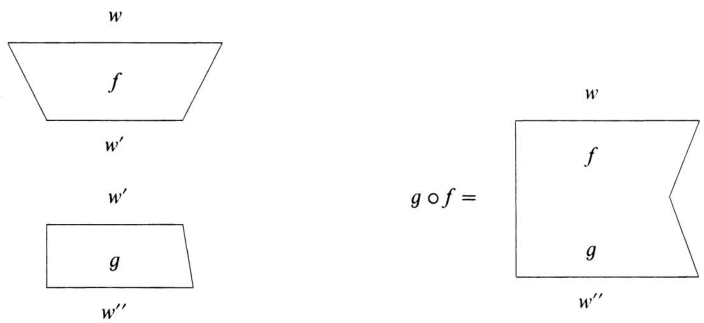


Abb. 1. Hintereinanderausführung von Ableitungen

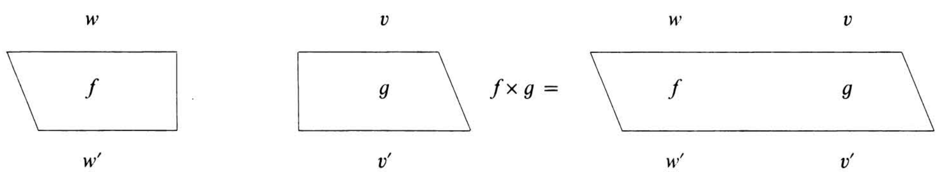


Abb. 2. Parallelausführung von Ableitungen

Das Regelsystem $P(\mathbb{G})$ läßt sich in natürlicher Weise in die Morphismen von $F(\mathbb{G})$ einbetten, so daß gilt:

$$d(p,q)=p \text{ und } c(p,q)=q \quad \big((p,q) \in P(\mathbb{G})\big).$$

Jede Ableitung $f \in F(\mathbb{G})$ (wir schreiben $f \in F(\mathbb{G})$ für „f ist Morphismus von $F(\mathbb{G})$") besitzt eine Darstellung

$$f=(u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$$

mit $u_i, v_i \in A(\mathbb{G})^*$ und $r_i \in P(\mathbb{G})\ (1 \leq i \leq s)$ und $s \geq 0$.

Hierbei bezeichnen wir die „leeren" Ableitungen von w nach w wieder mit w. Diese sind die Identitäten in $F(G)$.

Eine Darstellung des obigen Typs heißt *sequentiell*. Eine sequentielle Darstellung heißt *kanonisch*, falls gilt:

$$|u_i\, dr_i| > |u_{i+1}| \quad (1 \leq i \leq s).$$

Jedes $f \in F(\mathbb{G})$ besitzt genau eine kanonische Darstellung ([5]). Die Zahl s ist unabhängig von der Auswahl der Darstellung von f und wird als *Länge* $\|f\|$ bezeichnet. Es gilt:

(i) $\|f \times g\| = \|f\| + \|g\|$
(ii) $\|f \circ g\| = \|f\| + \|g\|$
(iii) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f$ Identität
(iv) $\|r\| = 1$ für alle $r \in P(\mathbb{G})$.

Betrachte nun $L_1, L_2 \subseteq A(\mathbb{G})^*$, so sei

$$(L_1, L_2)_{\mathbb{G}} = \{f \in F(\mathbb{G}) \mid df \in L_1 \ \& \ cf \in L_2\}.$$

Insbesondere ist $D(\mathbb{G}) = (S(\mathbb{G}), T(\mathbb{G})^*)_{\mathbb{G}}$ die *Ableitungsmenge* von $\mathbb{G}$ und $\mathscr{L}(\mathbb{G}) = c\,D(\mathbb{G})$ die *erzeugte Sprache.* Sei umgekehrt $M \subseteq F(\mathbb{G})$, so setze $\mathscr{L}_M(\mathbb{G}) = c\big(D(\mathbb{G}) \cap M\big)$.

Der Morphismenbegriff läßt sich zurückführen auf X-Funktoren. *X-Funktoren* zwischen X-Kategorien sind kovariante Funktoren zwischen den unterliegenden Kategorien, die bezüglich der monoidalen Operation „$\times$" objekt- wie morphismenseitig Monoidhomomorphismen sind. Im Falle freier X-Kategorien lassen sich X-Funktoren Φ eindeutig bestimmen durch die Angabe eines Monoidhomomorphismus Φ_0 auf den Objekten und einer Abbildung

$$\Phi_M : P(\mathbb{G}) \to \mathrm{Mor}(X),$$

wobei

$$\begin{tikzcd} P(\mathbb{G}) \arrow[r, "\Phi_M"] \arrow[d, "{c,d}"'] & \mathrm{Mor}(X) \arrow[d, "{c,d}"] \\ A(\mathbb{G})^* \arrow[r, "\Phi_0"'] & \mathrm{Obj}(X) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Ein *Morphismus* $\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ ($\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ Grammatiken) ist nun ein X-Funktor $\Phi: F(\mathbb{G}_1) \to F(\mathbb{G}_2)$ mit

(i) $\Phi\big(S(\mathbb{G}_1)\big) \subseteq S(\mathbb{G}_2)$
(ii) $\Phi\big(T(\mathbb{G}_1)\big) \subseteq T(\mathbb{G}_2)^*$
(iii) $\Phi\big(Z(\mathbb{G}_1)\big) \subseteq Z(\mathbb{G}_2)$.

Ist $\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ ein Morphismus, so gilt für alle $M \subseteq F(\mathbb{G}_1)$:

$$\Phi\,\mathscr{L}_M(\mathbb{G}_1) = \mathscr{L}_{\Phi(M)}(\mathbb{G}_2).$$

Insbesondere gilt:

$$\Phi\big(\mathscr{L}(\mathbb{G}_1)\big) \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{G}_2).$$

Im folgenden geben wir eine Übersicht verschiedener Morphismenklassen. Sei im folgenden also stets $\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ ein Morphismus.

Φ ist *extern*, falls $\Phi(\xi) = \xi$ für $\xi \in Z(\mathbb{G}_1)$ und *intern*, falls $\Phi(t) = t$ für $t \in T(\mathbb{G}_1)$. Φ heißt *gut*, falls $\Phi\big(P(\mathbb{G}_1)\big) \subseteq P(\mathbb{G}_2)$ und *sehr gut*, falls zusätzlich gilt $\Phi\big(T(\mathbb{G}_1)\big) \subseteq T(\mathbb{G}_2)$.

Gute Morphismen sind induziert durch Monoidhomomorphismen

$$h\colon A(\mathbb{G}_1)^* \to A(\mathbb{G}_2)^*.$$

Wir nennen Φ *Isomorphismus*, falls Φ bijektiv ist. Isomorphismen sind stets *sehr gut.*

Beispiel 1: (Binäre Grammatiken)
Häufig folgen aus der Struktur der Grammatiken bereits derartige Eigenschaften.
Eine kontextfreie Grammatik $\mathbb{G}$ heißt *binär*, falls für alle $\xi \to q \in P(\mathbb{G})$ gilt: $q \in (Z(\mathbb{G}) \cdot Z(\mathbb{G})) \cup T(\mathbb{G})$ und *erweiternd*, falls $|q| \leq 1$ impliziert: $q \in T(\mathbb{G})$.
Betrachte nun $\phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ intern, wobei $\mathbb{G}_1$ binär und $\mathbb{G}_2$ erweiternd. Gilt $\Phi(p, q) = w \in F(\mathbb{G}_2)$, so folgt: $|p| = |q| = 1$ (Widerspruch). Also ist zunächst $\|\Phi(r)\| \geq 1$. Sei nun r so, daß $\|\Phi(r)\| \geq 2$, d. h. $\Phi(r) = (u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$. Ist $c\,\Phi(r) \in Z(\mathbb{G}_2) \cdot Z(\mathbb{G}_2)$, so erhalten wir einen Widerspruch zu $|c\,\Phi(r)| > 3$. Ist $c\,\Phi(r) \in T(\mathbb{G}_1) = T(\mathbb{G}_2)$, so erhalten wir einen Widerspruch zu $|c\,\Phi(r)| \geq 3$.

Beispiel 2: (Lineare Normalformengrammatiken)
Ganz ähnlich zeigt man folgendes:
Betrachte lineare Grammatiken $\mathbb{G}$ mit

$$c(P(\mathbb{G})) \subseteq (T(\mathbb{G}) \cdot Z(\mathbb{G})) \cup (Z(G) \cdot T(\mathbb{G})) \cup T(\mathbb{G}).$$

Gilt für $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ diese Aussage, dann ist jeder interne Morphismus $\Phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ sehr gut.

Beispiel 3:
Betrachte kontextfreies $\mathbb{G}$ mit $\xi \to q \in P(\mathbb{G})$ impliziert $|q| \geq 2$.
Ordne jeder solchen Regel mit $q = a_1 \ldots a_s$ $(a_i \in A(\mathbb{G}))$ folgendes „Regelpaket" zu:

$$\begin{array}{rll} \xi \to a_1' \, \xi_1 & & \\ \xi_1 \to a_2' \, \xi_2 & \quad \text{mit } a_1' = a_i & \text{falls } a_i \in Z(\mathbb{G}) \\ \vdots & & \\ \xi_{\rho-1} \to a_s' & & \\ a_i' \to a_i & \quad \text{falls } a_i \in T(\mathbb{G}) & \end{array}$$

Dabei sind a_i' und ξ_i neue Hilfszeichen. Durch diese Konstruktion wird $\mathbb{G}$ in eine binäre Grammatik $\mathbb{G}^B$ verwandelt. Diese „Simulation" vermittelt einen internen Morphismus $\Phi^B\colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}^B$, der nicht sehr gut ist.

Gute Morphismen Φ lassen sich stets zerlegen in der Form $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ mit Φ_1 extern, gut und Φ_2 intern und sehr gut. Ebenso existiert eine Faktorisierung $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ mit Φ_2 extern und gut und Φ_1 intern und sehr gut ([17]). Bei derartigen Faktorisierungen bleiben häufig andere Eigenschaften von Morphismen erhalten. Eine allgemeinere Bedingung für einen derartigen Faktorisierungssatz ist die folgende:

$\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ heißt *regulär*, falls

$$\forall r, r' \in P(\mathbb{G}_1): d\Phi(r) = d\Phi(r') \;\&\; c\Phi(r) = c\Phi(r') \Rightarrow \Phi(r) = \Phi(r').$$

Man zeigt leicht ([17]), daß wieder die beiden Faktorisierungssätze gelten.

Wir nennen Φ *alphabetisch*, falls $\Phi(T(\mathbb{G}_1)) \subseteq T(\mathbb{G}_2) \cup \{\epsilon\}$ und $\Phi(r) \notin P(\mathbb{G}_2)$ impliziert: $\Phi(r)$ Identität $(r \in P(\mathbb{G}_1))$.

Φ heißt *erweiternd*, falls $\|\Phi(r)\| \geq 1$ für alle $r \in P(\mathbb{G}_1)$ gilt. Beispiel 1 und 2 zeigen, daß die Eigenschaft erweiternd bisweilen schon aus Struktureigenschaften der Grammatiken folgt. Beispiel 3 ist, wie wir noch sehen werden, das typische Beispiel für einen erweiternden Morphismus. Die Beziehung dieser beiden Begriffe zum allgemeinen Fall zeigt folgende

Beobachtung:

Jeder Morphismus $\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ mit $\mathbb{G}_2$ zykelfrei (d. h. $\forall w \in A(\mathbb{G}_2)^*: |(w, w)|_{\mathbb{G}_2} = 1$) ist zerlegbar in der Form $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$ mit Φ_1 erweiternd und Φ_2 alphabetisch.

Auch bei diesen Faktorisierungen bleiben andere Eigenschaften von Φ erhalten.

Wichtige Eigenschaften sind für uns Injektivitäts- und Surjektivitätsbedingungen.

Wir nennen Φ *episch*, falls $\Phi(P(\mathbb{G}_1)) \supseteq P(\mathbb{G}_2)$ gilt. Man erkennt leicht, daß aus der Surjektivität von Φ und der Reduziertheit von $\mathbb{G}$ folgt, daß Φ episch ist. Aus der Tatsache, daß Φ episch ist, folgt aber nicht, daß Φ surjektiv ist. Ist Φ extern und episch, so folgt aber die Surjektivität von Φ.

Wir nennen Φ *dicht*, falls $\mathscr{L}(\mathbb{G}_2) = \mathscr{L}_{\Phi(D(\mathbb{G}_1))}(\mathbb{G}_2)$ gilt.

Φ heißt *abgeschlossen*, falls $\Phi(D(\mathbb{G}_1)) = D(\mathbb{G}_2)$ ist. Jeder abgeschlossene Morphismus ist dicht.

Beispiel 4:

Betrachte zwei Grammatiken $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ mit $Z(\mathbb{G}_1) \cap Z(\mathbb{G}_2) = \emptyset$ und $T(\mathbb{G}_1) = T(\mathbb{G}_2)$. Setze

$$\mathbb{G}_1 + \mathbb{G}_2 = ((A(\mathbb{G}_1) \cup A(\mathbb{G}_2), P(\mathbb{G}_1) \cup P(\mathbb{G}_2), T(\mathbb{G}_1), S(\mathbb{G}_1) \cup S(\mathbb{G}_2)).$$

Dann vermitteln die Inklusionen sehr gute, interne Morphismen $v_i: \mathbb{G}_i \to \mathbb{G}_1 + \mathbb{G}_2$ $(i = 1, 2)$. Gilt nun $\mathscr{L}(\mathbb{G}_1) = \mathscr{L}(\mathbb{G}_2)$, so sind v_1 und v_2 *dicht*, aber nicht abgeschlossen.

Beispiel 3 liefert einen Morphismus, der abgeschlossen, aber nicht surjektiv ist.

Beispiel 5:

Zu $\mathbb{G}$ sei Red $(\mathbb{G})$ die reduzierte Grammatik, bestimmt etwa als kleinste „Untergrammatik" mit $D(\mathbb{G}) = D(\text{Red}(\mathbb{G}))$. Dann vermittelt die Inklusion $\text{Red}(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{G}$ einen abgeschlossenen, sehr guten, internen Morphismus, der nicht surjektiv ist.

Wir vermerken hierzu, daß für alphabetische Morphismen nach [12] die Eigenschaft abgeschlossen (surjektiv) im kontextfreien Fall entscheidbar, im kontextsensitiven Fall aber nicht entscheidbar ist.

Beispiel 6: (Surjektivitätsbedingungen)

Surjektivität ist eine schwer zu kontrollierende Bedingung. Hinreichende Bedingungen erhält man etwa in folgender Weise. Sei $\Phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ gut, ε-frei und episch. (Φ ε-frei $\Leftrightarrow \Phi\left(T(\mathbb{G}_1)\right) \subseteq T(\mathbb{G}_2)^+$). Φ heißt *normal*, falls $\Phi\left(S(\mathbb{G}_1)\right) = S(\mathbb{G}_2)$ und für alle $(p, q) \in P(\mathbb{G}_1)$ und p' mit $\Phi p' = \Phi p$ ein q' mit $(p', q') \in P(\mathbb{G}_1)$ und $\Phi p = \Phi p'$ existiert.

In [6] wird gezeigt, daß jeder normale Morphismus abgeschlossen ist. Ähnlich läßt sich eine duale Version dieser Begriffsbildungen behandeln.

Unser Hauptinteresse gilt internen Morphismen. Einen abgeschlossenen, internen Morphismus Φ nennen wir eine *Transformation*. Eine gute Transformation heißt *Reduktion*. Eine Transformation $\Phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ mit

(i) $f_1, f_2 \in D(\mathbb{G}_1)$, $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$ impliziert $f_1 = f_2$

(ii) $\Phi(\xi) = \Phi(\xi') \Rightarrow \xi = \xi'$ für $\xi, \xi' \in Z(\mathbb{G})$

heißt *Einbettung*. Beispiel 3 liefert Einbettungen.

Lemma 1.1:

Ist $\Phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ eine Einbettung und $\mathbb{G}_1$ reduziert, so ist Φ erweiternd.

Beweis: (indirekt)

Nehmen wir im Gegensatz zur Behauptung an, daß es ein $r \in P(\mathbb{G}_1)$ mit $\Phi(r) = w$ gibt, so gilt $r = (\Phi^{-1} w, \Phi^{-1} w)$. Da $\mathbb{G}_1$ reduziert ist, gibt es $f \in D(\mathbb{G}_1)$ mit

$$f = f_1 \circ (u \times r \times v) \circ f_2 .$$

Betrachte dann $f' = f_1 \circ f_2$, so erhalten wir $\Phi(f) = \Phi(f')$ — Widerspruch!

Bevor wir zur Definition der Verwandtschaft kommen, zunächst einige Vorbemerkungen.

Sei *Dicht* die Kategorie der dichten Morphismen und Grammatiken. In *Dicht* werden wir eine Reihe von Unterkategorien, sowohl durch Einschränkung der Objekte, wie auch der Morphismen aussondern. Um formal aufwendige Definitionen zu vermeiden, vereinbaren wir folgende Schreibweise:

$P_{M_{P_0}}$ ist die Unterkategorie von *Dicht* mit den Objekten von *Dicht*, die die Eigenschaften P_0 haben, und den Morphismen von *Dicht*, die die Eigenschaften P_M haben; z. B. ist *E* $Trans_{cf}$ die Kategorie der erweiternden Transformationen und kontextfreien Grammatiken.

Die zweite Bemerkung betrifft die Pfeilnotationen. Hier verzichten wir häufig bei Diagrammkonstruktionen auf die Kennzeichnungen Φ, G_1, G_2 und schreiben an den Pfeil die relevanten Eigenschaften. Es bezeichnet also $\cdot \xrightarrow[\text{red}]{} \cdot$ eine

Reduktion zwischen nicht näher spezifizierten Grammatiken. Diese verkürzende Notation werden wir jedoch nur bei umfangreichen Diagramm-Manipulationen verwenden.

Sei Iso_H die Kategorie der internen Isomorphismen und Grammatiken mit Objekten H für jede Unterklasse der Klasse der Grammatiken. Sei g eine Unterkategorie von *Dicht* mit $Iso_{Obj(g)} \subseteq g$. Ein *g-Verwandtschaftsdiagramm* ist eine Folge

$$D = \mathbb{G} \swarrow{}^{\cdot} \searrow {}_{\cdot} \swarrow {}^{\cdot} \;\ldots\; {}^{\cdot} \searrow \mathbb{G}'$$

wobei alle Pfeile Morphismen in g sind. Insbesondere sind also alle Punkte Objekte von g.

Mit $Rd(D)$ bezeichnen wir die Menge $\{\mathbb{G}, \mathbb{G}'\}$. Zwei Diagramme D_1 und D_2 heißen *äquivalent*, falls $Rd(D_1) = Rd(D_2)$ gilt. Zwei Grammatiken $\mathbb{G}$ und $\mathbb{G}'$ heißen *g-verwandt* ($\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(g)$), falls es ein g-Verwandtschaftsdiagramm D mit $Rd(D) = \{\mathbb{G}, \mathbb{G}'\}$ gibt. Trivialerweise gelten folgende Aussagen:

(i) $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}\,(g)$ für alle $\mathbb{G} \in \mathrm{Obj}\,(g)$

(ii) $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(g) \Rightarrow \mathbb{G}' \sim \mathbb{G}\,(g)$

(iii) $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}\,(g)\ \&\ \mathbb{G}' \sim \mathbb{G}''\,(g) \Rightarrow \mathbb{G} \sim \mathbb{G}''\,(g)$

(iv) $g' \subseteq g\colon \mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(g') \Rightarrow \mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(g)$

(v) $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(g) \Rightarrow \mathscr{L}(\mathbb{G}') = \mathscr{L}(\mathbb{G})$

Beispiel 7:

Betrachte $g = Dicht$. Seien $\mathbb{G}$ und $\mathbb{G}'$ beliebig mit $\mathscr{L}(\mathbb{G}) = \mathscr{L}(\mathbb{G}')$. Da $Iso_{Obj(\mathbb{G})} \subseteq Dicht$, können wir o. B. d. A. annehmen, daß $\mathbb{G} + \mathbb{G}'$ bildbar (vergleiche Beispiel 4) ist. Aus Beispiel 4 folgt dann $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(Dicht)$, d. h. $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(Dicht)$ dann und nur dann, wenn $\mathscr{L}(\mathbb{G}) = \mathscr{L}(\mathbb{G}')$ ist. Insbesondere ist die Relation $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(Dicht)$ daher nicht entscheidbar.

Beispiel 8:

Sei Red_{cf} die Kategorie der kontextfreien Grammatiken und Reduktionen. Einem Theorem aus [16] entnimmt man:

$$\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'\,(Red_{cf}) \Leftrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{G}^{()}) = \mathscr{L}(\mathbb{G}'^{()}).$$

Dabei ist $\mathbb{G}^{()}$ mit einem universellen Klammerpaar, definiert durch

$$\mathbb{G}^{()} = (\{A(\mathbb{G}) W \{(,)\}, \{p \to (q) \mid p \to q \in P(\mathbb{G})\}, T(\mathbb{G}) \cup \{(,)\}, S(\mathbb{G})\}).$$

Die rechte Seite der obigen Äquivalenz ist die sogenannte strukturelle Äquivalenz ([9], [10]).

Beispiel 9:

Sei *alph* Tr_{cf} die Kategorie der kontextfreien Grammatiken und alphabetischen Transformationen. Nach [11] ist in diesem Fall jedes Verwandtschaftsdiagramm äquivalent zu einem Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, "\text{alph. Trans.}"'] \arrow[dr, "\text{alph. Trans.}"] & \\ \cdot & & \cdot \end{tikzcd}$$

Hiermit zeigt man unter Verwendung von [12], daß die Relation $\mathbb{G} \sim \mathbb{G}'$ ($alph\ Tr_{cf}$) entscheidbar ist.

Verwandtschaftsbeziehungen sind häufig nur möglich, wenn Struktureigenschaften der Grammatiken unter den betrachteten Morphismen invariant bleiben. Wir diskutieren Beispiele.

Beispiel 10: (Chomsky-Hierarchie)

Betrachte die Kategorie *Ein* der Einbettungen und Grammatiken und die Kategorie *Alph Tr* der alphabetischen Transformationen und Grammatiken. Man macht sich leicht folgendes klar:

$$\mathbb{G} \sim \mathbb{G}' \,(Alph\ Tr)\ \&\ \mathbb{G} \in cf\,(\mathrm{lin}) \Rightarrow \mathbb{G}' \in cf\,(\mathrm{lin}).$$

Diese Aussage gilt nicht für *Ein*, wie man leicht sieht.

Beispiel 11: (Eindeutigkeit)

Zu einer Grammatik $\mathbb{G}$ sei

$$Md\,(\mathbb{G}) = \mathrm{Sup}\,\{\,|\,S\,(G), w\,|_{\mathbb{G}} \mid w \in T(\mathbb{G})^*\}.$$

Dann gilt:

$$\mathbb{G} \sim \mathbb{G}' \,(Eind) \Rightarrow Md\,(\mathbb{G}) = Md\,(\mathbb{G}').$$

Diese Aussage gilt nicht für *Alph Tr*, wie man leicht sieht.

Wir wollen in diesem Zusammenhang eine tieferliegende Aussage herleiten, die ein von G. Hotz [7] aufgeworfenes Problem im negativen Sinne beantwortet. Wir betrachten hierzu die Kategorie $Trans_{Lin}$ der Transformationen und linearen Grammatiken.

Wir betrachten nun folgende Größe:

Ist $f = (u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$ eine kanonische Darstellung von f, so setze $Rb\,(f) = \underset{1 \le i \le s}{\mathrm{Max}}\, |\,u_i\,|$ und $Rb\,(\mathbb{G}) = \underset{f \in D(\mathbb{G})}{\mathrm{Sup}}\, Rb\,(f)$. Wir bemerken

Beobachtung:

$\Phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ intern, $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ linear, so bildet Φ jede kanonische Darstellung in eine kanonische Darstellung ab.

Ist nun $\Phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ eine Transformation, so gilt offenbar

Beobachtung:

$$Rb\,(\mathbb{G}_1) < \infty \Leftrightarrow Rb\,(\mathbb{G}_2) < \infty\,.$$

Betrachte nun eine reguläre Menge L mit $|L|=\infty$, dann gibt es eine linkslineare Grammatik $\mathbb{G}_1$ und eine rechtslineare Grammatik $\mathbb{G}_2$ mit $\mathscr{L}(\mathbb{G}_1)=L=\mathscr{L}(\mathbb{G}_2)$. Dann gilt aber $Rb(\mathbb{G}_1)=\infty$ und $Rb(\mathbb{G}_2)=0$. Andererseits folgt aus der obigen Beobachtung:

$$\mathbb{G} \sim \mathbb{G}' \, (Trans_{Lin}) \;\&\; Rb(\mathbb{G})<\infty \Rightarrow Rb(\mathbb{G}')<\infty .$$

Hieraus folgt: $\mathbb{G}_1 \not\sim \mathbb{G}_2 \, (Trans_{Lin})$.

Diese Überlegung widerlegt aber die von G. Hotz geäußerte Vermutung, daß für $Trans_{Lin}$ gilt:

$$\mathbb{G} \sim \mathbb{G}' \, (Trans_{Lin}) \Leftrightarrow L(\mathbb{G})=L(\mathbb{G}').$$

Wir weisen in diesem Zusammenhang darauf hin, daß — wie in [2] und [3] ausgeführt — Verwandtschaft von Grammatiken häufig zu gleichem Verhalten in Bezug auf die Analysezeit führt.

2. Zerlegungs- und Produktsätze

Wir untersuchen die Kategorie $ETrans_{cf}$ der kontextfreien Grammatiken und erweiternden Transformationen. Wir beweisen zunächst einen Zerlegungssatz.

Betrachte eine Grammatik $\mathbb{G}$ und nenne $f \in F(\mathbb{G})$ *irreduzibel*, falls aus $f=f_1 \times f_2$ stets folgt $f=f_1$ oder $f=f_2$. Ein Morphismus $\Phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ heißt *irreduzibel*, falls $\Phi(r)$ irreduzibel für alle $r \in P(\mathbb{G}_1)$ ist. Wir vermerken: Ist $\mathbb{G}_1$ kontextfrei, so ist Φ irreduzibel.

Satz 2.1:

Sei $\Phi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ ein interner, erweiternder und irreduzibler Morphismus, dann gibt es eine Zerlegung

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_1 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{G}_2 \arrow[dl, "\Phi_2"] \\ & \mathbb{G}_3 & \end{tikzcd}$$

wobei Φ_1 eine irreduzible Einbettung und Φ_2 gut ist.

Beweis:

1. Teil: „Konstruktion von $\mathbb{G}_3$, Φ_1 und Φ_2".

Betrachte $r \in P(\mathbb{G}_1)$. Sei dann

$$\Phi(r)=(u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1), \quad s \geq 1$$

eine sequentielle Darstellung von $\Phi(r)$. Wir konstruieren nun zu r eine Menge $P(r)$ von Regeln, die r simuliert.

Dazu sei

$$f_i=(u_i \times r_i \times v_i) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$$

und

$$\bar{f}_i=(u_s\times r_s\times v_s)\circ\ldots\circ(u_{i+1}\times r_{i+1}\times v_{i+1})$$
$$(1\leq i\leq s).$$

Wir bestimmen nun induktiv f_i^*, $P_i(r)$, $Z_i(r)$ und Φ_2 mit $f_s^*=\Phi_1(r)$ und $P_s(r)=P(r)$.

Sei $u\in A(\mathbb{G}_2)$, $f\in D(\mathbb{G}_2)$, $df=x\,u\,y$. Wir sagen: u wird durch f relativ x, y nicht verändert, falls $f=f_1\times u\times f_2$ gilt mit $df_1=x$ und $df_2=y$.

Ist $w\in A(\mathbb{G}_2)^*$, so gilt $w=y_0\,\xi_1\ldots\xi_m\,y_m$ mit $y_0,\ldots,y_m\in T(\mathbb{G}_2)^*$, $\xi_1,\ldots,\xi_m\in Z(\mathbb{G}_2)$. Diese Zerlegung nennen wir die „Z-Zerlegung" von w.

Anfangsschritt:
Betrachte die Z-Zerlegung $cr_1=y_0\,\xi_1\ldots\xi_m\,y_m$. Sei ferner $dr=\bar{u}_1\,\bar{w}\,\bar{v}_1$ mit $\Phi\,\bar{u}_1=u_1$, $\Phi(\bar{v}_1)=v_1$ und $\Phi(\bar{w})=dr_1$:

Betrachte nun für $1\leq i\leq m$ diejenigen ξ_i, die relativ $u_1\,y_0\,\xi_1\ldots y_{i-1}, y_{i+1}\,\xi_{i+1}\ldots y_m$ durch $\bar{f}_1$ verändert werden. Bestimme zu diesen ξ_i neue Buchstaben $\xi_i(1,r)$. Wird ξ_i nicht verändert, so korrespondiert ξ_i zu einem eindeutig bestimmten ξ_i^* in cr. Setze

$$\hat{\xi}_i=\begin{cases}\xi_i(1,r), & \text{falls } \xi_i \text{ verändert wird}\\ \xi_i^* & \text{sonst.}\end{cases}$$

Bilde

$$P_0(r)=\{\bar{w}'\to y_0\,\hat{\xi}_1\ldots\hat{\xi}_m\,y_m\},$$
$$Z_0(r)=\{\xi_i(1,r)\mid \xi_i \text{ wird verändert}\},$$
$$f_1^*=\bar{u}_1\times(\bar{w}'\to y_0\,\hat{\xi}_1\ldots\hat{\xi}_m\,y_m)\times\bar{v}_1,$$
$$\Phi_2(\xi_i(1,r))=\xi_i,\quad \Phi_2(\xi_i^*)=\Phi(\xi_i^*),$$

wobei $dr=\bar{u}_1\,\bar{w}'\,\bar{v}_1$ gilt.

Induktionsschritt:
Seien f_{i-1}^* und $P_{i-1}(r)$ konstruiert. Betrachte $u_i\,dr_i\,v_i$ und $u_i\,cr_i\,v_i$. Dann gilt $cf_{i-1}^*=\bar{u}\,\bar{w}\,\bar{v}$ mit $\bar{w}=\xi_1\ldots\xi_m$, $\xi_i\in Z(\mathbb{G}_1)$ $(1\leq i\leq m)$, $\Phi_2(\bar{w})=dr_i$, $\Phi_2(\bar{u})=u_i$, $\Phi_2(\bar{v})=v_i$.

Sei nun $cr_i=y_0\,\eta_1\ldots\eta_n\,y_n$ die Z-Zerlegung von cr_i. Unter den η_i bestimme diejenigen η_λ, die durch $\bar{f}_i$ relativ $u_i\,y_i\,\eta_1\ldots y_{\lambda-1}, y_\lambda\,\eta_{\lambda+1}\ldots\eta_n\,y_n\,v_i$ verändert werden. Zu einem derartigen η_λ bestimme einen neuen Buchstaben $\eta_\lambda(i,r)$. Wird η_λ nicht verändert, so korrespondiert η_λ zu einem eindeutig bestimmten η_λ^* in cr. Setze dann

$$\hat{\eta}_\lambda=\begin{cases}\eta_\lambda(i,r), & \text{falls } \eta_\lambda \text{ verändert wird}\\ \eta_\lambda^* & \text{sonst.}\end{cases}$$

Bilde nun

$$\bar{r}_i=(\bar{w}\to y_0\,\hat{\eta}_1\ldots\hat{\eta}_n\,y_n),$$
$$P_i(r)=P_{i-1}(r)\cup\{\bar{r}_i\},$$
$$Z_i(r)=Z_{i-1}(r)\cup\{\eta_\lambda(i,r)\mid \eta_\lambda \text{ wird verändert}\}$$

und

$$f_i^* = (\bar{u} \times \bar{r}_i \times \bar{v}) \circ f_{i-1}^*.$$

Setze $\Phi_2(\eta_\lambda(i, r)) = \eta_\lambda$ und $\Phi_2(\eta_\lambda^*) = \Phi(\eta_\lambda^*)$.

2. Teil:

Durch diese Konstruktion erhält man nun zu jedem $r \in P(\mathbb{G}_1)$ eine Regelmenge $P(r) = P_s(r)$, ein Alphabet $Z(r) = Z_s(r)$ und eine Ableitung $f^{(r)} = f_s^*$ bezüglich $P(r)$. Wegen der Irreduzibilität von Φ gilt dann:

(i) $P(r) \cap P(r') \neq \emptyset \Rightarrow r = r'$

(ii) $f^{(r)} = f^{(r')} \Rightarrow r = r'$

Definiere nun $\mathbb{G}_3$, Φ_1 durch

(1) $S(\mathbb{G}_3) = S(\mathbb{G}_1)$, $T(\mathbb{G}_3) = T(\mathbb{G}_1)$, $Z(\mathbb{G}_3) = Z(\mathbb{G}_1) \cup \bigcup_{r \in P(\mathbb{G}_1)} Z(r)$

(2) $P(\mathbb{G}_3) = \bigcup_{r \in P(\mathbb{G}_1)} P(r)$

(3) $\Phi_1(r) = f^{(r)}$

Wegen (i) und (ii) folgt, daß Φ_1 eine Einbettung ist.

Wir können einige Zusätze beweisen.

Korollar 1:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt:

(1) Φ *dicht* $\Rightarrow \Phi_2$ *dicht*

(2) Φ *abgeschlossen* $\Rightarrow \Phi_2$ *Reduktion.*

Beweis:

(1) Betrachte $w \in \mathscr{L}(\mathbb{G}_2)$, dann existiert $f' \in D(\mathbb{G}_1)$ mit $cf' = w$. Nun gilt $c\,\Phi_1 f' = w$. Also ist Φ_2 dicht.

(2) In ähnlicher Weise wie (1) folgt zunächst, daß Φ abgeschlossen ist. Hieraus folgt (2).

Bemerkung:

Mit einer gröberen Konstruktion kann die Voraussetzung „irreduzibel" vermieden werden. Hierzu wird zu Beginn eine Regel r_0 mit $dr_0 = \bar{u}_1\, \overline{dr_1}\, \bar{v}_1$ aufgenommen, die alle Hilfsvariablen, die in u_1 und v_1 auftreten, in neue Zeichen verwandelt. Dies führt aber automatisch zum Einsatz kontextsensitiver Regeln.

Bemerkung:

Zu $M \subseteq F(\mathbb{G})$ bezeichne $G(M)$ die kleinste Untergrammatik von $\mathbb{G}$, so daß alle $f \in M$ Morphismen von $\mathbb{G}(M)$ sind.

Unsere Konstruktion liefert nun für $\mathbb{G}_3$

(1) $\mathbb{G}_3(\{\Phi_1(r)\}) \cap \mathbb{G}_3(\{\Phi_1(r')\}) \subseteq (Z(\mathbb{G}_1) \cup T(\mathbb{G}_1), \emptyset, T(\mathbb{G}_1), S(\mathbb{G}_1))$ falls $r \neq r'$ ist.

Im kontextfreien Fall gilt darüber hinaus

(2) Zu jedem $r \in P(\mathbb{G}_1)$ existiert genau ein $r' \in P(\mathbb{G}_3(\{\Phi_1(r)\}))$ mit $dr' \in Z(\mathbb{G}_1)$.

Dies gibt Anlaß zu einer neuen Klasse von Morphismen. Definiere hierzu zu jedem $r \in P(\mathbb{G})$ ($\mathbb{G}$ eine Grammatik)

$$A_d(r) = \{\xi_i \mid 1 \leq i \leq t\}, \text{ falls } dr = \xi_1 \ldots \xi_t \text{ mit } \xi_i \in Z(\mathbb{G}) \text{ für } 1 \leq i \leq t.$$

Dann nennen wir eine erweiternde Einbettung $\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ eine *Simulation*, falls gilt:

(1) $\mathbb{G}_2(\{\Phi(r)\}) \cap \mathbb{G}_2(\{\Phi(r')\}) \subseteq (\Phi(Z(\mathbb{G}_1)) \cup T(\mathbb{G}_1), \emptyset, T(\mathbb{G}_1), \Phi(S(\mathbb{G}_1)))$ für alle $r, r' \in P(\mathbb{G}_1)$ mit $r \neq r'$.

(2) Zu jedem $r \in P(\mathbb{G}_1)$ gibt es genau ein $r_0 \in P(\mathbb{G}_2(\Phi_1(r)))$ mit $A_d(r_0) \cap \Phi(Z(\mathbb{G}_1)) \neq \emptyset$.

Korollar:
Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gibt es eine Zerlegung $\Phi = \Phi_2 \Phi_1$, wobei Φ_1 eine Simulation und Φ_2 gut ist.

Eine weitere Folgerung ist

Korollar 2:
Sei $\Phi_1: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ intern und gut und $\Phi_2: \mathbb{G}_2 \to \mathbb{G}_3$ eine erweiternde irreduzible Transformation, dann gibt es $\mathbb{G}_4$, Ψ_1, Ψ_2 mit

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_2 \arrow[d, "\Phi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{G}_1 \arrow[l, "\Phi_1"'] \arrow[d, "\Psi_1"] \\ \mathbb{G}_3 & \mathbb{G}_4 \arrow[l, "\Psi_2"] \end{tikzcd}$$

kommutativ, Ψ_1 Simulation und Ψ_2 gut und intern. Ist Φ_1 eine Reduktion, so auch Ψ_2.

Beweis:
Betrachte $\Phi_2 \Phi_1 = \Phi'$. Dann erfüllt Φ' die Voraussetzungen des Satzes 2.1.

Als nächstes beweisen wir einen Produktsatz.

Satz 2.2:
Sei $\Phi_1: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_0$ eine irreduzible, erweiternde Transformation und $\Phi_2: \mathbb{G}_2 \to \mathbb{G}_0$ gut und intern, dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_1 \arrow[d, "\Phi_1"'] & \mathbb{G}_3 \arrow[l, "\Psi_2"'] \arrow[d, "\Psi_1"] \\ \mathbb{G}_0 & \mathbb{G}_2 \arrow[l, "\Phi_2"] \end{tikzcd}$$

wobei Ψ_2 gut und intern und Ψ_1 irreduzibel und dicht ist.

Beweis:

Nach Satz 2.1 existiert zunächst ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr, "\text{Sim.}"] \arrow[dd, "\Phi_1"'] & \\ & \cdot \arrow[dl, "\text{gut, intern}"] \\ \cdot & \cdot \arrow[l, "\Phi_2"] \end{tikzcd}$$

Nach [11], [14] existiert dann ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr, "\text{Sim.}"] \arrow[dd, "\Phi_1"'] & & \\ & \cdot \arrow[dl, "\text{gut, intern}"] & \cdot \arrow[l, "\text{gut, intern}"'] \arrow[dl, "\text{gut, intern}"] \\ \cdot & \cdot \arrow[l, "\Phi_2"] & \end{tikzcd}$$

Also können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß Φ_1 eine irreduzible Simulation ist. Wir definieren nun $\mathbb{G}_3$ durch folgende Angaben:

(i) $Z(\mathbb{G}_3)=Z(\mathbb{G}_2)$, $T(\mathbb{G}_3)=T(\mathbb{G}_1)$, $S(\mathbb{G}_3)=S(\mathbb{G}_2)$

(ii) $r'=(p',q')\in P(\mathbb{G}_3)$
$\Leftrightarrow$ Es existiert $(p,q)\in P(\mathbb{G}_1)$ mit $(\Phi_2\,p', \Phi_2\,q')=(p,q)$ und $f^{(r')}\in F(\mathbb{G}_2)$ mit $\Phi_2(f^{(r')})=\Phi_1(r)\;\&\; d f^{(r')}=p'\;\&\; c f^{(r')}=q'$.

Nun definiere Ψ_2 und Ψ_1 durch

(iii) $\Psi_2(x)=\Phi_2(x)\,(x\in A(\mathbb{G}_2))$, $\Psi_2(r')=r$ sowie

(iv) $\Psi_1(x)=x\,(x\in A(\mathbb{G}_3))$ und $\Psi_1(r')=f^{(r')}$.

Wir behaupten nun: „Ψ_1 ist dicht."

Betrachte hierzu $w\in\mathscr{L}(\mathbb{G}_2)$, dann existiert $f\in D(\mathbb{G}_2)$ mit $df\in S(\mathbb{G}_2)$ und $cf=w$. Betrachte $\Phi_2(f)$. Da Φ_1 Simulation ist, existieren folgende Zerlegungen:

(1) $\Phi_2(f)=f_1\circ\ldots\circ f_s$

(2) $f_i=\bar{u}_i\times\bar{f}_i\times\bar{v}_i\quad(1\le i\le s)$

(3) $\Phi_1(\bar{u}_1\times\bar{r}_1\times\bar{v}_1)\circ\ldots\circ(\bar{u}_k\times\bar{r}_k\times v_k)=\Phi_2(f)$ mit $\bar{r}_i\in P(\mathbb{G}_1)\quad(1\le i\le k)$

(4) $\Phi_1(\bar{r}_i)=\bar{f}_i$

Da Φ_2 gut und intern ist, induziert Φ_2 auf den sequentiellen Darstellungen von f eine Surjektion auf die sequentiellen Darstellungen von $\Phi_2(f)$ ([16]). Andererseits gewinnen wir aus den sequentiellen Darstellungen der f_i durch Hintereinanderhängen eine sequentielle Darstellung von $\Phi_2(f)$. Damit besitzt f aber eine Darstellung

$$f=f_1^*\circ\ldots\circ f_s^*$$

mit $\Phi_2(f_i^*)=f_i\;(1\le i\le s)$ und $f_i^*=u_i^*\times f_i^{**}\times v_i^*\;(1\le i\le s)$, wobei $\Phi_2(u_i^*)=\bar{u}_i$, $\Phi_2^*(v_i^*)=\bar{v}_i$ und $\Phi_2(f_i^{**})=\bar{f}_i$. Hieraus folgt aber $r_i^*=(df_i^{**}, cf_i^{**})\in P(\mathbb{G}_3)$.

Bilde nun

$$f' = (u_1^* \times r_1^* \times v_1^*) \circ \ldots \circ (u_s^* \times r_s^* \times v_s^*).$$

Dann gilt zunächst:

$$d f' = u_s^* \, d r_s^* \, v_s^* = u_s^* \, d f_s^{**} \, v_s^* = d f_s^* = d f \in S(\mathbb{G}_2).$$

Nun gilt $S(\mathbb{G}_2) = S(\mathbb{G}_3)$, also $d f' \in S(\mathbb{G}_3)$.

Andererseits gilt:

$$c f' = u_1^* \, c r_1^* \, v_1^* = u_1^* \, c f_1^{**} \, v_1^* = c f_1^* = c f = w.$$

Wir wollen wieder einige Zusätze beweisen.

Korollar 1:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 gilt: Ist Φ_2 eine Reduktion, so auch Ψ_2.

Beweis:

Wir betrachten die durchgeführte Konstruktion. Sei $f \in D(\mathbb{G}_1)$. Dann existiert $f' \in D(\mathbb{G}_2)$ mit $\Phi_1(f) = \Phi_2(f')$. Wie in obigem Beweis finden wir dann Zerlegungen

(i) $f = (u_1 \times r_1 \times v_1) \circ \ldots \circ (u_s \times r_s \times v_s)$

(ii) $f' = (u_1^* \times f_1^{**} \times v_1^*) \circ \ldots \circ (u_s^* \times f_s^{**} \times v_s^*)$ mit

(iii) $\Phi_2(u_i^*) = u_i$, $\Phi_2(f_i^{**}) = \Phi_1(r_i)$, $\Phi_2(v_i^*) = v_i$ $(1 \leq i \leq s)$.

Also gilt $r_i^* = (d f_i^{**}, c f_i^{**}) \in P(\mathbb{G}_3)$. Bilde nun

$$f'' = (u_1^* \times r_1^* \times v_1^*) \circ \ldots \circ (u_s^* \times r_s^* \times v_s^*).$$

Dann gilt $\Psi_2(f'') = f$.

Wir beschäftigen uns mit der Frage, wann wir die Eigenschaft „Einbettung“ übertragen können.

Wir nennen $\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ *relativ injektiv*, falls für alle $w_1, w_2 \in A(\mathbb{G}_1)^*$ und $f \in F(\mathbb{G}_2)$ gilt:

$$|\Phi^{-1}(f) \cap (w_1, w_2)_{\mathbb{G}_1}| \leq 1.$$

Beispiele für relativ injektive Φ erhält man durch folgende Überlegungen. Nennen wir $\mathbb{G}$ *total eindeutig*, falls für alle $w_1, w_2 \in A(\mathbb{G})^*$ gilt:

$$|(w_1, w_2)|_{\mathbb{G}} \leq 1,$$

so ist jedes $\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ relativ injektiv, falls $\mathbb{G}_1$ total eindeutig ist. Wir vermerken, daß jede reduzierte, kontextfreie eindeutige Grammatik bereits total eindeutig ist.

Korollar 2:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.2 gilt: Ist Φ_2 relativ injektiv, so ist Ψ_2 relativ injektiv und Ψ_1 eine Einbettung.

Beweis:

1. „Ψ_1 ist abgeschlossen."

   Nach Konstruktion gilt, daß es zu jedem $f \in F(\mathbb{G}_2)$ eine Zerlegung der Form

   (i) $f=(u_1 \times f_1 \times v_1) \circ \ldots \circ (u_s \times f_s \times v_s)$

   und ein $f' \in F(\mathbb{G}_3)$ gibt mit

   (ii) $f'=(u_1 \times r_1 \times v_1) \circ \ldots \circ (u_s \times r_s \times v_s)$
   $(u_i, v_i \in A(\mathbb{G}_2)^*,\ r_i \in P(\mathbb{G}_3),\ 1 \leq i \leq s)$

   (iii) $r_i=(d f_i, c f_i)\quad (1 \leq i \leq s)$

   (iv) $\Phi_1(d\Phi_2 f_i, c\Phi_2 f_i)=\Phi_2 f_i \quad (1 \leq i \leq s)$

   (v) $\Psi_1(r_i) \in \Phi_2^{-1}(\Phi_1\, d\Phi_2 f_i, c\Phi_2 f_i) \cap (d f_i, c f_i)_{\mathbb{G}_2} \quad (1 \leq i \leq s)$

   Hieraus folgt $\Psi_1(r_i)=f_i$ $(1 \leq i \leq s)$, also $\Psi_1(f')=f$.

2. „Ψ_1 ist injektiv."

   Der Beweis ist indirekt. Sei $\Psi_1(f_1)=\Psi_1(f_2)$. Betrachte kanonische sequentielle Darstellungen $f_i=(u_1^{(i)} \times r_1^{(i)} \times v_1^{(i)}) \circ \ldots \circ (u_{s_i}^{(i)} \times r_{s_i}^{(i)} \times v_{s_i}^{(i)})$, $(i=1,2)$. Nun gilt: $\Phi_1\Psi_2(f_1)=\Phi_2\Psi_1(f_1)=\Phi_2\Psi_1(f_2)=\Phi_1\Psi_2(f_2)$. Also gilt: $\Psi_2(f_1)=\Psi_2(f_2)$. Damit erhalten wir $s_1=s_2=s$, $\Phi_2(u_j^{(1)})=\Phi_2(u_j^{(2)})$, $\Phi_2(v_j^{(1)})=\Phi_2(v_j^{(2)})$ und $\Psi_2(r_j^{(1)})=\Psi_2(r_j^{(2)})$. Ferner gilt:

   $$\Psi_1(f_i)=(u_1^{(i)} \times g_1^{(i)} \times v_1^{(i)}) \circ \ldots \circ (u_s^{(i)} \times g_s^{(i)} \times v_s^{(i)})\ (i=1,2)$$

   mit $\Phi_1\Psi_2(r_j^{(i)})=\Phi_2(g_j^{(i)})$ $(i=1,2,\ 1 \leq j \leq s)$. Da Φ_2 relativ injektiv, folgt: $g_j^{(1)}=g_j^{(2)}$ $(1 \leq j \leq s)$. Dann gilt aber auch $u_j^{(1)}=u_j^{(2)}$ und $v_j^{(1)}=v_j^{(2)}$ $(1 \leq j \leq s)$, das heißt aber $f_1=f_2$.

3. „Ψ_2 ist relativ injektiv."

   Seien $f_1, f_2 \in F(\mathbb{G}_3)$ mit $d f_1=d f_2$, $c f_1=c f_2$ und $\Psi_2 f_1=\Psi_2 f_2$. Dann folgt aber $\Phi_2\Psi_1 f_1=\Phi_2\Psi_1 f_2$ und $d, c\,\Psi_1 f_1=d, c\,\Psi_1 f_1=d, c f_2=d, c\,\Psi_1 f_2$. Hieraus folgt: $\Psi_1 f_1=\Psi_1 f_2$ und nach 2.: $f_1=f_2$.

Für lineare Grammatiken können Simulationen in gewissem Sinne auf längenerhaltende Morphismen zurückgeführt werden. Wir nennen eine lineare Grammatik $\mathbb{G}$ *erweiternd*, falls für $(p,q) \in P(\mathbb{G})$ mit $|q| \leq 1$ stets $q \in T(\mathbb{G})$ nach sich zieht. Eine lineare Grammatik $\mathbb{G}$ heißt *synchronisiert*, falls gilt

$$c P(\mathbb{G}) \subseteq T(\mathbb{G}) \cdot Z(\mathbb{G}) \cup Z(\mathbb{G}) \cdot T(\mathbb{G}) \cup T(\mathbb{G}).$$

Lemma 2.1:

Sei Φ: $\mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ eine Simulation, $\mathbb{G}_1$ eine erweiternde und $\mathbb{G}_2$ eine synchronisierte, reduzierte, lineare Grammatik. Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *Ist $r=\xi \to u\,\eta\,v \in P(\mathbb{G}_1)$ bzw. $\xi \to w \in P(\mathbb{G}_1)$ mit $u, v, w \in T(\mathbb{G}_1)^*$ und $\xi, \eta \in Z(\mathbb{G}_1)$, dann gilt: $\|\Phi(r)\|=|u|+|v|$ (bzw. $|w|$).*

(2) *Sei $\xi \notin \Phi(Z(\mathbb{G}_1))$, dann läßt sich jedes f mit*

$$\|f\| \geq 1,\ d f=\xi\ \&\ c f \in T(\mathbb{G}_2)^* \cdot \{\xi\} \cdot T(\mathbb{G}_2)^*$$

zerlegen in der Form $f = f_1 \circ f_2$ *mit* $c f_2 = u \xi' v$, $u, v \in T(\mathbb{G})^*$ *und* $\xi' \in \Phi(Z(\mathbb{G}_1))$.

(3) *Sei* $r \in P(\mathbb{G}_1)$ *und* $\Phi(r) = (u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$ *dann gilt für alle* $1 \leq i < j \leq s$:

$$d r_i \neq d r_j.$$

Beweis:

(3) folgt aus (2), (1) folgt aus (3). Wir betrachten (2) und schließen indirekt.

Nehmen wir an, daß es ein $f \in F(\mathbb{G}_2)$ gibt mit $\| f \| \geq 1$, $df \in Z(\mathbb{G}_1)$, $cf \in T(\mathbb{G}_2)^* \cdot df \cdot T(\mathbb{G}_2)^*$ und für alle Zerlegungen $f = f^{(1)} \circ f^{(2)}$ gilt:

$$c(f^{(2)}) \in T(\mathbb{G}_1)^* \times (Z(\mathbb{G}_2) \backslash Z(\mathbb{G}_1)) \times T(\mathbb{G}_2)^*.$$

Dann können wir aber zu jedem beliebig großen $k \in \mathbb{Z}_+$ ein f_k mit $\| f_k \| \geq k$ finden, so daß $d f_k = \xi$, $c f_k \in T(\mathbb{G}_2)^* \cdot \xi \cdot T(\mathbb{G}_2)^*$ und die oben genannte Zerlegungseigenschaft ebenfalls gilt. Dann gibt es aber f_k^* und f_k^{**} mit

$$f_k^{***} = f_k^* \circ f_k \circ f_k^{**} \in D(\mathbb{G}_2).$$

Für hinreichend große k gilt dann aber

$$\Phi^{-1}(f_k^{***}) = \emptyset \text{ — Widerspruch!}$$

Seien $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ zwei Grammatiken, $\Phi: \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ ist eine *treue Erweiterung*, falls gilt:

(1) Φ ist gut und episch

(2) $T(\mathbb{G}_2) \subseteq \Phi(T(\mathbb{G}_1)) \subseteq T(\mathbb{G}_2) \cup \{\varepsilon\}$

(3) $\forall f_1, f_2 \in D(\mathbb{G}_1), \Phi(f_1) = \Phi(f_2) \Rightarrow f_1 = f_2$

(4) Φ ist abgeschlossen.

Satz 2.3:

Seien $\Phi_1: \mathbb{G}_0 \to \mathbb{G}_i$ $(i = 1, 2)$ *zwei Simulationen,* $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ *synchronisierte, reduzierte lineare Grammatiken,* $\mathbb{G}_0$ *erweiternde lineare Grammatiken, dann gibt es eine lineare, erweiternde Grammatik* $\mathbb{G}_3$ *und zwei treue Erweiterungen* $\Psi_i: \mathbb{G}_3 \to \mathbb{G}_i$ $(i = 1, 2)$.

Beweis:

Betrachte $r \in P(\mathbb{G}_0)$. Sei dann

$$\Phi_i(r) = (u_s^{(i)} \times r_s^{(i)} \times v_s^{(i)}) \circ \ldots \circ (u_1^{(i)} \times r_1^{(i)} \times v_1^{(i)}) \quad (i = 1, 2).$$

Dann gilt: $u_s^{(i)} c r_s^{(i)} v_s^{(i)} = c(r)$ $(i = 1, 2)$ und $u_1^{(i)} v_1^{(i)} = \varepsilon$ $(i = 1, 2)$.

Seien nun $< d r_j^{(1)}, d r_j^{(2)} >$ neue Zeichen für $2 \leq j \leq s$. Sei ferner $\$$ ein noch nicht verwandtes Zeichen. Dann definiere neue Regeln $\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_s$ durch:

(i) $d \hat{r}_1 = d r$

(ii) $d \hat{r}_i = < d r_i^{(1)}, d r_i^{(2)} >$ $2 \leq i \leq s$

$$\text{(iii)}\quad c(\hat{r}_i) = \begin{cases} (a,b) < d_{r^{(1)}_{i+1}}, d_{r^{(2)}_{i+1}} >, & \text{falls } c(r_i^{(1)}) = u\, d_{r^{(1)}_{i+1}} \ \&\ c(r_i^{(2)}) = b\, d_{r^{(2)}_{i+1}} \\ < d_{r^{(1)}_{i+1}}, d_{r^{(2)}_{i+1}} > (a,b), & \text{falls } c(r_i^{(1)} = d_{r^{(1)}_{i+1}}\, u \ \&\ c(r_i^{(2)}) = d_{r^{(2)}_{i-1}}\, b \\ (a,\$) < d_{r^{(1)}_{i+1}}, d_{r^{(2)}_{i+1}} > (\$,b), & \text{falls } c(r_i^{(1)}) = a\, d_{r^{(1)}_{i+1}} \ \&\ c(r_i^{(2)}) = d_{r^{(2)}_{i+1}}\, b \\ (\$,b) < d_{r^{(1)}_{i+1}}, d_{r^{(2)}_{i+1}} > (a,\$) & \text{sonst } (1 \le i \le s) \end{cases}$$

$$\text{(iv)}\quad c(\hat{r}_s) = \begin{cases} (a,b)\,\xi, & \text{falls } c(r_s^{(1)} = a\,\xi \ \&\ c(r_s^{(2)} = b\,\xi \\ (a,\$)\,\xi\,(\$,b), & \text{falls } c(r_s^{(1)}) = a\,\xi \ \&\ c(r_s^{(2)}) = \xi\, b \\ (\$,b)\,\xi\,(a,\$), & \text{falls } c(r_s^{(1)}) = \xi\, a \ \&\ c(r_s^{(2)}) = b\,\xi \\ \xi\,(a,b), & \text{falls } c(r_s^{(1)}) = \xi\, a \ \&\ c(r_s^{(2)}) = \xi\, b \\ (a,b), & \text{falls } c(r_s^{(1)}) = a \ \&\ c(r_s^{(2)}) = b \end{cases}$$

Durch diese Konstruktion wird $\mathbb{G}_3$ definiert. Ψ_1 und Ψ_2 werden dann über Monoidhomomorphismen induziert, die gegeben sind durch

(v) $\Psi_i(<\eta_1, \eta_2>) = \eta_1 \quad (i = 1, 2)$

(vi) $\Psi_1\big((a,b)\big) = a \quad \big(a \in T(\mathbb{G}_1), b \in T(\mathbb{G}_2) \cup \{\$\}\big)\ \&\ \Psi_1\big((\$,b)\big) = \varepsilon$

(vii) $\Psi_2\big((a,b)\big) = b \quad \big(a \in T(\mathbb{G}_1) \cup \{\$\}, b \in T(\mathbb{G}_2)\big)\ \&\ \Psi_2\big((a,s)\big) = \varepsilon$

Mit Lemma 2.1 folgt, daß $\mathbb{G}_3$ wohldefiniert ist und Ψ_1, Ψ_2 gerade treue Erweiterungen sind.

Betrachten wir linkslineare Grammatiken, so benötigen wir die Zeichen $(a,\$)$ und $(\$,b)$ nicht. Ferner entnehmen wir Lemma 2.1, daß bei Verwendung von (a,b) stets gelten muß: $a = b$.

Also erhalten wir

Satz 2.4:

Seien $\Phi_i: \mathbb{G}_0 \to \mathbb{G}_i$ $(i = 1, 2)$ zwei Simulationen, $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ synchronisierte, reduzierte, linkslineare Grammatiken, $\mathbb{G}_0$ linkslineare, erweiternde Grammatik, dann existieren eine linkslineare, erweiternde Grammatik $\mathbb{G}_3$ und zwei Reduktionen $\Psi_i: \mathbb{G}_3 \to \mathbb{G}_i$ $(i = 1, 2)$.

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage gilt für rechtslineare Grammatiken.

3. Verwandtschaften

Wir wenden die Ergebnisse aus dem Abschnitt 2. auf Verwandtschaftsprobleme an. Dazu betrachten wir zunächst $ETrans_{eindcf}$, die Kategorie der eindeutigen kontextfreien Grammatiken und erweiternden Transformationen. Sei ferner $Einb_{cf}$ die Kategorie der kontextfreien Grammatiken und Einbettungen.

Satz 3.1:

Seien $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ eindeutige, reduzierte, kontextfreie Grammatiken. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\mathbb{G}_1 \sim \mathbb{G}_2(ETrans_{eindcf})$

(2) *Es existieren eindeutige kontextfreie Grammatiken* $\mathbb{G}'_1$ *und* $\mathbb{G}'_2$ *und Reduktionen* $\Phi_i: \mathbb{G}'_i \to \mathbb{G}_i\ (i=1,2)$ *mit*

$$\mathbb{G}'_1 \sim \mathbb{G}'_2\ (Einb_{cf}),$$

Zum Beweis vermerken wir zunächst, daß die Richtung (2)→(1) trivial ist. Zur Umkehrung ziehen wir folgendes Lemma heran:

Lemma 3.1:

Jedes Diagramm $\mathbb{G}_0\, D\, \mathbb{G}_1 \xleftarrow[\text{red}]{} \mathbb{G}_2$ *mit* $\mathbb{G}_0$, $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ *eindeutig, reduziert und kontextfrei und* $D\,(Einb_{cf})$ *Verwandtschaftsdiagramm ist äquivalent zu einem Diagramm*

$$\mathbb{G}_0 \xleftarrow[\text{red}]{} \mathbb{G}_3\, D'\, \mathbb{G}_2,$$

wobei $\mathbb{G}_3$ *eindeutig, reduziert und kontextfrei ist und* D' *ein* $(Einb_{cf})$*-Verwandtschaftsdiagramm ist.*

Beweis:

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über den Aufbau von D. Die Verankerung ist trivial. Betrachte den Induktionsschritt. Dann gibt es zwei Fälle:

1. Fall:

$$\mathbb{G}_0 \xleftarrow{\text{red}} \mathbb{G}'_1 = \mathbb{G}'_0\, \hat{D}\, \mathbb{G}_4 \xleftarrow[\text{Einb}]{} \mathbb{G}_1 \xleftarrow{\text{red}} \mathbb{G}_2.$$

Nach dem Korollar 2 zu Satz 2.1 erhalten wir dann ein äquivalentes Diagramm der Form

$$\mathbb{G}'_0\, \hat{D}\, \mathbb{G}_4 \xleftarrow[\text{red}]{} \cdot \xleftarrow[\text{Einb}]{} \mathbb{G}_2.$$

Nun wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf $\hat{D}$ an und erhalten die Behauptung.

2. Fall:

$$\mathbb{G}_0 \xleftarrow{\text{red}} \mathbb{G}'_1 = \mathbb{G}'_0\, \hat{D}\, \mathbb{G}_4 \xrightarrow[\text{Einb}]{} \mathbb{G}_1 \xleftarrow[\text{red}]{} \mathbb{G}_2.$$

Nach Satz 2.2 und Korollar 2 (beachte: $\mathbb{G}_2$ eindeutig) erhalten wir dann ein äquivalentes Diagramm der Form

$$\mathbb{G}'_0\, \hat{D}\, \mathbb{G}_4 \xleftarrow[\text{red}]{} \cdot \xrightarrow[\text{Einb}]{} \mathbb{G}_2.$$

Wenden wir wieder die Induktionsvoraussetzungen an auf $\hat{D}$, so erhalten wir ersichtlich die Behauptung.

Beweis von Satz 3.1: („(1)⇒(2)")

Betrachte ein $(ETrans_{eindcf})$-Verwandtschaftsdiagramm

$$
\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, "\text{etrans}"'] \arrow[dr, "\text{etrans}"] & & & & \cdot \arrow[dl, "\text{etrans}"'] \arrow[dr, "\text{etrans}"] & \\
\mathbb{G}_1 & & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & & \mathbb{G}_2
\end{tikzcd}
$$

Nach Satz 2.1 ist dieses Diagramm äquivalent zu einem Diagramm der Form

$$
\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, "\text{red}"] & \cdot \arrow[l, "\text{Einb}"'] \arrow[r, "\text{Einb}"] & \cdot \arrow[dr, "\text{red}"'] & & \cdot \arrow[dl, "\text{red}"] & \cdot \arrow[l, "\text{Einb}"'] \arrow[r, "\text{Einb}"] & \cdot \arrow[dr, "\text{red}"'] & & \cdot \arrow[dl, "\text{red}"] \arrow[r, "\text{Einb}"] & \cdot \arrow[dr, "\text{red}"'] & \\
\mathbb{G}_1 & & & & \cdot & & & & \cdot & & & \mathbb{G}_2
\end{tikzcd}
$$

Wir zeigen nun durch Induktion über die „Länge“ dieser Kette, daß sich dieses Diagramm überführen läßt in ein äquivalentes Diagramm der Form

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{G}_1' \, D \, \mathbb{G}_2' \arrow[dl, "\text{red}"'] \arrow[dr, "\text{red}"] & \\
\mathbb{G}_1 & & \mathbb{G}_2
\end{tikzcd}
$$

wobei D ein $Einb_{cf}$-Verwandtschaftsdiagramm ist.

Hierzu betrachten wir den Induktionsschritt

$$
\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, "\text{red}"] & \cdot \arrow[l, "\text{Einb}"'] \arrow[r, "\text{Einb}"] & \cdot \arrow[dr, "\text{red}"'] & & \cdot \, D \, \cdot \arrow[dl, "\text{red}"] \arrow[dr, "\text{red}"'] & \\
\mathbb{G}_1 & & & & \cdot & & \mathbb{G}_2
\end{tikzcd}
$$

Nach einem Satz von Schnorr [12] gibt es zunächst ein äquivalentes Diagramm der Form

$$
\begin{tikzcd}
& & & & \cdot \arrow[dl, "\text{red}"'] \arrow[dr, "\text{red}"] & & \\
& \cdot \arrow[dl, "\text{red}"] & \cdot \arrow[l, "\text{Einb}"'] \arrow[r, "\text{Einb}"] & \cdot & & \cdot \, D \, \cdot \arrow[dr, "\text{red}"'] & \\
\mathbb{G}_1 & & & & & & \mathbb{G}_2
\end{tikzcd}
$$

Zweimalige Anwendung von Lemma 3.1 liefert dann

$$
\begin{tikzcd}
& & D_1 \cdot D_2 \arrow[dl, "\text{red}"] \arrow[dr, "\text{red}"'] & & \\
& \cdot \arrow[dl, "\text{red}"] & & \cdot \arrow[dr, "\text{red}"'] & \\
\mathbb{G}_1 & & & & \mathbb{G}_2
\end{tikzcd}
$$

wobei D_1 und D_2 $Einb_{cf}$-Verwandtschaftsdiagramme sind. Damit ergibt sich aber die Behauptung.

Bemerkung:

Nach unseren Konstruktionen hätten wir anstelle von $Einb_{cf}$ die Kategorie Sim_{cf} der kontextfreien Grammatiken und Simulationen betrachten können.

Zum Abschluß befassen wir uns mit linearen Grammatiken. Hierzu sei $ETrans_{ELin}$ die Kategorie der erweiternden, linearen Grammatiken und erweiternden Transformationen.

Satz 3.2:

Seien $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ erweiternde, reduzierte, lineare Grammatiken mit $\mathbb{G}_1 \sim \mathbb{G}_2$ ($ETrans_{ELin}$). Dann gibt es ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_1 \arrow[dr, "\mathrm{Sim}"'] & & & & \mathbb{G}_2 \arrow[dl, "\mathrm{Sim}"] \\ & \mathbb{G}_1' & \mathbb{G}_0 \arrow[l, "\Phi_1"'] \arrow[r, "\Phi_2"'] & \mathbb{G}_2' & \end{tikzcd}$$

mit

(1) Φ_i *abgeschlossen, gut* $(i=1,2)$

(2) $T(\mathbb{G}_i) \subseteq \Phi_i(T(\mathbb{G}_0)) \subseteq T(\mathbb{G}_i)$ $(i=1,2)$

(3) $\mathbb{G}_i'$ *synchronisiert, linear* $(i=1,2)$

(4) $\mathbb{G}_0$ *linear und erweiternd.*

Beweis:

Nach Satz 2.1 können wir jedes $ETrans_{ELin}$-Verwandtschaftsdiagramm in ein äquivalentes Diagramm der Form

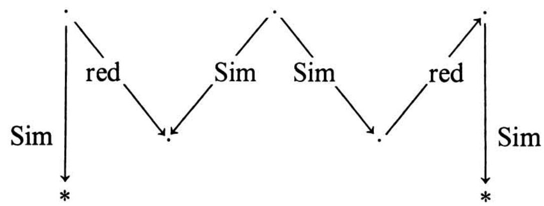
$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, "\mathrm{red}"] & \cdot \arrow[l, "\mathrm{Sim}"'] \arrow[r, "\mathrm{Sim}"] & \cdot \arrow[dr, "\mathrm{red}"'] & & & & \cdot \arrow[dl, "\mathrm{red}"] & \cdot \arrow[l, "\mathrm{Sim}"'] \arrow[r, "\mathrm{Sim}"] & \cdot \arrow[dr, "\mathrm{red}"'] & \\ \mathbb{G}_1 & & & & \cdot & \cdots & \cdot & & & & \mathbb{G}_2 \end{tikzcd}$$

umformen (wobei die Punkte — wie auch in allen folgenden Diagrammen — erweiternde, lineare Grammatiken bezeichnen).

Betrachte ein Diagramm der Form

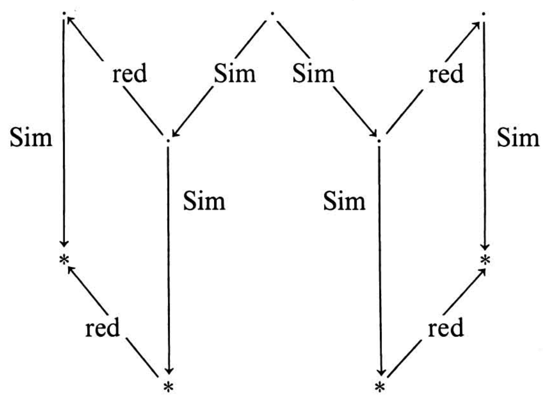
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \cdot \arrow[l, "\mathrm{Sim}"] \arrow[r, "\mathrm{Sim}"'] & \cdot \arrow[d, "\mathrm{red}"] \\ \cdot & & \cdot \end{tikzcd}$$

Durch Übergang zur synchronisierten Normalform erhalten wir



wobei „*" (wie auch im folgenden) synchronisierte lineare Grammatiken bezeichnet.

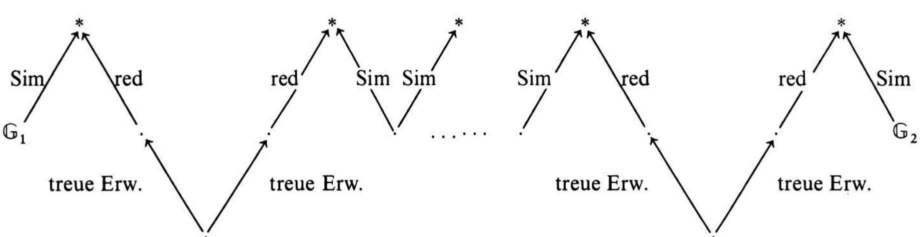
Nach dem Korollar zu Satz 2.1 finden wir eine Ergänzung der folgenden Form:



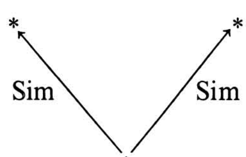
Nach Satz 2.3 erhalten wir aber dann ein Diagramm

$$\cdot \xrightarrow[\text{Sim}]{} * \xleftarrow[\text{red}]{} \cdot \xleftarrow[\text{treueErw}]{} \cdot \xrightarrow[\text{treueErw}]{} * \xleftarrow[\text{Sim}]{} \cdot$$

Also können wir unser Ausgangsdiagramm ersetzen durch



Nun können wir die inneren Diagramme



nach Satz 2.3 wieder ersetzen durch

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, "\text{treue Erw.}"'] \arrow[dr, "\text{treue Erw.}"] & \\
* & & *
\end{tikzcd}$$

Insgesamt erhalten wir ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{G}_1 \arrow[dr, "\text{Sim}"'] & & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \cdot \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{G}_2 \arrow[dl, "\text{Sim}"] \\
 & * & & \cdot & \ldots & \cdot & & * &
\end{tikzcd}$$

wobei die ungekennzeichneten Pfeile gerade abgeschlossene, gute Morphismen bezeichnen, die der Bedingung (2) genügen.

Betrachten wir nun ein Teildiagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr, "\text{abg. gut, (2)}"'] & & \cdot \arrow[dl, "\text{abg. gut, (2)}"] \\
 & \cdot &
\end{tikzcd}$$

so erhält man durch Kontrolle des Beweises des Satzes von Schnorr ([12]) eine Ergänzung

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, "\text{gut, abgeschl., (2)}"'] \arrow[dr, "\text{gut, abgeschl., (2)}"] & \\
\cdot \arrow[dr, "\text{gut, abgeschl., (2)}"'] & & \cdot \arrow[dl, "\text{gut, abgeschl., (2)}"] \\
 & \cdot &
\end{tikzcd}$$

Damit läßt sich aber das zuletzt erreichte Diagramm so umformen, daß ein Diagramm resultiert, wie es in Satz 3.2 verlangt wird.

Bemerkung:

Im Falle eindeutiger, linearer Grammatiken können wir offenbar auf die Simulationen verzichten.

Verwenden wir anstelle des Satzes 2.3 den Satz 2.4 und betrachten die Kategorie der linkslinearen, erweiternden Grammatiken und erweiternden Transformationen $ETrans_{ELinkslin}$, so gilt mit einem entsprechend abgewandelten Beweis

Satz 3.3:

Seien $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ erweiternde, reduzierte, linkslineare Grammatiken, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(*i*) $\mathbb{G}_1 \sim \mathbb{G}_2\,(ETrans_{ELinkslin})$

(*ii*) *Es existiert ein Diagramm der Form*

$$\mathbb{G}_1 \xrightarrow[\text{Sim}]{} \cdot \xleftarrow[\text{red}]{} \cdot \xrightarrow[\text{red}]{} \cdot \xleftarrow[\text{Sim}]{} \mathbb{G}_2$$

Bemerkung:

Für eindeutige linkslineare Grammatiken können wir wieder auf die Simulationen verzichten.

Bemerkung:

Ein analoges Ergebnis erhalten wir für rechtslineare Grammatiken.

4. Entscheidbarkeitsfragen

Wir untersuchen zunächst die Kategorie Sim_{Ecf} der erweiternden, kontextfreien Grammatiken und Simulationen. Wir wollen zeigen, daß die Relation $\mathbb{G}_1 \sim \mathbb{G}_2$ (Sim_{Ecf}) entscheidbar ist. Hierzu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 4.1:

Seien $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ erweiternd, kontextfrei und $\mathbb{G}_2$ binär, Φ: $\mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ eine Simulation, dann gilt:

(1) $\xi' \notin \Phi(Z(\mathbb{G}_1)), f$ *mit* $\|f\| \geq 1, df = \xi', cf = u\xi' v \Rightarrow f = f_1 \circ f_2$ *mit* $df_1 \in \Phi(Z(\mathbb{G}_1))$

(2) $r \in P(\mathbb{G}_1)$: $\Phi(r) = (u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$ *mit* $u_1 v_1 = \in, u_s\, c\, r_s\, v_s = c\, r$, $d\,r_s = d\,r,\ d\,r_i \neq d\,r_{i+1},\ 2 \leq i \leq s$

(3) $r \in P(\mathbb{G}_1)$: $\|\Phi(r)\| = |c(r)| + |c(r)|_{T(\mathbb{G}_1)}$

(4) $|Z(\mathbb{G}_2)| = |Z(\mathbb{G}_1)| + \sum_{r \in P(\mathbb{G})} (\|\Phi(r)\| - 1)$

Beweis: Analog Lemma 2.1 für lineare Grammatiken.

Bezeichnung:

Die Zusammensetzung einer Simulation mit einem internen Isomorphismus nennen wir *schwache Simulation.*

Korollar 1:

Φ_1: $\mathbb{G}_0 \to \mathbb{G}_1$, Φ_2: $\mathbb{G}_0 \to \mathbb{G}_2$, $\mathbb{G}_0, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ erweiternd, kontextfrei, $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ binär, Φ_1, Φ_2 schwache Simulationen

$$\Rightarrow |Z(\mathbb{G}_1)| = |Z(\mathbb{G}_2)|.$$

Wir ziehen eine weitere Folgerung. Betrachte $\mathbb{G}$ erweiternd, reduziert und binär, $Z \subseteq Z(\mathbb{G})$:

Z trennt $\mathbb{G}$ genau dann, wenn es ein $k > 0$ gibt, so daß gilt:

(1) Ist $f = (u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$ mit $d r_i \notin Z$, $2 \leq i \leq s$, und $u_1 v_1 = \in$, so gilt: $s \leq k$.

(2) $|\{f=(u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1) \mid u_s\, c\, r_s\, v_s \in (Z \cup T(G))^*,\ u_1\, v_1 = \epsilon,\ d\, r_1 \in Z,$
$d\, r_i \notin Z,\ 2 \leq i \leq s\}| \leq k$

Korollar 2:

$\Phi_0 : \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ schwache Simulation, $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2$ erweiternd, kontextfrei und reduziert, $\mathbb{G}_2$ binär, dann trennt $\Phi(Z(\mathbb{G}_1))$ $\mathbb{G}_2$.

Lemma 4.2:

Man kann entscheiden, ob eine Menge Z eine binäre Grammatik trennt.

Sei zu $\mathbb{G}$ die Klasse $|\mathbb{G}|$ bestimmt durch Anwendung interner Isomorphismen. Dann gilt für $k \in \mathbb{Z}_+$, T Alphabet:

$\Delta(k, T) = \{|\mathbb{G}| \mid \mathbb{G}$ binär, erweiternd, $T(\mathbb{G}) = T$, $|Z(\mathbb{G})| \leq k\}$ ist endlich, und diese Menge kann berechnet werden.

Lemma 4.3:

Zu jedem (Sim_{Ecf})-Verwandtschaftsdiagramm $\mathbb{G}_1\, D\, \mathbb{G}_2$ gibt es ein Verwandtschaftsdiagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
 & H_1 & & & & H_s & & \\
\mathbb{G}_1 \arrow[ur, "\mathrm{Sim}"] & & K_2 \arrow[ul, "\mathrm{Sim}"'] & \cdots\cdots & K_s \arrow[ur, "\mathrm{Sim}"] & & K_{s+1} \arrow[ul, "\mathrm{Sim}"'] \arrow[r] & \mathbb{G}_2
\end{tikzcd}$$

mit

(1) *H_i binär $(1 \leq i \leq s)$*

(2) $s \leq |\Delta(|Z(\mathbb{G}_1)| + \sum\limits_{r \in P(\mathbb{G}_1)} (|c(r)| + |c(r)|_{T(\mathbb{G}_1)} - 1),\ T(\mathbb{G}_1))|$

Beweis:

Wir können o. B. d. A. annehmen, daß D die Form

$$\begin{tikzcd}
 & H'_1 & & & & H'_{s'} & & \\
\mathbb{G}_1 = K'_1 \arrow[ur] & & K'_2 \arrow[ul] & \cdots\cdots & K'_{s'} \arrow[ur] & & D'_{s'+1} \arrow[ul] \arrow[r, "\text{int.}", "\text{Isom.}"'] & \mathbb{G}_2
\end{tikzcd}$$

besitzt. Nach Korollar 1 gilt dann aber für alle $1 \leq i, j \leq s'$:

$$|Z(H'_i)| = |Z(H'_j)| = |Z(\mathbb{G}_1)| + \sum_{r \in P(\mathbb{G}_1)} (|c(r)| + |c(r)|_{T(\mathbb{G}_1)} - 1) = k.$$

Ist nun $s' > \Delta(k, T(\mathbb{G}_1))$, so gibt es $1 \leq i < j \leq s'$ mit $H'_i \underset{\text{int}}{\triangleq} H'_j$.

Dann läßt sich die obige Kette aber verkürzen.

Betrachte nun wieder $\mathbb{G}$ binär und Z, so daß Z $\mathbb{G}$ trennt und $S(\mathbb{G}) \subseteq Z$ gilt. Definiere Grammatik $\mathbb{G}_Z$ durch

(i) $T(\mathbb{G}_Z) = T(\mathbb{G}),\ S(\mathbb{G}_Z) = S(\mathbb{G}),\ Z(\mathbb{G}) = Z$

(ii) $P(\mathbb{G}_Z) = \{(d\,r_1, u_s\, c\, r_s\, v_s) \mid \exists\ f = (u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$ mit

  (1) $u_s\, c(r_s)\, v_s \in (Z \cup T(\mathbb{G}))^*$

  (2) $u_1\, v_1 = \epsilon,\ d\,r_1 \in Z$

  (3) $d\,r_i \notin Z,\ 2 \leq i \leq s\}$

Bezeichnung:
f mit den in der Definition (ii) geforderten Eigenschaften heißen *Z-normal.*

Man erkennt sofort

Beobachtung:
Durch eine Zuordnung $\Phi((d\,r_1, u_s\, c\, r_s\, v_s)) = f$, wobei f den definierenden Eigenschaften genügt, wird ein dichter, interner Morphismus definiert.

Damit dieses Φ eine Simulation definiert, sind weitere Eigenschaften zu überprüfen, und zwar:

Ordne jedem Z-normalen $f = (u_s \times r_s \times v_s) \circ \ldots \circ (u_1 \times r_1 \times v_1)$ die Menge $Z(f) = \{d\,r_i \mid 2 \leq i \leq s\}$ zu. Dann gilt

Beobachtung:
Gelten folgende Aussagen für Z-normale f_1, f_2 mit $f_1 \neq f_2$:

(iii) $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$

(iv) $(d\,f_1, c\,f_1) \neq (d\,f_2, c\,f_2)$,

dann definiert Φ eine Simulation.

Umgekehrt erhält man durch Untersuchung trennender Z für binäre $\mathbb{G}$ alle $\mathbb{G}'$ bis auf interne Isomorphie, so daß es eine schwache Simulation $\Phi\colon \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ gibt. Nun können wir aber bis auf Isomorphie alle Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd}
 & H_1 & & & & H_s & \\
\mathbb{G}_1 = K_1 \arrow[ur, "\mathrm{Sim}"] & & K_2 \arrow[ul, "\mathrm{Sim}"'] & \cdots\cdots & K_s \arrow[ur, "\mathrm{Sim}"] & & K_{s+1} \arrow[ul, "\mathrm{Sim}"']
\end{tikzcd}$$

mit

(1) H_i binär $(1 \leq i \leq s)$

(2) $s \leq \left| \Delta\left(|Z(\mathbb{G}_1)| + \sum_{r \in P(\mathbb{G}_1)} \left(|c(r)| + |c(r)|_{T(\mathbb{G}_1)} - 1\right),\ T(\mathbb{G}_1)\right)\right|$

bestimmen. Hieraus folgt

Satz 4.1:

Zu zwei beliebigen reduzierten, erweiternden, kontextfreien Grammatiken $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ ist es entscheidbar, ob $\mathbb{G}_1 \sim \mathbb{G}_2\ (Sim_{Ecf})$ gilt.

Verwenden wir anstelle der binären Normalform für lineare Grammatiken die synchronisierte Normalform und schließen entsprechend, so erhalten wir für die Kategorie Sim_{ELin} der erweiternden linearen Grammatiken und Simulationen den

Satz 4.2:

Zu zwei beliebigen reduzierten, erweiternden linearen Grammatiken $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ ist es entscheidbar, ob $\mathbb{G}_1 \sim \mathbb{G}_2$ (Sim_{ELin}) gilt.

Für linkslineare Grammatiken können wir mehr zeigen. Wir hatten gesehen, daß für erweiternde, reduzierte, linkslineare Grammatiken folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathbb{G}_1 \sim \mathbb{G}_2$ ($ETrans_{ELinkslin}$)

(ii) Es existiert ein Diagramm der Form

$$\mathbb{G}_1 \xrightarrow[\text{Sim}]{} \mathbb{G}_1' \xleftarrow[\text{red}]{} \cdot \xrightarrow[\text{red}]{} \mathbb{G}_2' \xleftarrow[\text{Sim}]{} \mathbb{G}_2$$

wobei $\mathbb{G}_1'$ und $\mathbb{G}_2'$ synchronisiert sind.

Nun können wir aber zu $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ alle synchronisierten $\mathbb{G}_1'$ und $\mathbb{G}_2'$ finden mit $\mathbb{G}_i \xrightarrow[\text{Sim}]{} \mathbb{G}_i'$ $(i=1,2)$. Dann ist nur noch zu überprüfen

$$\mathscr{L}(\mathbb{G}_1'^{()}) = \mathscr{L}(\mathbb{G}_2'^{()}).$$

Hieraus folgt:

Satz 4.3:

Zu zwei beliebigen reduzierten, erweiternden, linkslinearen Grammatiken $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ ist es entscheidbar, ob $\mathbb{G}_1 \sim \mathbb{G}_2$ ($ETrans_{ELinkslin}$) gilt.

Bemerkung:

Natürlich kann man Satz 4.3 über die Konstruktion endlicher Akzeptoren zeigen (sogar in allgemeinerer Form). Unser Entscheidungsverfahren benutzt diesen „Umweg" aber nicht, sondern ist direkt.

Literatur

[1] Bartholomes, F., Hotz, G.: Homomorphismen und Reduktionen linearer Sprachen. (Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Bd. 32.) Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

[2] Bertsch, E.: An Observation on Relative Parsing Time. JACM *22*, 493—498 (1975).

[3] Bertsch, E.: Existenz- und Entscheidbarkeitsfragen der Übersetzungstheorie. Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1973.

[4] Ginsburg, S.: The Mathematical Theory of Context Free Languages. New York: McGraw-Hill 1966.

[5] Hotz, G.: Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit formaler Sprachen. EIK *2*, 235—246 (1966).

[6] Hotz, G.: Homomorphie und Äquivalenz formaler Sprachen. 3. Kolloquium über Automatentheorie (Händler, W., Peschl, E., Unger, H., Hrsg.). Basel: Birkhäuser 1967.

[7] Hotz, G.: Übertragung automatentheoretischer Sätze auf Chomskysprachen. Computing *4*, 30—42 (1969).

[8] Hotz, G., Claus, V.: Automatentheorie und formale Sprachen III: Formale Sprachen. (Bd. 823/823a.) Mannheim: BI-Hochschultaschenbücherverlag 1973.

[9] McNaughton, R.: Parenthesis Grammars. JACM *14*, 490—500 (1967).

[10] Salomaa, A.: Formal Languages. New York: Academic Press 1973.
[11] Schnorr, C. P.: On Transformational Classes of Grammars. Inform. a. Contr. *14*, 252—277 (1969).
[12] Schnorr, C. P.: Vier Entscheidbarkeitsprobleme für kontextsensitive Sprachen. Computing *93*, 311—317 (1968).
[13] Schnorr, C. P., Walter, H.: Pullbackkonstruktionen bei Semi-Thue-Systemen. EIK *5*, 27—36 (1969).
[14] Walter, H.: Verallgemeinerte Pullbackkonstruktionen bei Semi-Thue-Systemen. EIK *6*, 239—254 (1970).
[15] Walter, H.: Grammatik- und Sprachfamilien Teil III. TB, AFS-20 TH Darmstadt, FB Informatik, 1975.
[16] Walter, H.: The Structural Equivalence of Context Free Grammarforms is Decidable. (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 52.) 1977.
[17] Walter, H.: Grammatik- und Sprachfamilien Teil IV. TB AFS-22, TH Darmstadt, FB Informatik, 1975.

Prof. Dr. H. K.-G. Walter
FB Informatik
Technische Hochschule Darmstadt
Magdalenenstraße 11
D-6100 Darmstadt
Bundesrepublik Deutschland

Printed in Austria

Druck: Paul Gerin, A-1021 Wien